

УДК 539.3

УЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ В ЗАДАЧЕ ОБ  
УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В  
УСЛОВИЯХ КОНСТРУКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*Е.И. Михайловский, Е.В. Тулубенская*

В работе рассматривается задача об устойчивости продольно сжимаемой шарнирно опертой цилиндрической оболочки, расположенной на границе раздела двух разномодульных упругих сред. Используется уточненная теория типа Маргера-Тимошенко [1]. Решение задачи ищется с помощью комбинированного алгоритма перебора вариантов.

**1. Подготовка полевых и граничных уравнений**

Основные соотношения уточненной теории пологих оболочек типа Маргера-Тимошенко для круговой цилиндрической оболочки радиуса  $R$  в безразмерных координатах

$$\xi = x_1/R, \quad \varphi = x_2/R,$$

имеют вид [1]

$$\begin{aligned} d_{\circ}\Delta^2 w + R \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \Psi - \frac{kh_{\psi}^2}{R^2} \Delta \Psi \right) &= f_1 + \left( I - \frac{kh_{\psi}^2}{R^2} \Delta \right) \Lambda(\Psi, w), \\ -EhR \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \Delta^2 \Psi &= \frac{1}{2} Eh \Lambda(w, w), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= R^4 \left( q_n - \frac{kh_{\psi}^2}{R^2} \Delta q_n \right), \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2}, \\ \Lambda(\Psi, w) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \end{aligned}$$

$$d_o = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad h_\psi^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)},$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{(теория Маргера)} \\ 1 & \text{(теория Маргера-Тимошенко)} \\ 15/8 & \text{(теория Маргера-Журавского)} \end{cases},$$

$h$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим продольно сжимаемую шарнирно опертую цилиндрическую оболочку на границе разномодульных винклеровских сред. Основное уравнение (относительно функции  $w(\xi)$ ) получим из (1.1) при условии, что

$$\Lambda(\Psi, w) = R^2 T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \Lambda(w, w) = 0.$$

При этих условиях с учетом того, что  $T_{11} = -T_o = \text{const}$ , система (1.1) является линейной и допускает следующее преобразование:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_o \Delta^2(\cdot) & R \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (I - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta(\cdot)) \\ -EhR \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} & \Delta^2(\cdot) \end{vmatrix} =$$

$$= d_o [\Delta^4(\cdot) - 2(1+\nu)k \frac{\partial^4 \Delta(\cdot)}{\partial \xi^4} + 4b^4 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial \xi^4}],$$

$$\Delta_w = \begin{vmatrix} f_1 - R^2 T_o (I - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} & R \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (I - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta(\cdot)) \\ 0 & \Delta^2(\cdot) \end{vmatrix} =$$

$$= R^4 (\Delta^2 q_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta^3 q_n) - R^2 T_o \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\Delta^2 w - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta^3 w).$$

Отсюда имеем

$$w = \frac{\Delta_w}{\Delta} \Rightarrow \Delta w = \Delta_w$$

или

$$\Delta^4 w - 2(1+\nu)k \frac{\partial^4 \Delta w}{\partial \xi^4} + 4b^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} =$$

$$= \frac{R^4}{d_o} [(\Delta^2 q_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta^3 q_n) - \frac{T_o}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\Delta^2 w - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \Delta^3 w)], \quad (1.2)$$

где

$$q_n = -c_1 w_+ - c_2 w_-,$$

$c_1, c_2$  – жесткости винклеровских сред;  $w_+ = \max\{0, w\}$ ,  $w_- = \min\{0, w\}$  – срезки функции  $w$ .

Полезным, особенно при формулировании граничных условий, является также уравнение

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} = -\frac{2(1+\nu)kR}{Eh} \left[ q_n - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R^4} \Lambda(\Psi, w) \right]. \quad (1.3)$$

В частности, для осесимметричной деформации уравнение (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^4}{d\xi^4} \left[ \frac{d^4 w}{d\xi^4} - 2(1+\nu)k \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4b^4 w \right] = \\ & = \frac{R^4}{d_\circ} \frac{d^4}{d\xi^4} \left[ \left( q_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \frac{d^2 q_n}{d\xi^2} \right) - \frac{T_\circ}{R^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( w - \frac{kh_\psi^2}{R^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вместо (1.4) достаточно обеспечить выполнение следующего уравнения четвертого порядка [2]:

$$\begin{aligned} & w^{IV} - 2(1+\nu)kw'' + 4b^4 w = \\ & = \frac{R^4}{d_\circ} \left( q_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2} q_n'' \right) - \frac{T_\circ R^2}{d_\circ} \left( w'' - \frac{kh_\psi^2}{R^2} w^{IV} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

(Штрихом помечены производные по  $\xi \in [0, l/R]$ ).

