

УДК 519.6

## АНАЛИЗ КАСКАДНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ<sup>1</sup>

*Н.П. Ельцов<sup>2</sup>, В.А. Огородников<sup>3</sup>, С.М. Пригарин<sup>3</sup>*

Каскадные модели случайных процессов и полей широко используются для математического моделирования разнообразных объектов и явлений. В работе исследуются свойства ограниченных каскадных моделей на плоскости, их одномерные распределения и корреляционная структура. Полученные результаты позволяют оценивать целесообразность применения каскадных моделей при решении различных прикладных задач.

*Ключевые слова: математическое моделирование, случайные процессы и поля, каскадные модели.*

### 1. Введение

Каскадные модели первоначально были предложены для описания турбулентности, но впоследствии они нашли применение для представления широкого класса самых разнообразных процессов и явлений, обладающих фрактальной природой: пространственное распределение осадков, распространение лесных пожаров, изменение цен акций, организация нейронных сетей, сетевой трафик и т.д. (см., например, [1,2] и имеющиеся там ссылки). В данной работе мы исследуем ограниченные каскадные модели на плоскости, которые, в частности, активно используются американскими специалистами для моделирования пространственной неоднородности облачных сред [3-10]. В п.1 даётся описание

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (05-1000008-8024), РФФИ (06-05-64484а) и президентской программы "Ведущие научные школы"(НШ-4774.2006.1.).

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

<sup>3</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский госуниверситет

конструктивного алгоритма построения каскадных моделей, в п.2 рассматриваются одномерные распределения, а в п.3 изучается корреляционная структура каскадов разного уровня. Получены новые результаты, которые позволяют проводить предварительный анализ адекватности описания тех или иных объектов и процессов с помощью каскадных моделей.

## 2. Каскадная модель и ее свойства

Сначала мы представим алгоритм построения каскадной модели на плоскости (см., например, [1,3]). Речь идет о последовательности случайных полей  $\xi_n(x, y)$  на квадрате  $[0, L) \times [0, L)$ , которые мы будем называть *каскадами* уровня  $n$ . Каскад уровня  $n$  определяется на разбиении множества  $[0, L) \times [0, L)$ , состоящем из  $4^n$  квадратов

$$A_{ij}^{(n)} = [i 2^{-n} L, (i+1) 2^{-n} L) \times [j 2^{-n} L, (j+1) 2^{-n} L), \quad (1)$$

$$i, j = 0, \dots, 2^{-n} - 1,$$

со стороной  $(2^{-n} L)$ . Каскад  $\xi_n(x, y)$  на квадрате  $A_{ij}^{(n)}$  принимает некоторое случайное значение  $\xi_{ij}^{(n)}$ . Значения  $\xi_{ij}^{(n)}$  определяются согласно рекуррентной процедуре:

$$\xi_{00}^{(0)} = m_0; \quad \xi_{2i+m, 2j+k}^{(n)} = \xi_{ij}^{(n-1)} W_{m,k}^n(i, j); \quad m, k \in \{0, 1\}, \quad (2)$$

Случайные веса  $W_{m,k}^n(i, j)$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{m,k=0,1} W_{m,k}^n(i, j) = 4, \quad (3)$$

т.е.  $\frac{1}{4} \sum_{m,k=0,1} \xi_{2i+m, 2j+k}^{(n)} = \xi_{ij}^{(n-1)}$  для всех  $n$  и  $i, j = 0, \dots, 2^{-n} - 1$ , и, значит,  $\frac{1}{4^n} \sum_{i,j=0}^{2^n-1} \xi_{i,j}^{(n)} = m_0$ . Рекуррентную процедуру можно интерпретировать как последовательное перераспределение некоторой массы внутри области. Первоначально масса  $m_0 L^2$  равномерно распределена по области  $[0, L) \times [0, L)$  (каскад уровня 0), затем происходит перераспределение этой массы по четырем меньшим квадратам (каскад уровня 1), затем внутри каждого из четырех квадратов происходит очередное перераспределение массы по четырем еще более мелким квадратам, в итоге масса оказывается перераспределена по 16 квадратам (каскад уровня 2), и

т.д. При такой интерпретации каскады  $\xi_n(x, y)$  являются плотностями распределения массы (см. рис. 1).

