Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.9. 2009

УДК 512.6, 517.987

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ПЛОТНОСТЯМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИРСОНА

В.П. Одинец

В книге Э. Беккенбаха и Р. Беллмана ([1], с. 237) приводится неравенств, связывающее функцию $U \in L^p([0,+\infty)), p \geqslant 1$ и ее производится U' и U'':

$$\left(\max_{t\geqslant 0}|U'|\right)^2 \leqslant 8\left(\max_{t\geqslant 0}|U|\right)\cdot\left(\max_{t\geqslant 0}|U''|\right). \tag{1}$$

При этом, если $U' \in L^r([0,+\infty)), r \geqslant 1$, то $U'' \in L^m([0,+\infty))$ для $m \geqslant \max(p,r)$. ([1], с. 233, Теорема 2).

С другой стороны, для любого многочлена $h(t)$ степени $n \geqslant 2$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно показать (см. например, [2]), что для достаточно больших t справедливо неравенство

$$h''(t)\cdot h(t) < (h'(t))^2. \tag{2}$$

Целью настоящей работы является распространение этого результата на широкий класс функций, включающий плотности распределения Пирсона.

Теорема 1. *Пусть f – вещественная фукция, дважды дифференцируемая на интервале $D=(a,b)$ (мы не исключаем случаев, когда $a=-\infty$ или $b=+\infty$), пусь также множество $M\subset D$, на котором $f'=0$, не болеее, чем счетно и не имеет точек сгущения, кроме, может быть, $\pm\infty$. Тогда, если на $D\setminus M$ справедливо*

$$0 < \left(\frac{f}{f'}\right)' < 1, \tag{3}$$

то на $D\setminus M$ имеет место неравенство

$$f''(t)f(t) < (f'(t))^2. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $H : D \setminus M \to \mathbb{R}$, определяемую формулой

$$H(t) = -\left(\frac{f(t)}{f'(t)}\right) + t. \tag{5}$$

Очевидно, что $H'(t) = \frac{f''(t)f(t)}{(f'(t))^2}$ для $\forall t \in D \setminus M$. С другой стороны, учитывая условие (3), имеем $H'(t) = -\left(\frac{f(t)}{(f'(t))}\right)' + 1 < 1$, откуда получаем искомое неравенство (4). ■

Переходя к изучению плотностей распределений К.Пирсона, напомним, что распределениями Пирсона называются непрерывные распределения, плотности вероятности которых являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{a_1 t + a_0}{b_0 + 2b_1 t + b_2 t^2} f(t), \tag{6}$$

где a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 - параметры распределения.

Известно, (см, например, [3], с. 124-125), что частными случаями распределения Пирсона являются гамма- и бета-распределения, распределение Стьюдента, нормальное и показательное распределения.

Теорема 2. *Пусть дано дифференциальное уравнение (6),* $a_1 \neq 0$. *Пусть* M_1 *– множество вещественных корней уравнения* $b_0 + 2b_1 t + b_2 t^2 = 0$, $M_2 = \{-\frac{a_0}{a_1}\}$.

Пусть

$$D_1 = \{t \in \mathbb{R} : a_1(a_1 - b_2)t^2 + 2a_0(a_1 - b_2)t + (a_0^2 - 2a_0 b_1 + a_1 b_0) > 0\}, \tag{7}$$

$$D_2 = \{t \in \mathbb{R} : a_1 b_2 t^2 + 2a_0 b_2 t + (2a_0 b_2 - a_1 b_0) > 0\}, \tag{8}$$

тогда для плотностей распределений Пирсона, являющихся решениями уравнения (6), на $(D_1 \cap D_2) \setminus (M_1 \cup M_2)$ *выполняется неравенство (4).*

Доказательство. В силу (6) условия (3) равносильно

$$0 < \left(\frac{b_0 + 2b_1 t + b_2 t^2}{a_1 t + a_0}\right)' < 1,$$

где $t \notin M_1 \cup M_2$,, что, в свою очередь, как непосредственно проверяется, равносильно условию $t \in (D_1 \cap D_2) \setminus (M_1 \cup M_2)$, а тогда утверждение теоремы 2 следует непосредственно из теоремы 1. ■

Пример 1. Пусть $b_0 = -1, a_1 = 1, a_0 = b_1 = b_2 = 0$. Тогда плотность распределения Пирсона совпадает с плотностью стандартного нормального распределения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Так как $D_1 = \{t \in \mathbb{R} : t^2 - 1 > 0\}, D_2 = \{t \in \mathbb{R} : t^2 + 1 > 0\}$, то неравенство $f''(t)f(t) < (f'(t))^2$ справедливо при $|t| > 1$.

Разумеется, результат примера 1 может быть получен и непосредственно, без использования теоремы 2.

Замечание 1. Известно, ([3], с. 123), что коэффициенты b_0, b_1, b_2, $a_0 (a_1 = 1)$ явно выражаются через первые четыре центральных момента. Поэтому при сглаживании распределений эмпирических данных по этим моментам можно получить оценки вышеназванных четырех параметров и, значит, определить область $(D_1 \cap D_2) \setminus (M_1 \cup M_2)$.

Литература

1. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М: Мир. 1969.

2. **Odyniec W.** Supplement// *Dydaktyka Matematyki. №2 (2001). Wroclaw. AE. 2002. P. 17-18.*

3. **Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход И.В., Турбин А.Ф.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наукова Думка. 1978.

Summary

Odyniec W.P. One differential inequality and its application to the Pearson's distribution densities

We prove that for some large set of functions including the densities of Pearson distributions the condition $0 < (f/f')' < 1$ is sufficient for differential inequality $f''(t)f(t) < (f'(t))^2$ (Theorem 1). The application of Theorem 1 to the densities of Rearson distributions is given.

Российский государственный
педагогический университет им. Герцена

Поступила 22.01.2009