*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.9. 2009*

УДК 517.98+517.11

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ю.Н. Ловягин, Е.В. Праздникова

В рамках теоретико-модельного подхода к понятию комплексного гиперрационального числа вводятся основные элементарные функции. Приводятся их основные свойства.

1. Введение

Теория гиперрациональных чисел систематически изложена в [1, 2]. Эти числа являются средством для моделирования вещественных чисел, сходным, в некотором смысле, с конструктивным подходом. В первой из указанных работ реализуется аксиоматический подход к понятию гиперрационального числа на основе аксиоматики для натуральных чисел (формализованной теории чисел) путем расширения ее посредством добавления нового константного символа и бесконечного списка аксиом до гиперарифметики, содержащей бесконечно большие натуральные числа. Во второй работе к тем же вопросам предлагается теоретико-модельный подход.

В настоящей заметке мы продолжаем начатые исследования в рамках теоретико-модельного подхода. Вводим поле комплексных гиперрациональных чисел, призванное моделировать в рамках аксиоматики гиперарифметики комплексные числа.

Напомним аксиоматическую теорию чисел. Пусть $\mathcal{L}$ — формализованный язык исчисления предикатов, сигнатура которого содержит константный символ 0, бинарные функциональные символы $+$ и $\cdot$, унарный функциональный символ $'$ и двухместный предикатный символ $=$.

Специальные аксиомы формализованной теории чисел, которую мы обозначаем $\mathbb{A}$ содержат аксиомы равенства, согласования с равенством для функциональных символов, а также собственные аксиомы, восходящие к Пеано (см. [1, 2] и ссылки там).

Теория $\mathbb{HA}$, называемая гиперарифметикой, получается из $\mathbb{A}$ добавлением нового константного символа Ω и списка аксиом

$$0 < \Omega$$

$$1 < \Omega$$

$$\dots$$

$$n < \Omega$$

$$\dots,$$

где $a < b$ означает $\exists c\,(a + c = b \& \neg\,(a = b))$.

В рамках аксиоматической теории множеств (например теории Цермело-Френкеля) можно построить модель теории $\mathbb{A}$ и теории $\mathbb{HA}$. Теория моделей систематически изложена в книге [4]. Там же рассматриваются некоторые системы аксиом для теории множеств, включая теорию Цермело-Френкеля.

Моделью для арифметики может служить множество всех конечных ординалов. Эта модель (и все изоморфные ей) называется стандартной моделью теории чисел. Модели гиперарифметики называются нестандартными моделями арифметики. Согласно теореме компактности, так как каждая конечная подтеория гиперарифметики имеет модель, в которой Ω интерпретируется как наибольшее натуральное число, являющееся номером добавляемой аксиомы, нестандартные модели существуют.

Стандартную модель арифметики принято обозначать $\mathbb{N}$. Ее элементы называются натуральными числами. Элементы нестандартной модели, обозначаемой $\mathfrak{N}$, принято называть гипернатуральными числами.

2. Комплексные гиперрациональные числа

Рассмотрим множество $\mathcal{Q} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$.

Определение 2.1. Для $A =< x, y, z >, B =< u, v, w >$ положим $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $xw + vz + x + v = uz + yw + u + y$.

Имеет место теорема

Теорема 2.1. Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathcal{Q}$.

Определение 2.2. Для $A =< x, y, z >, B =< u, v, w >$ положим

$$A + B =< xw + uz + x + u, yw + vz + y + v, zw + z + w >,$$

$$A \cdot B =< xu + yv, yu + xv, zw + z + x > .$$

Справедлива теорема

Теорема 2.2. Если $A \sim B$ и $A_1 \sim B_1$, то $A+A_1 \sim B+B_1$ и $A \cdot A_1 \sim B \cdot B_1$.

Суммируя вышеприведенные факты, получаем, что имеет место

Теорема 2.3. Множество $\mathbb{H}\mathcal{Q} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} / \sim$ является полем.

Доказательство этого утверждение приведено в [1].