Свойства каскадной модели полностью определяются весами  $W_{m,k}^n(i, j)$ ; в качестве которых мы будем рассматривать случайные величины независимые для различных значений  $n, i, j$ . Будем считать, что для фиксированных значений  $n$  и  $i, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$  четыре значения  $W_{m,k}^n(i, j)$ :  $m, k = 0, 1$ , моделируются случайной перестановкой (т.е. выборкой без возвращений) из набора чисел

$$V_1 = 1 + a_1 b^n, V_2 = 1 + a_2 b^n, V_3 = 1 - a_1 b^n, V_4 = 1 + a_2 b^n. \quad (4)$$

Далее будем предполагать, что  $0 < b < 1$ . Это соответствует **ограниченной каскадной модели** (bounded cascade model, см. [1,3]), в отличие от сингулярной каскадной модели для которой  $b = 1$ . Таким образом, рассматриваемая каскадная модель (1-4) описывается параметрами  $m_0, a_1, a_2$  и  $b$ :

$$\xi_n(x, y) = m_0 \prod_{r=1}^n W_{m(x,y), k(x,y)}^r(i(x, y), j(x, y)) = m_0 \prod_{k=1}^n (1 \pm a_s b^k), \quad (5)$$

где значения индексов  $m, k, i, j$  определяются очевидным образом координатами  $x, y$ , а индекс  $s$  и знак (плюс или минус) выбираются случайным образом. Как утверждается в работе [3], для  $1 > b^2 > 1/2$  при больших  $n$  каскадная модель имеет степенной спектр с показателем  $(-\alpha)$  и одномерное распределение приближается логнормальным с параметрами  $c = E \ln \xi_n(x, y)$ ,  $\sigma^2 = V \ln \xi_n(x, y)$ , где символы  $E$  и  $V$  используются для обозначения математического ожидания и дисперсии, соответственно,

$$\alpha = 1 - \log_2 b^2, \quad 1 < \alpha < 2, \quad 1 > b^2 > 1/2,$$

$$E \xi_n(x, y) = m_0 \approx \exp(\sigma^2/2 + c),$$

$$V \xi_n(x, y) = \left( \prod_{k=1}^n \left[ 1 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} b^{2k} \right] - 1 \right) m_0^2 \approx \exp(\sigma^2 + 2c) [\exp(\sigma^2) - 1].$$

Более подробно корреляционные функции каскадов  $\xi_n(x, y)$  исследованы в п.3. Здесь мы лишь отметим, что случайные поля  $\xi_n(x, y)$  являются существенно анизотропными и неоднородными (см. рис.2), и утверждение о степенном спектре нужно понимать специальным образом [1,3]:

$$V \xi_n(x, y) - V \xi_{n-1}(x, y) \sim 2^{n(1-\alpha)}.$$

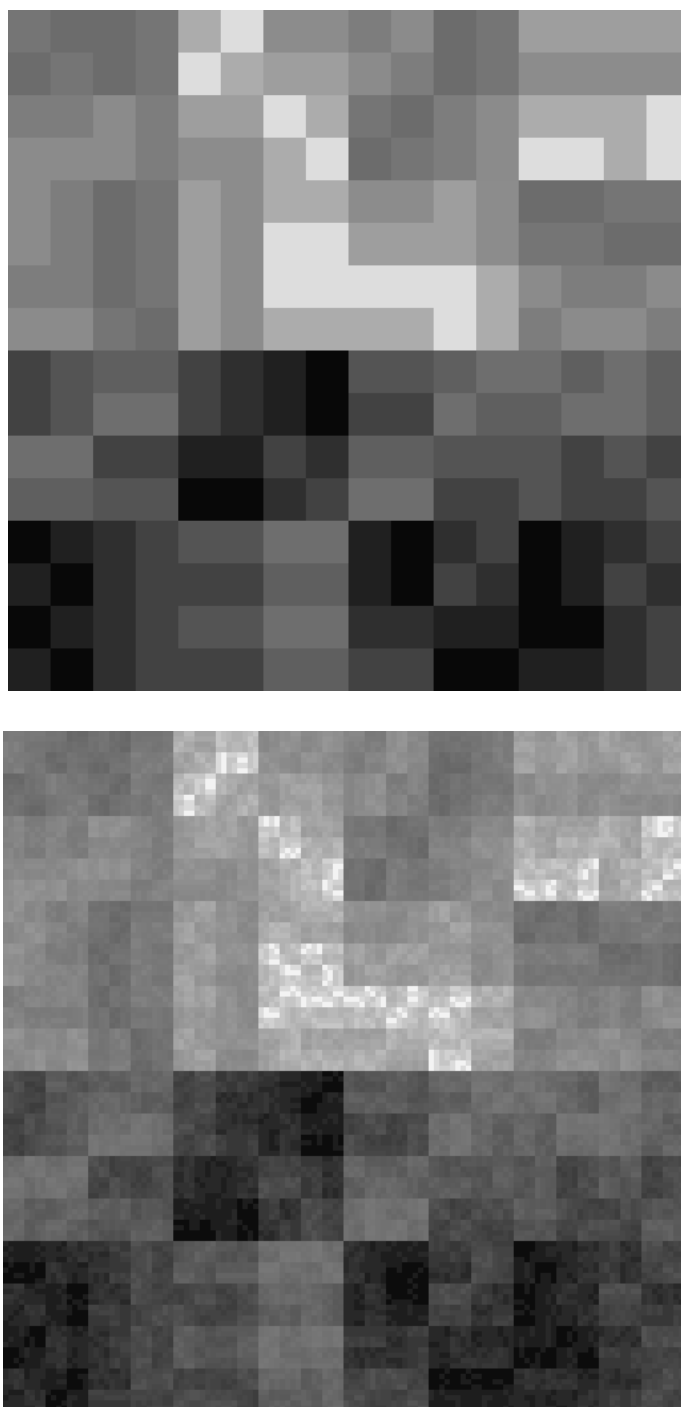


Рис. 1: Реализации каскадов четвертого (вверху) и седьмого (внизу) уровней.

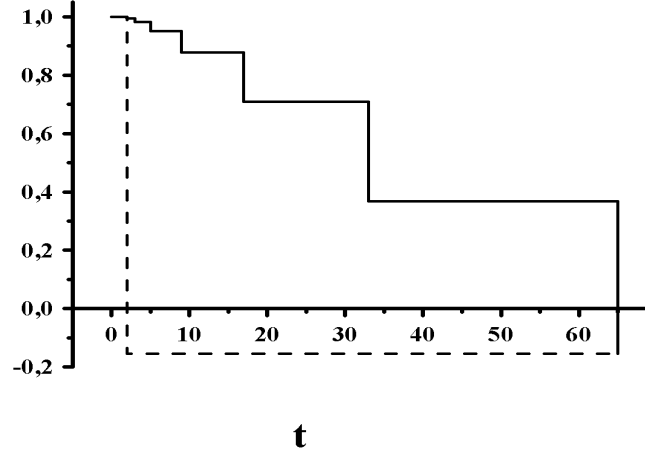


Рис. 2: Значения нормированной корреляционной функции  $K_n(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{E\xi_n^s(x_1, y_1)\xi_n^s(x_2, y_2)}{\sqrt{V\xi_n(x, y)}}$ ;  $\xi_n^s(x, y) = [\xi_n(x, y) - E\xi_n(x, y)]/\sqrt{V\xi_n(x, y)}$ ; для каскада уровня  $n = 7$  с параметрами  $a_1 = a_2 = 1.209$ ,  $b = 0.63$ ,  $m_0 = 12.909$ ,  $L = 128$ . Сплошная линия соответствует функции  $K_7(0, 0, t, 0)$ , а пунктирная линия соответствует функции  $K_7(63, 0, 63 + t, 0)$