Введем новую переменную  $\tilde{\xi} = \pi(R/l)\xi$ ,  $0 \leq \tilde{\xi} \leq \pi$ . Если сохранить за ней прежнее обозначение  $\xi$  и понимать под штрихом производную по новой переменной, то уравнение (1.5) можно записать так:

$$w^{IV} - q + \frac{\pi^2}{\varkappa^2} q'' = -\lambda(w'' - \frac{\pi^2}{\varkappa^2} w^{IV}), \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} q &= -k_1 w_+ - k_2 w_-, \quad k_i = \frac{l^4}{d_\circ \pi^4} \left( c_i + \frac{Eh}{R^2} \right), \quad i = 1, 2, \\ \varkappa^2 &= \frac{l^2}{kh_\psi^2}, \quad \lambda = \frac{T_\circ l^2}{d_\circ \pi^2}. \end{aligned} \quad (1.6')$$

Граничные условия шарнирно опертого края, нагруженного равномерно распределенной сжимающей нагрузкой  $T_\circ$ , записываем в терминах величин, помеченных в нижеследующей таблице:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \widehat{T}_{1n} & M_{11} & M_{12} & F_2^* & B_n^* \\ \hline w & \vartheta_1 + \psi_1 & \vartheta_2 + \psi_2 & -\varepsilon_{22}^* & \varkappa_{2n}^* \\ \hline \end{array}. \quad (1.7)$$

Основные (требующие безусловного выполнения) условия шарнирно опертого края  $\xi = const$  имеют вид (здесь и ниже учитывается, что нормальная нагрузка на краю полностью передается на жесткую опору, в связи с чем там можно полагать  $q_n = 0$ ):

$$w = 0, \quad M_{11} = -\frac{d_o}{R^2}w'' + \frac{d_o}{R}\psi'_1 = 0. \quad (1.8)$$

Остальные граничные условия с учетом (1.8) принимают вид

$$\vartheta_2 + \psi_2 = 0, \quad \varepsilon_{22}^* = \frac{1}{EhR^2}\Psi'' = 0, \quad B_n^* = \Psi = -R^2T_o. \quad (1.9)$$

(Последнее граничное условие в (1.9) записано с учетом формулы (15.166) [3].)

Уравнение (1.3) на шарнирно опертом крае  $\xi = const$  принимает вид

$$\psi'_1 = \frac{2(1+\nu)k}{EhR} \left( \frac{1}{R}\Psi'' + T_o w'' \right) = \frac{2(1+\nu)kT_o}{EhR} w''.$$

Подставляя это выражение для  $\psi'_1$  во второе равенство (1.8), получим

$$\left( 1 - \frac{2(1+\nu)kT_o}{Eh} \right) w'' = 0.$$

Таким образом, за исключением частного случая, когда

$$T_o = Eh/2(1+\nu)k,$$

выбранный вариант граничных условий шарнирно опертого края можно записывать в том же виде, что и в классической теории оболочек:

$$w = 0, \quad w'' = 0. \quad (1.10)$$

## 2. Постановка спектральной задачи

### 2.1. Случай разномодульных винклеровских сред

Равенство (1.6) является уравнением Эйлера для функционала

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(w, w', w'') d\xi, \quad (2.1)$$

где

$$F = w'^2 + k_1 w_+^2 + k_2 w_-^2 - \frac{\pi^2}{\alpha^2} (k_1 w_+ + k_2 w_-) w'' + \lambda (w'^2 + \frac{\pi^2}{\alpha^2} w''^2). \quad (2.1')$$

Действительно, уравнение Эйлера-Пуассона для функционала вида (2.1) определяется равенством

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{\partial F}{\partial w''} = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} w_+ + w_- = w, \quad ww_+ = w_+^2, \quad ww_- = w_-^2; \\ \frac{\partial w_+^2}{\partial w} = \begin{cases} 2w, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases} = 2w_+, \\ \frac{\partial ww_+}{\partial w} = w'' \begin{cases} 1, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} w'', & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases} = \frac{d^2}{d\xi^2} \begin{cases} w, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases} = (w_+)'' \end{aligned}$$

приходим к уравнению (1.6).