Определение 2.3. Элементы множества $\mathbb{H}\mathcal{Q}$ называют гиперрациональными числами.

Определение 2.4. Гиперрациональное число p назовем положительным, если $p \sim< x, y, z >$ и $x \geq y$. Обозначаем $p \geq 0$. Положим $p \geq q$, если $p - q \geq 0$.

В [1] доказана

Теорема 2.4. Поле $\mathbb{H}\mathcal{Q}$ является упорядоченным.

Определение 2.5. Положим $\mathfrak{C} = \mathbb{H}\mathcal{Q} \times \mathbb{H}\mathcal{Q}$.

Для $u =< p, q >, v =< s, t >\in \mathfrak{C}$ определим операции сложения и умножения правилом

$$u + v =< p + s, q + t >,$$

$$u \cdot v =< p \cdot s - q \cdot t, p \cdot t + q \cdot s > .$$

Стандартными методами проверяется

Теорема 2.5. Множество $\mathfrak{C}$ является полем, в котором уравнение $u^2 + 1 = 0$ имеет два решения.

Определение 2.6. Элементы множества $\mathfrak{C}$ назовем комплексными гиперрациональными числами.

Определение 2.7. Обозначим $\imath =< 0, 1 >$. Число $\imath$ назовем мнимой единицей.

Очевидно, что $\pm\imath$ являются корнями уравнения $u^2 + 1 = 0$ и всякое комплексное гиперрациональное число $u =< p, q >$ представимо в виде $u = p + q\imath$.

Определение 2.8. Числа p и q в представлении комплексного гиперрационального числа в виде $p + q\imath$ назовем гиперрациональной и мнимой частью соответственно.

3. Формализованное понятие бесконечной близости

Рассмотрим формализованный язык исчисления предикатов $\mathcal{L}$, константами которого являются комплексные гиперрациональные числа, функциональные символы — знаки для операций сложения и умножения, предикатные символы — знаки для равенства и отношения порядка.

В языке $\mathcal{L}$ рассмотрим теории полей F и упорядоченных полей OF. Моделью теории упорядоченных полей является поле гиперрациональных чисел. Поле $\mathfrak{C}$ является моделью теории полей (но не упорядоченных полей).

В каждом из этих полей можно выделить подмодель, являющуюся моделью гиперарифметики. При этом унарный функциональный символ $'$ интерпретируется как прибавление единицы.

Определение 3.1. Рассмотрим формализованный язык $\mathcal{L}^*$, получающийся добавлением к языку $\mathcal{L}$ одноместного предикатного символа N.

К аксиомам гиперарифметики добавим следующие аксиомы:

1. $\forall x \forall y \left(N\left(x\right) \& N\left(y\right) \supset N\left(x+y\right)\right)$
2. $\forall x \forall y \left(N\left(x\right) \& N\left(y\right) \supset N\left(x \cdot y\right)\right)$
3. $\forall x \left(N\left(x\right) \supset N\left(x'\right)\right)$
4. $\forall x \left(N\left(x\right) \supset x < \Omega\right)$

Соответствующую теорию в языке $\mathcal{L}^*$ назовем расширенной гиперарифметикой.

Построение нестандартной модели арифметики возможно с помощью понятия ультрастепени (см., например [3, 4]). При этом исходная стандартная модель оказывается элементарной подмоделью своей ультрастепени. Множество всех натуральных чисел поэтому является подмножеством множества всех гипернатуральных чисел. В [3] доказана теорема

Теорема 3.1. Интерпретируем предикатный символ N следующим образом

$$\mathfrak{N} \models N\left(x\right) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x \in \mathbb{N},$$

получаем, что $\mathfrak{N}$ является моделью расширенной гиперарифметики.

Определение 3.2. В языке $\mathcal{L}^*$ введем некоторые понятия, которые можно добавить к языку $\mathcal{L}^*$ в качестве одноместных предикатных символов.