### 3. Одномерные распределения каскадов

Что касается одномерных распределений  $\xi_n(x, y)$ , то они не зависят от значений координат  $(x, y)$ , являются дискретными и сосредоточены на множестве, состоящем из  $4^n$  чисел, а при  $a_1 = a_2$  лишь из  $2^n$  чисел (по этой причине каскадные модели с параметрами  $a_1 \neq a_2$  являются более предпочтительными). К утверждению об аппроксимации одномерных распределений каскадной модели логнормальным распределением нужно относиться весьма осторожно, так как погрешность такой аппроксимации может оказаться существенной (см. рис.3). Максимальные и минимальные значения для каскадов определяются выражениями

$$\max \{\xi_n(x, y), (x, y) \in [0, L) \times [0, L)\} = m_0 \prod_{i=1}^n (1 + ab^n), \quad (6)$$

$$\min \{\xi_n(x, y), (x, y) \in [0, L) \times [0, L)\} = m_0 \prod_{i=1}^n (1 - ab^n), \quad (7)$$

$$a = \max\{a_1, a_2\}.$$

#### 4. Корреляционная структура каскадных моделей

Как уже было отмечено во введении, область применения каскадных моделей является достаточно обширной. В этом пункте получены точные выражения для корреляционной функции ограниченной каскадной модели, знание которой представляется полезным для оценки целесообразности использования каскадных моделей при имитации различных явлений и объектов.

Сначала рассмотрим «одномерную» каскадную модель, которая строится на интервале  $[0, L)$  аналогично двумерной модели, рассмотренной в п.1. Каскад  $\xi_n(x)$ ,  $x \in [0, L)$ , уровня  $n$  является ступенчатой случайной функцией, принимающей постоянные значения  $\xi_i^{(n)}$  на интервалах  $A_i^{(n)} = [i2^{-n}L, (i+1)2^{-n}L)$ ,  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ . Каскадная модель строится последовательно по следующему алгоритму:

$$\xi_0^{(0)} = m_0, \quad \xi_{2i+m}^{(n)} = \xi_i^{(n-1)} W_m^n(i), \quad m \in \{0, 1\}. \quad (8)$$

Для фиксированных значений  $n$  и  $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$  случайные значения  $W_m^n(i)$ ,  $m = 0, 1$ , моделируются по формулам

$$W_0^n(i) = 1 + \lambda_i^n ab^n, \quad W_1^n(i) = 2 - W_0^n(i) = 1 - \lambda_i^n ab^n, \quad (9)$$

где  $\lambda_i^n$  – последовательность независимых случайных величин принимающих значения  $\{-1, +1\}$  с равной вероятностью. Таким образом, одномерная каскадная модель (8-9) описывается параметрами  $m_0$ ,  $a$  и  $b$ :

$$\xi_n(x) = m_0 \prod_{k=1}^n W_{m(x)}^k(i(x)), \quad (10)$$

где значения индексов  $m$ ,  $i$  определяются очевидным образом координатой  $x$ .

**Утверждение 1.** Для модели (8-10) корреляционная функция

$$B_n(x, y) = E[\xi_n(x) - E\xi_n(x)][\xi_n(y) - E\xi_n(y)]$$

каскада  $\xi_n(x)$ ,  $x \in [0, L)$ , уровня  $n$  с параметрами  $m_0$ ,  $a$ ,  $b$  определяется формулами:

$$B_n(x, y) = m_0^2 F_n(k(x, y)), \quad x, y \in [0, L), \quad x < y,$$

$$F_n(k) = \begin{cases} (1 - [ab^k]^2) \prod_{r=1}^{k-1} (1 + [ab^r]^2) - 1, & k \leq n \\ 1, & k > n \end{cases},$$