Заменяем формулу (2.1) приближенной с использованием дискретного представления функции  $w(\xi)$ ,  $\xi \in [0, \pi]$  на  $m$ -мерной сетке:

$$w_i \triangleq w(\xi_i), i \in 0 : m; \quad \xi_{i+1} = \xi_i + \tau, \quad \tau = \pi/m, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_m = \pi.$$

Интегралы вычисляем по квадратурной формуле трапеций, производные аппроксимируем конечно-разностными отношениями

$$w'(\xi_i) = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\tau}, \quad w''(\xi_i) = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\tau^2}. \quad (2.2)$$

Значения срезов функции  $w(\xi)$  в узлах сетки представляем формулами

$$w_+(\xi_i) = b_i w_i, \quad w_-(\xi_i) = (1 - b_i) w_i, \quad (2.3)$$

где

$$b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ 0, & w_i \leq 0 \end{cases}. \quad (2.3')$$

Граничные условия шарнирного опирания, имеющие вид (см. форм. (1.10))

$$w(0) = w(\pi) = 0, \quad w''(0) = w''(\pi) = 0, \quad (2.4)$$

с учетом аппроксимации (2.2)<sub>2</sub> в терминах дискретных значений функции  $w(\xi)$  можно записать так:

$$w_0 = w_m = 0, \quad w_{-1} = -w_1, \quad w_{m+1} = -w_{m-1}. \quad (2.5)$$



## 2.2. Решение задачи в случае однородной винклеровской среды

Собственную форму спектральной задачи (1.6) при  $c_1 = c_2 = c$  будем искать в виде следующей (удовлетворяющей граничным условиям (2.4)) функции:

$$w(x) = A_n \sin n_* x, \quad n_* = \pi n/l. \quad (2.8)$$

Подставив выражение (2.8) вместо прогиба в уравнение (1.6) и положив  $q_n = -cw$ , получим

$$A_n [d_o n_*^4 + \tilde{c}(1 + kh_\psi^2 n_*^2) - T n_*^2(1 + kh_\psi^2 n_*^2)] = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{c} \triangleq c + \frac{Eh}{R^2}.$$

Нетривиальному решению соответствует критическая сила (усилие)

$$T^{(n)} = \frac{d_o n_*^2}{1 + kh_\psi^2 n_*^2} + \frac{\tilde{c}}{n_*^2}. \quad (2.10)$$

Подставляя это выражение вместо  $T'_o$  в последнюю формулу (1.6'), получим

$$\lambda_{(n)} = \frac{n^2}{1 + \pi^2 n^2 / \alpha^2} + \frac{\tilde{k}}{n^2}, \quad \tilde{k} = \frac{\tilde{c} l^4}{d_o \pi^4}. \quad (2.11)$$

где индекс в скобках при параметре  $\lambda$  указывает на число полуволин собственной формы.

На основании формулы (2.11) при  $\tilde{k} = 20$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $l/h = 60$ ,  $k = 1(15/8)$  имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} &= 20.999(20.999), \quad \lambda_{(2)} = 8.990(8.981), \quad \lambda_{(3)} = 11.170(11.124), \\ \lambda_{(4)} &= 17.085(16.943), \quad \lambda_{(5)} = 25.399(25.058). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Откуда следует, что первому собственному числу отвечает двухполу-волновая собственная форма, т.е.

$$\lambda_1 = \lambda_{(2)} = 8.990(8.981).$$

Из формулы (2.10) усматривается, что при больших значениях  $n_*$  жесткость винклеровского основания не оказывает влияния на величину критической силы, при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{(n)} = \mu h/k. \quad (2.13)$$

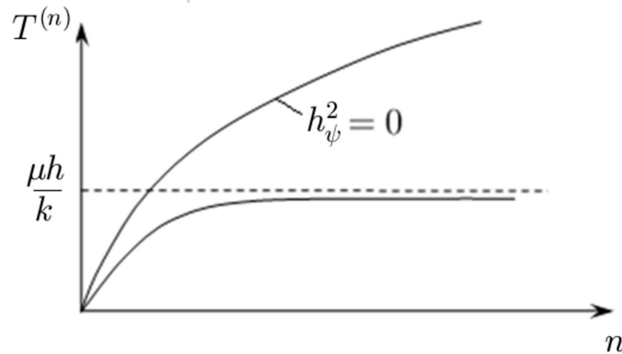


Рис. 1

Иными словами, учет поперечных сдвигов приводит к качественному изменению собственного спектра (рис.1).