1. Гиперрациональное число n назовем натуральным, если
$$\mathbb{H}\mathcal{Q} \models N(n),$$
2. Гиперрациональное число r назовем рациональным, если
$$\mathbb{H}\mathcal{Q} \models \exists x \exists y \exists z \left(N(x) \& N(y) \& N(z) \& r =< x, y, z >\right),$$
3. Гиперрациональное число c назовем гиперцелым, если
$$\mathbb{H}\mathcal{Q} \models \exists x \exists y \left(c =< x, y, 0 >\right),$$
4. Гиперрациональное число c назовем целым, если
$$\mathbb{H}\mathcal{Q} \models \exists x \exists y \left(N(x) \& N(y) \& c =< x, y, 0 >\right),$$
5. Гиперрациональное число p назовем конечным, если
$$\mathbb{H}\mathcal{Q} \models \exists x \left(N(x) \& |p| \leq x\right),$$
6. Гиперрациональное число P назовем бесконечно большим, если оно не является конечным,
7. Гиперрациональное число ε назовем бесконечно малым, если
$$\mathbb{H}\mathcal{Q} \models \forall x \left(N(x) \& \neg (x = 0) \supset |x| < \frac{1}{x}\right).$$

Рассмотрим теперь теорию в языке $\mathcal{L}^*$, получающуюся добавлением к теории упорядоченных полей предикатных символов, соответствующих введенным понятиям и аксиом, описывающих их свойства. Полученную теорию назовем расширенной теорией гиперрациональных чисел.

Теорией гиперрациональных чисел назовем множество всех утверждений, истинных в модели $\mathbb{H}\mathcal{Q}$.

Определение 3.3. Для гиперрациональных чисел p и q обозначим $p \approx q$, если $p - q$ является бесконечно малым. Такие числа будем называть бесконечно близкими.

Ясно, что введенное отношение определяет в расширенной теории гиперрациональных чисел двухместный предикатный символ с описываемыми ниже свойствами.

Теорема 3.2. Отношение бесконечной близости является отношением эквивалентности на множестве всех гиперрациональных чисел, согласованным с алгебраическими операциями.

Доказательство этого утверждения имеется в [1–3]. Там же можно найти основные свойства конечных и бесконечно больших чисел, которые являются аналогами свойств соответствующих последовательностей рациональных чисел.

Следующее утверждение доказано в [2]

Теорема 3.3. Для любого конечного гиперрационального числа p существует конечное гиперрациональное число q такое, что $q^2 \approx p$.

Доказательство этого и многих других фактов опирается на утверждение (см. [3]).

Теорема 3.4. Пусть p_n для каждого гипернатурального n является конечным гиперрациональным числом. Пусть, далее, $\forall n\, (p_{n+1} \geq p_n)$. Тогда если существует натуральное число l такое, что $\forall n\, (p_n \leq l)$, то для всех бесконечно больших гипернатуральных n и m $p_n \approx p_m$.

Важным средством для теории гиперрациональных чисел является принцип переноса:

Пусть φ — некоторое свойство рациональных (целых, натуральных) чисел, описываемое формулой в языке $\mathcal{L}$ и φ^* — свойство, получающееся заменой всех констант в φ соответствующими им константами языка $\mathcal{L}^*$. Тогда истинность φ во множестве рациональных (целых, натуральных) чисел равносильно истинности свойства φ^* во множестве гиперрациональных (гиперцелых, гипернатуральных) чисел.

Неформально, принцип переноса гарантирует, что все то, что доказуемо средствами теории рациональных чисел, доказуемо и в теории гиперрациональных чисел. Однако, речь идет только о свойствах, выразимых в языке $\mathcal{L}$. Те свойства, которые используют предикатные символы языка $\mathcal{L}^*$ не могут быть формализованы в языке L, и поэтому с ними следует "обращаться с осторожностью". К ним принцип переноса неприменим. Такие свойства, и множества, описываемые этими свойствами, называются внешними, в противовес внутренним, выразимым в языке $\mathcal{L}$. Аналогичный принцип действует и для комплексных гиперрациональных чисел.