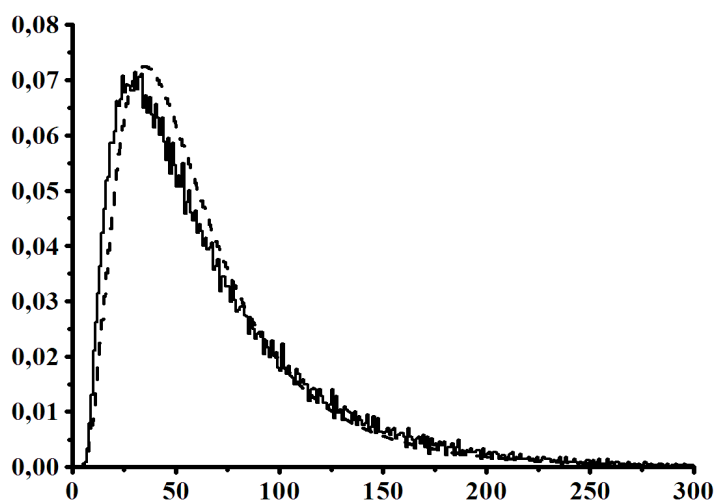
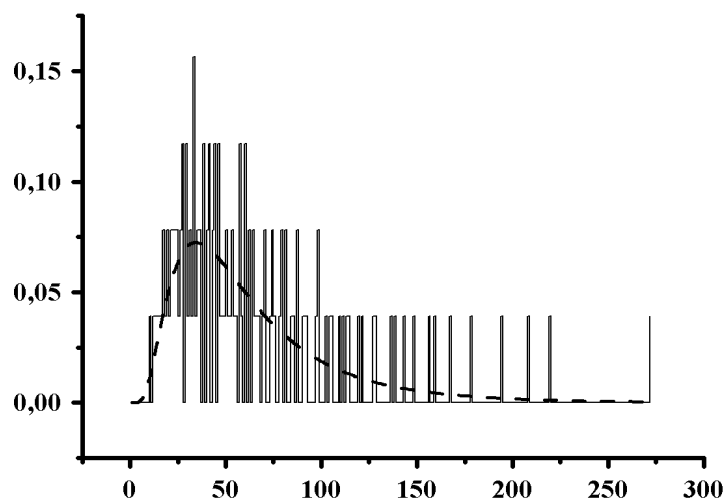


Рис. 3: Гистограммы одномерных маргинальных распределений для каскада уровня  $n = 7$  с параметрами,  $b = 0.8$ ,  $m_0 = 12.909$ ,  $a_1 = a_2 = 0.514$  (верхний рисунок) и  $a_1 = 0.355$ ,  $a_2 = 0.635$  (нижний рисунок), шаг гистограммы 0.2. Пунктирная линия соответствует плотности логнормального распределения с параметрами  $c = 2.34$ ,  $\sigma = 0.65$ .

где  $k(x, y)$  – это минимальное из целых  $k \geq 1$ , для которых найдется целое  $j$  такое, что  $x < \frac{j}{2^k}L \leq y$ .

*Доказательство.* Если точки  $x$  и  $y$  принадлежат одному интервалу  $A_j^{(n)}$ , то, очевидно, что  $B_n(x, y) = m_0^2$ .

Предположим теперь, что  $k \in \{1, \dots, n\}$  – это уровень каскадной модели, при котором точки  $x < y$  впервые оказались в соседних интервалах  $x \in A_j^{(k)}, y \in A_{j+1}^{(k)}$ ,  $j \in \{0, \dots, 2^k - 2\}$ . Тогда очевидно, что значение  $j$  должно быть четным, т.е.  $j = 2i$ ,  $\xi_k(x) = \xi_{2i}^{(k)}$ ,  $\xi_k(y) = \xi_{2i+1}^{(k)}$ ,  $A_{2i}^{(k)} \cup A_{2i+1}^{(k)} = A_i^{(k-1)}$ . В соответствии с формулой (8) имеем

$$\begin{aligned} \xi_{2i}^{(k)} &= \xi_i^{(k-1)} W_0^k(i), \quad \xi_{2i+1}^{(k)} = \xi_i^{(k-1)} W_1^k(i), \quad B_k(x, y) = E \left( \xi_{2i}^{(k)} \xi_{2i+1}^{(k)} \right) - m_0^2 = \\ &= E \left[ (\xi_i^{(k-1)})^2 W_0^k(i) W_1^k(i) \right] - m_0^2 = m_0^2 \left[ E \left( 1 - (\lambda_i^k ab^k)^2 \right) \prod_{r=1}^{k-1} (W_m^r(i))^2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Используя независимость случайных величин  $\lambda_i^n$ , окончательно получаем

$$B_k(x, y) = m_0^2 \left( \left( 1 - [ab^k]^2 \right) \prod_{r=1}^{k-1} (1 + [ab^r]^2) - 1 \right).$$