Из формулы (2.11) следует, что при

$$0 \leq \tilde{k} \leq \frac{4}{(1 + \pi^2/\alpha^2)(1 + 4\pi^2/\alpha^2)}$$

наименьшему значению сжимающей силы будет соответствовать собственная форма с одной полуволной и для расчета минимальной критической силы следует использовать формулу (2.10) при  $n = 1$ , а наименьшее значение сжимающей силы, которому соответствует  $n$ -полуволновая собственная форма будет при

$$\tilde{k} \geq \frac{(n-1)^2 n^2}{(1 + (n-1)^2 \pi^2 / \alpha^2)(1 + n^2 \pi^2 / \alpha^2)},$$

$$\tilde{k} \leq \frac{n^2 (n+1)^2}{(1 + n^2 \pi^2 / \alpha^2)(1 + (n+1)^2 \pi^2 / \alpha^2)}.$$

Если  $\nu = 0.3$ ,  $l/h = 60$ ,  $k = 1(15/8)$ , то минимальным параметром жесткости, имеющим собственное число 2-го ранга (кратности 2) является  $\tilde{k} = 3.98698(3.97565)$ , для которого  $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = 4.98633(4.97442)$ . При  $\tilde{k} < 3.98698$  первому собственному числу отвечает собственная форма с одной полуволной, при  $3.98698 < \tilde{k} < 35.69654$  — с двумя полуволнами.

### 3. Комбинированный алгоритм

Для решения поставленной задачи воспользуемся комбинированным алгоритмом, который предполагает последовательное применение алгоритмов *полного перебора вариантов* (ППВ) и *локального перебора вариантов* (ЛПВ) [4].



Алгоритм полного перебора вариантов возможных форм изгиба в соответствии с принятой сеткой заключается в следующем:

— перебираются все  $2^{m-1}$  возможных представлений *вектора формы*

$$b = [b_1, \dots, b_{m-1}]^{\oplus};$$

— для каждого варианта вектора формы решается задача на собственные значения модифицированным методом Якоби [5] детерминированного (все компоненты вектора формы известны) уравнения (2.7);

— запоминается собственная пара (число и форма), для которой форма изгиба  $\tilde{w}^{(i)}$  или  $-\tilde{w}^{(i)}$  согласуется с выбранным вектором формы.

Применяем алгоритм ШВ, увеличивая число узлов сетки, до тех пор, пока качественная конфигурация собственной формы искомого собственного числа не стабилизируется. Собственную форму, имеющую устойчивый с ростом  $m$  вид графика, будем называть *качественно адекватной*.

После определения качественно адекватной собственной формы, применяем алгоритм локального перебора вариантов, взяв за начальное приближение названную форму:

1. Последовательно удваиваем число узлов сетки путем деления интервалов пополам и выполняем перебор вариантов лишь вблизи корней последнего приближения к искомой собственной форме; если же график приближенной собственной формы не пересекает ось  $\xi$ , то выполняем дробление сетки без перебора вариантов.

При этом могут быть реализованы две схемы ЛПВ.

*Первая схема* ЛПВ основана на предположении, что при удвоении числа узлов сетки точка пересечения графиком приближенной собственной формы оси  $\xi$  не выйдет за пределы интервала, в котором она располагалась до удвоения числа узлов сетки. По этой схеме для каждого корня собственной формы реализуются два варианта вычислений (рис.2):

$$1) b_{2i+1} = 1, \quad 2) b_{2i+1} = 0.$$

Остальные компоненты вектора формы не варьируются, т.е.

$$\begin{aligned} b_j = 1, \quad b_{j+1} = 1 &\Rightarrow b_{2j} = 1, \quad b_{2j+1} = 1, \quad b_{2j+2} = 1, \\ b_k = 0, \quad b_{k+1} = 0 &\Rightarrow b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = 0, \quad b_{2k+2} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

*Вторая схема* ЛПВ основана на предположении, что при удвоении числа узлов сетки точка пересечения графиком собственной формы оси  $\xi$  может выйти за пределы интервала, в котором она располагалась до

удвоения числа узлов сетки (см. рис. 2). Вторая схема сводится к перебору четырех вариантов для каждого корня предыдущего приближения к соответствующей собственной форме:

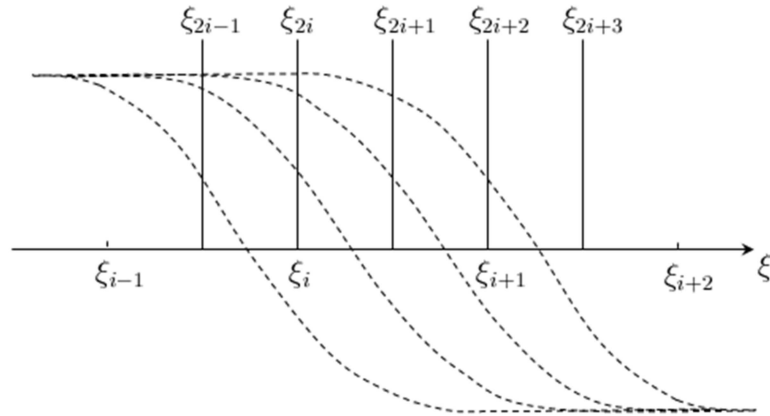


Рис. 2

– если  $b_i = 1, b_{i+1} = 0$ , где  $(\xi_i, \xi_{i+1})$  – интервал, содержащий точку пересечения графиком качественной адекватной собственной формы оси  $\xi$ , то реализуются следующие варианты вычислений:

- 1)  $b_{2i} = 0, b_{2i+1} = 0, b_{2i+2} = 0$ ;
- 2)  $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 0, b_{2i+2} = 0$ ;
- 3)  $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 1, b_{2i+2} = 0$ ;
- 4)  $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 1, b_{2i+2} = 1$ ;

– если  $b_i = 0, b_{i+1} = 1$ , то рассматриваем следующие варианты вычислений:

- 1)  $b_{2i} = 1, b_{2i+1} = 1, b_{2i+2} = 1$ ;
- 2)  $b_{2i} = 0, b_{2i+1} = 1, b_{2i+2} = 1$ ;
- 3)  $b_{2i} = 0, b_{2i+1} = 0, b_{2i+2} = 1$ ;
- 4)  $b_{2i} = 0, b_{2i+1} = 0, b_{2i+2} = 0$ .

Остальные компоненты вектора формы не варьируются (см. (3.1)).

2. Процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой (и достижимой) точностью.

#### 4. Численное решение в случае разномодульных винклеровских сред

Процесс сходимости алгоритма ППВ для вычисления первого собственного значения при  $k_1 = 18$ ,  $k_2 = 20$ ,  $k = 1(15/8)$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $l/h = 60$  усматривается из таблицы 1

Таблица 1.

$m$	$\lambda_1$	Вектор формы
4	18.081(18.036)	[0,1,1]
6	11.758(11.740)	[0,0,1,1,1]
8	10.271(10.258)	[0,0,0,1,1,1,1]
10	9.671(9.659)	[0,0,0,0,1,1,1,1,1]
11	9.484(9.495)	[0,0,0,0,0,1,1,1,1,1]

Приняв собственную форму, полученную с применением ППВ при  $m = 11$  за качественно адекватную, реализовывали алгоритм ЛПВ, результаты расчетов с использованием которого представлены в таблице 2

Таблица 2.

$k$	$m$					
	11	22	44	88	176	352
0	9.508	8.917	8.777	8.742	8.730	8.726
1	9.484	8.906	8.766	8.733	8.722	8.719
15/8	9.495	8.896	8.757	8.723	8.718	8.716

Далее для вычисления первого собственного числа применялась первая схема ЛПВ, начиная с  $m = 4$ , при фиксированном значении параметра  $k_2 = 20$  и изменении параметра  $k_1$  от 10 до 20. Результаты расчетов представлены в таблице 3 при  $k = 1$  и в таблице 4 при  $k = 15/8$ .

Таблица 3.

$m$	$\lambda_1$				
	$k_1 = 10$ $k_2 = 20$	$k_1 = 14$ $k_2 = 20$	$k_1 = 18$ $k_2 = 20$	$k_1 = 19$ $k_2 = 20$	$k_1 = k_2 = 20$
4	12.999	16.073	18.081	18.444	18.768
8	8.276	9.433	10.271	10.443	10.603
16	7.419	8.368	9.075	9.222	9.359
32	7.222	8.130	8.807	8.949	9.080
64	7.174	8.071	8.742	8.882	9.012
128	7.153	8.049	8.724	8.864	8.996
256	7.145	8.041	8.719	8.862	8.994

Таблица 4.