Определение 3.4. Комплексное гиперрациональное число $w = p + \imath q$ назовем

– конечным, если p и q конечны

– бесконечно малым, если p и q бесконечно малы

– бесконечно большим, если p или q является бесконечно большим

4. Две основные константы анализа

Для каждого гипернатурального n рассмотрим число $p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Известно, что в стандартной модели истинны утверждения

$$\forall n\,(p_{n+1} \geq p_n)$$

$$\forall n\,(0 \leq p_n \leq 3)\,.$$

Согласно принципу переноса эти же утверждения истинны и для гиперрациональных чисел. Таким образом, согласно теореме 3.4 для всех бесконечно больших натуральных чисел n и m имеет место $p_n \approx p_m$.

Определение 4.1. Для каждого гиперрационального числа p определим множество $\mu(p) = \{q \in \mathbb{HQ} \;:\; q \approx p\}$ всех гиперрациональных чисел бесконечно близких к p. Сие множество назовем монадой числа p.

В общем случае монадой μ назовем множество вида $\mu = \mu(p)$ для некоторого гиперрационального p.

Таким образом, вышеприведенные рассуждения показывают, что числа вида $p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при бесконечно больших номерах "концентрируются"в некоторой монаде.

Определение 4.2. Любое гиперрациональное число $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при бесконечно большом n назовем "числом e".

Таким образом, мы определили "число е"как конечное гиперрациональное число сколь угодно точно. Иными словами, любое число из общей монады чисел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ с бесконечно большими номерами является сколь угодно точным приближением с данному числу, хотя само число не может быть рациональным.

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда, как и в случае извлечения корня, рационального числа в некоторой монаде нет. Это показывает, что монады конечных гиперрациональных чисел, не содержащие чисел рациональных, дают нам возможность моделировать вещественные числа.

В [2]) доказано, что из каждого конечного положительного гиперрационального числа p можно извлечь "квадратный корень", то есть существует конечное гиперрациональное положительное число q такое, что $q^2 \approx p$.

Точно так же, используя теорему 3.4, можно ввести и "число пи"как любое число из монады конечных гиперрациональных чисел p_n с бесконечно большими номерами, где числа p_n строятся следующим образом.

Сначала доказывается, что числа (n — натуральное) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ образуют возрастающую и ограниченную последовательность рациональных чисел. Затем, используя существование квадратного корня определяем число π как "квадратный корень"из числа $6\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ при любом бесконечно большом n.

5. Непрерывность и дифференцируемость

Определение 5.1. Два комплексных гиперрациональных числа u и vбудем называть бесконечно близкими и писать $u \approx v$, если соответствующим свойством обладают их гиперрациональная и мнимая части.

Ясно, что бесконечная близость к нулю равносильна бесконечной малости комплексного гиперрационального числа.

Определение 5.2. Монадой $\mu(z)$ комплексного гиперрационального числа z назовем множество всех комплексных гиперрациональных чисел, бесконечно близких к z.

Абстрактно монадой называем множество комплексных гиперрациональных чисел, бесконечно близких друг другу.

Определение 5.3. Модулем конечного комплексного гиперрационального числа $z = p + q\imath$ назовем (конечное гиперрациональное) число $\sqrt{p^2+q^2}$.

Очевидно, что для конечного комплексного гиперрационального числа бесконечная малость равносильна бесконечной малости модуля.

Определение 5.4. Будем рассматривать функции, заданные на подмножествах $\mathfrak{C}$ и принимающие комплексные гиперрациональные значения. Функцию f назовем внутренней, если существует формула φ в языке $\mathcal{L}$ такая, что

$$\forall x \left(\exists y \varphi\left(x, y\right) \supset \left(\exists z \varphi\left(x, z\right) \supset z = y\right)\right).$$

Определение 5.5. Функцию f назовем непрерывной на множестве $E \subset \mathfrak{C}$, если

$$\forall x \forall y \left(x \in E \& y \in E \& x \approx y \supset f\left(x\right) \approx f\left(y\right)\right).$$

Отметим, что непрерывность означает, что образ любой монады является монадой.