Рассмотрим теперь значения следующего каскада  $\xi_{k+1}$  в интервале  $A_i^{(k-1)}$ :

$$\xi_{4i}^{(k+1)} = \xi_{2i}^{(k)} W_0^{k+1}(2i) = \xi_{2i}^{(k)} (1 + \lambda_{2i}^{k+1} ab^{k+1}),$$

$$\xi_{4i+1}^{(k+1)} = \xi_{2i}^{(k)} W_1^{k+1}(2i) = \xi_{2i}^{(k)} (1 - \lambda_{2i}^{k+1} ab^{k+1}),$$

$$\xi_{4i+2}^{(k+1)} = \xi_{2i+1}^{(k)} W_0^{k+1}(2i+1) = \xi_{2i+1}^{(k)} (1 + \lambda_{2i+1}^{k+1} ab^{k+1}),$$

$$\xi_{4i+3}^{(k+1)} = \xi_{2i+1}^{(k)} W_1^{k+1}(2i+1) = \xi_{2i+1}^{(k)} (1 - \lambda_{2i+1}^{k+1} ab^{k+1}).$$

Случайные величины  $\lambda_{2i}^{k+1}$  и  $\lambda_{2i+1}^{k+1}$  являются независимыми,  $E \lambda_{2i}^{k+1} = E \lambda_{2i+1}^{k+1} = 0$ , следовательно,  $E \left( (1 \pm \lambda_{2i}^{k+1} ab^{k+1})(1 \pm \lambda_{2i+1}^{k+1} ab^{k+1}) \right) = 1$  и

$$E \xi_{4i}^{(k+1)} \xi_{4i+2}^{(k+1)} = E \xi_{4i}^{(k+1)} \xi_{4i+3}^{(k+1)} = E \xi_{4i+1}^{(k+1)} \xi_{4i+2}^{(k+1)} = E \xi_{4i+1}^{(k+1)} \xi_{4i+3}^{(k+1)} = E \xi_{2i}^{(k)} \xi_{2i+1}^{(k)}.$$



Это означает, что  $B_k(x, y) = B_{k+1}(x, y)$ , так как значение  $\xi_{k+1}(x)$  совпадает либо с  $\xi_{4i}^{(k+1)}$  либо с  $\xi_{4i+1}^{(k+1)}$ , а значение  $\xi_{k+1}(y)$  совпадает либо с  $\xi_{4i+2}^{(k+1)}$  либо с  $\xi_{4i+3}^{(k+1)}$ . Аналогичным образом показывается, что для любого каскада уровня  $n > k$  корреляция между значениями в точках  $x \in A_{2i}^{(k)}$  и  $y \in A_{2i+1}^{(k)}$  будет равна  $B_n(x, y) = E\xi_{2i}^{(k)}\xi_{2i+1}^{(k)} - m_0^2 = B_k(x, y)$ . Утверждение 1 доказано.

Совершенно аналогичным образом доказывается следующее утверждение о корреляционной функции каскадной модели на плоскости из п.1.

**Утверждение 2.** Для модели (1-5) корреляционная функция

$$B_n(x_1, y_1, x_2, y_2) = E[\xi_n(x_1, y_1) - E\xi_n(x_1, y_1)][\xi_n(x_2, y_2) - E\xi_n(x_2, y_2)]$$

каскада  $\xi_n(x, y)$ ,  $(x, y) \in [0, L] \times [0, L]$ , уровня  $n$  с параметрами  $m_0, a_1, a_2, b$  определяется формулами:

$$B_n(x_1, y_1, x_2, y_2) = m_0^2 F_n(k(x_1, y_1, x_2, y_2)),$$

$$F_n(k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{[a_1 b^k]^2 + [a_2 b^k]^2}{6}\right) \prod_{r=1}^{k-1} \left(1 + \frac{[a_1 b^r]^2 + [a_2 b^r]^2}{2}\right) - 1, & k \leq n \\ 1, & k > n \end{cases},$$

где  $k(x_1, y_1, x_2, y_2)$  – это минимальный уровень  $k \geq 1$  каскадной модели, при котором точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  находятся в разных квадратах:  $(x_1, y_1) \in A_{ij}^{(k)}, (x_2, y_2) \in A_{st}^{(k)}$ ;  $(s, t) \neq (i, j)$ .