$m$	$\lambda_1$				
	$k_1 = 10$ $k_2 = 20$	$k_1 = 14$ $k_2 = 20$	$k_1 = 18$ $k_2 = 20$	$k_1 = 19$ $k_2 = 20$	$k_1 = k_2 = 20$
4	12.978	16.038	18.036	18.398	18.722
8	8.264	9.420	10.258	10.430	10.590
16	7.409	8.358	9.065	9.212	9.349
32	7.213	8.120	8.798	8.939	9.071
64	7.165	8.062	8.733	8.873	9.003
128	7.140	8.048	8.720	8.853	8.988
256	7.134	8.043	8.716	8.850	(8.985)

При  $k_1 \rightarrow 20$ ,  $k_2 = 20$  собственное число будет приближаться к определенному по формуле (2.11)  $\lambda_1 = 8.990(8.981)$ .

Сравнивая таблицы 2 и 3, убеждаемся в том, что при  $m = 256$  и  $m = 352$  первое собственное число, отвечающее параметрам жесткости  $k_1 = 18$ ,  $k_2 = 20$ , имеет с точностью до третьего знака после запятой одно и то же значение 8.719(8.716), которое можно принять в качестве окончательной оценки  $\lambda_1$  для указанных параметров жесткости. При этом в случае реализации первой локальной схемы (см. табл. 3.) алгоритм "ППВ( $m = 4$ ) + ЛПВ( $m = 8, 16, 32, 64, 128, 256$ )" свелся к решению 20 линейных спектральных задач вместо  $2^{255} \sim 10^{26}$  таких задач, при реализации алгоритма ШВ. Использование второй локальной схемы (см. табл. 2.) по алгоритму "ППВ( $m = 11$ ) + ЛПВ( $m = 22, 44, 88, 176, 352$ )" свелось к решению 1044 линейных спектральных задач вместо  $2^{351} \sim 10^{35}$  таких задач, при попытке применить метод ППВ.

Значения первых трех собственных чисел при  $k_1 = 3.95$ ,  $k_2 = 4$  приведены в таблице 5 и при  $k_1 = 3.98$ ,  $k_2 = 4$  в таблице 6.

Таблица 5.

$m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Алгоритм
8	5.186	5.645	12.237	ППВ
16	5.007	5.122	9.965	ЛПВ
32	4.962	5.003	9.527	ЛПВ
64	4.951	4.988	9.417	ЛШВ
128	4.950	4.978	9.392	ЛПВ
256	4.949	4.977	9.386	ЛПВ

Таблица 6.

$m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Алгоритм
8	5.212	5.675	12.244	ППВ
16	5.033	5.150	9.971	ЛШВ
32	4.989	5.031	9.533	ЛПВ
64	4.979	5.003	9.412	ЛПВ
128	4.978	4.994	9.397	ЛПВ
256	4.977	4.986	9.390	ЛШВ

На основании этих таблиц заключаем, что при  $\tilde{k}_1 \rightarrow 4$ ,  $\tilde{k}_2 = 4$  собственные числа приближаются к значениям

$$\lambda_{(1)} = 4.99935(4.99878),$$

$$\lambda_{(2)} = 4.98958(4.98051),$$

$$\lambda_{(3)} = 9.39188(9.34639).$$

полученным по формуле (2.11) при  $\tilde{k} = 4$ , а это подтверждает достоверность вычислений, выполняемых с использованием алгоритма "ППВ+ЛПВ".

## Литература

1. Михайловский Е.И. Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. 516 с.
2. Власов В.З. Избранные труды. М.: АН СССР, 1962. Т.1. 528 с.
3. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
4. Михайловский Е.И., Тулубенская Е.В. Алгоритм локального перебора вариантов в задаче об устойчивости круглой пластины на границе винклеровских сред // *Механика и процессы управления: Тр. XXXVII Уральского семинара, посвященного 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра "КБ им. академика В.П. Макеева"*. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 109–116.
5. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.

**Summary**

**Mikhailovskii E.I., Tulubenskaya E.V.** The account of the transverse strain in the problem about stability of the cylindrical cover in the conditions constructive nonlinearity.

In work is considered the problem about stability of longitudinal compressed simply supported the cylindrical cover located at the border of two Winkler's ambiences. The specified theory of Margera-Timoshenko type is used. The problem is solved by the means of the combined algorithm variant search.

*Сыктывкарский университет*

*Поступила 16.02.09*