Легко доказывается следующее утверждение

Теорема 5.1. Арифметические операции не выводят из класса непрерывных на множестве E функций при условии отсутствия деления на ноль.

Теорема 5.2. Пусть f — функция, непрерывная на множестве E, а g — функция, непрерывная на множестве $f\left(E\right)$.

Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна на E.

Доказательство.

Для $x, y \in E$ если $x \approx y$, то в силу непрерывности f $f\left(x\right) \approx f\left(y\right)$. Тогда, так как g непрерывна, $g\left(f\left(x\right)\right) \approx g\left(f\left(y\right)\right)$, что и требовалось.

Определение 5.6. Пусть функция f задана по крайней мере в некоторой монаде μ. Будем говорить, что f — дифференцируема в μ, если

$$\forall \forall x \forall y \left(x \in \mu \& y \in \mu \supset f\left(x\right) - f\left(y\right) \approx A \cdot \left(x - y\right) + \alpha\left(x - y\right) \cdot \left(x - y\right)\right),$$

где A — конечное комплексное гиперрациональное число, $\alpha\left(x - y\right) \approx 0$.

Легко понять, что функция, дифференцируемая в некоторой монаде, является непрерывной в ней.

Ясно, что если функция f дифференцируема в некоторой монаде, то существует конечное комплексное гиперрациональное число A такое, что для всех $x, y \in \mu$ $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \approx A$. При этом в качестве такового числа взять любое число из монады числа A. Таким образом, для дифференцируемой в монаде функции определена некоторая монада "дифференциального отношения". В связи с этим введем следующие понятия

Определение 5.7. Монаду $\mu\left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)$ назовем производной функции f в монаде μ и обозначим $\frac{df}{d\mu}$.

Определение 5.8. Если z — некоторая точка области определения функции f, то будем говорить, что функция f дифференцируема в точке z, если для всех точек x и y области определения функции f из $x \approx y \approx z$ следует $f(x) - f(y) \approx A \cdot (x - y) + \alpha(x - y) \cdot (x - y)$, где A — конечное комплексное гиперрациональное число, $\alpha(x - y) \approx 0$.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке z, то она дифференцируема в каждой точке монады $\mu(z)$. При этом если функция определена на всей монаде, то функция оказывается дифференцируемой во всей монаде.

Далее, если функция дифференцируема в точке z, то определена некоторая монада точек бесконечно близких к "дифференциальному отношению".

Определение 5.9. Если функция дифференцируема в точке z, то производной функции f в монаде $\mu(z)$ назовем монаду $\mu\left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)$, которую будем обозначать $\frac{df}{d\mu(x)}$.

Произвольный элемент $\frac{df}{d\mu(z)}$ назовем производной функции f в точке z и будем обозначать $f'(z)$.

Определение 5.10. Пусть функция f определена по крайней мере на множестве E. Будем говорить, что функция f дифференцируема на множестве E, если она дифференцируема в каждой точке множества E.

Несложно доказывается

Теорема 5.3. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке z. Тогда в точке z дифференцируемы функции $f + g$, $f \cdot g$ дифференцируемы в этой точке, при этом если $\neg(g'(z) \approx 0)$, то в точке z дифференцируемо и отношение $\frac{f}{g}$.

При справедливости условий теоремы имеют место соотношения:

$$(f+g)'(z) \approx f'(z) + g'(z),$$

$$(f \cdot g)'(z) \approx f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) \approx \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}.$$

Теорема 5.4. Пусть функция f дифференцируема в точке z, а функция g дифференцируема в точке $f(z)$. Предположим, что по крайней мере в монаде $\mu(z)$ определена композиция $g \circ f$.

Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке z и $g \circ f'(z) \approx g'(f(z)) \cdot f'(z)$.

6. Аналитические функции

В этом параграфе мы введем основные элементарные функции. Интерес к таким функциям основан на важности их для приложений и, как следствие, для вычислений.