**Заключительные замечания.** Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, следует критично относиться к заявлению о том, что одномерные распределения для ограниченных каскадных моделей хорошо описываются логнормальным законом. Желательно проводить более подробный численный анализ одномерного распределения и учитывать, что оно является дискретным и сосредоточено на конечном интервале, см. формулы (6-7). Автокорреляционную функцию каскадной модели можно вычислить на основе утверждений 1 и 2. Следует также учитывать, что каскадные модели на плоскости являются анизотропными и неоднородными. Таким образом, к применению каскадных моделей при решении прикладных задач следует относиться с определенной осторожностью, так как каскадные модели описывают достаточно специфический класс случайных полей

и не позволяют в значительной мере варьировать ни распределения, ни корреляционную структуру. В частности, именно по этой причине в работе [11] для моделирования стохастической структуры облачности наряду с каскадной моделью предлагается использовать более универсальный метод моделирования негауссовских полей на основе нелинейных преобразований гауссовских функций (см. [12-15]).

Авторы искренне признательны А.Л. Маршаку (NASA-GSFC, Гринбелт, США) и Т.Б. Журавлевой (ИОА СО РАН, Томск) за полезные обсуждения.

## Литература

1. **Marshak, A., Davis, A., Cahalan, R.F., and Wiscombe, W.J.** Bounded cascade models as non-stationary multifractals// *Phys. Rev. E*, 1994.
2. **Resnick, S., Samorodnitsky, G., Gilbert, A. and Willinger, W.** Wavelet analysis of conservative cascades// *Bernoulli Journal*. 2003. V. 9. №. 1. P.97-135.
3. **Cahalan, R.F., Ridgway, W., Wiscombe, W.J., Bell, T.L., and Snider, J.B.** The albedo of fractal stratocumulus clouds// *J. Atmos. Sci.* 1994. V. 51. №. 16. P. 2434-2455.
4. **Marshak, A., Davis, A., Wiscombe, W.J., and Titov, G.** The verisimilitude of the independent pixel approximation used in cloud remote sensing// *Remote Sens. Environ.* 1995. V. 52. P. 71-78.
5. **Schertzer, D., and Lovejoy, S.** Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes// *J. Geophys. Res.* V. 92. P. 9693-9714.
6. **Barker, H.W., and Davies J.A.** Cumulus cloud radiative properties and the characteristics of satellite radiance wavenumber spectra// *Remote Sens. Environ.* 1992. V. 42. P. 51-64.
7. **Cahalan, R.F.** Bounded cascade clouds: albedo and effective thickness// *Nonlinear Proc. Geophys.* 1994. №. 1. P. 156-176.
8. **Marshak, A., Davis, A., Wiscombe, W.J., and Cahalan, R.F.** Scale invariance in liquid water distribution in marine stratocumulus.

- Part I: Spectral properties and stationarity issues// *J. Atmos. Sci.* 1996. V. 53. №. 11. P. 1538-1558.
9. **Marshak, A., Davis, A., Wiscombe, W.J., and Cahalan, R.F.** Scale invariance in liquid water distribution in marine stratocumulus. Part II: Multifractal properties and intermittency issues// *J. Atmos. Sci.* 1997. V. 54. №. 11. P. 1423-1444.
  10. **Журавлева Т.Б., Маршак А.Л.** К вопросу о валидации пуассоновской модели разорванной облачности// *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2005. Т. 41. № 6. С. 783-797.
  11. **Prigarin, S.M., Gubina, N.I., and Oppel, U.G.** Numerical modelling of stochastic fields of vertical optical thickness for stratocumulus clouds In: W.L. Smith and Yu. M. Timofeyev (Eds.) *IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation.* 2001. Deepak Publishing, Hampton, Virginia. P. 257-260
  12. **Пиранашвили З.А.** Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования случайных процессов// *Вопросы исследования операций.* Тбилиси: Мецниереба. 1966. С. 53-91.
  13. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей.- Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН. 2005. 259 с.
  14. **Ogorodnikov, V.A., and Prigarin, S.M.** Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. VSP, Utrecht. 1996. 240 p.
  15. **Prigarin, S.M.** Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. VSP, Utrecht. 2001. 198 p.

### Summary

**Eltsov N.P., Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M.** Analysis of cascade models of random fields

The stochastic process with piecewise linear trajectories is considered. The process is based on models of stochastic walk on a straight line. The distributions of stochastic variables, forming this process, and, in particular, distribution of relative time expectations for Poisson flow of

points are investigated. The appropriate mathematical expressions for these distributions, and also expressions for mean of process as time-varying function are received.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН  
Новосибирский госуниверситет*

*Поступила 15.01.2009*