Определение 6.1. Многочленом назовем функцию, определенную правилом $P : P(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k z^k$, где N — произвольное гипернатуральное (возможно бесконечно большое, число.

Определение 6.2. Многочлен P назовем элементарным, если для всех конечных комплексных гиперрациональных z $P(z)$ является конечным.

Теорема 6.1. Пусть P — элементарный многочлен. Тогда функция P дифференцируема в каждой конечной комплексной гиперрациональной точке.

Доказательство.

Пусть для конечного комплексного гиперрационального z $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k z^k$. Тогда при $u \approx v$ имеем

$$P(u) - P(v) = \sum_{k=0}^{N} \left(c_k u^k - c_k v^k\right) =$$

$$= (u - v) \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{j=1}^{k-1} u^j v^{k-1-j}.$$

Так как все значения P конечны при конечных u и v число $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k \sum\limits_{j=1}^{k-1} u^j v^{k-1-j}$ является конечным. Так как $u - v \approx 0$ по предположению, отсюда следует дифференцируемость P.

Отметим, что доказанная теорема дает рецепт вычисления производной аналитического многочлена. Точнее имеем $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \sum\limits_{s=0}^{j-1-s} u^s v^{j-1-s} \approx$

$\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \sum\limits_{s=0}^{j-1-s} u^s u^{j-1-s} \approx$

$\approx \sum\limits_{j=1}^{n} c_j j u^{j-1}$ в силу конечности суммы (как гиперрационального числа) и того, что $u \approx v$.

Таким образом, производная элементарного многочлена является элементарным многочленом на единицу меньшей степени.

Определение 6.3. Функцию f назовем аналитической на множестве E конечных комплексных гиперрациональных чисел, если существует элементарный многочлен P такой, что

1. Для любого конечного комплексного гиперрационального числа z и любых бесконечно больших гипернатуральных m и n таких, что $n > m$ справедливо $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} c_k z^k\right| \approx 0$.
2. Для всех $z \in E$ $f(z) \approx P(z)$.

В качестве следствия к вышеприведенным результатам получается

Теорема 6.2. Всякая аналитическая на множестве E функция является дифференцируемой в любой точке z множества E, причем производная аналитической функции является аналитической функцией.

Неформально, аналитическая функция — это такая функция, которая представляется степенным рядом, удовлетворяющим критерию Коши. Это и является ключом к определению основных элементарных функций.

Определение 6.4. Для каждого конечного комплексного гиперрационального z положим (N — бесконечное натуральное число):

$$\exp(z) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin(z) \approx \frac{\exp(\imath z) - \exp(-\imath z)}{2\imath},$$

$$\cos(z) \approx \frac{\exp(\imath z) + \exp(-\imath z)}{2},$$

$$\tan(z) \approx \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

Для обоснования существования введенных функций, которые мы будем называть их естественными терминами (экспонента, синус, косинус, тангенс) достаточно проверить, что многочлен $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}$ является аналитическим. Последнее проводится элементарными методами.

Теперь с идейной точки зрения не представляет трудности доказать все основные свойства элементарных функций.

Литература

1. **Праздникова Е. В.** Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел// *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Вып. 7. 2007. С. 41 – 66.*

2. **Ловягин Ю. Н.** Гиперрациональные числа как основа математического анализа// *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Вып. 7. 2007. С. 17 – 34.*

3. **Ловягин Ю. Н.** Исчисление бесконечно малых Г. В. Лейбница в современном изложении, или введение в нестандартный анализ А. Робинсона. Сыктывкар: Изд–во Сыкт. лесного ин–та. 2001. 163 с.

4. **Кейслер Х. Дж., Чэн Ч. Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.

Summary

Lovyagin Yu.N., Prazdnikova E.Wl. Elementar functions on the set of complex hyperrational numbers

The basic elementary functions are entered within the limits of the model-theoretic approach to the concept of complex hyperrational numbers. Their basic properties are resulted.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила 02.02.2009