Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.9. 2009

УДК 519.652

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ

А.Б. Певный, М.Н. Истомина, В.В. Максименко

Для каждого (n, m) - фрейма Парсеваля в $\mathbb{R}^n$, $m > n$, определяются дополнительные фреймы Парсеваля в пространстве размерности $n' = m - n$. Путём перенормировки дополнительные фреймы можно определить для любого жёсткого фрейма.

1°. В пространстве $\mathbb{R}^n$ будем использовать обычное скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть m,n — натуральные числа, $m > n$. Напомним, что фреймом Парсеваля называется жёсткий фрейм с константой $A = 1$, т. е. система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется фреймом Парсеваля, если

$$\sum_{k=1}^{m} [\langle x, x_k\rangle]^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Через Φ обозначим матрицу со столбцами $x_1, \ldots, x_m$. Тогда хорошо известно (см. [1]), что условие (1) равносильно условию

$$\Phi\Phi^T = I_n, \tag{2}$$

где I_n - единичная матрица порядка n. Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. В силу (2)

$$\langle \gamma_i, \gamma_k\rangle = \delta_{ik},$$

где δ_{ik} - символ Кронекера. Здесь, в отличие от (1), угловые скобки $\langle\rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Дополним систему $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ строками $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m$ так, чтобы все m строк $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m\}$ образовали ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Такое дополнение, конечно, возможно. Через Φ_0 обозначим матрицу со строками $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Она является ортогональной:

$$\Phi_0\Phi_0^T = I_m. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_0^T \Phi_0 = I_m.$$

Это означает, что столбцы $X_1, \dots, X_m$ матрицы Φ_0 также образуют ортонормированную систему. Столбец X_k можно записать в виде

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad k \in 1:m, \tag{4}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — исходные векторы-столбцы, а $y_k \in \mathbb{R}^{m-n}$ — дополнительные вектор-столбцы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система $\{y_1, \dots, y_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$, при этом выполнены соотношения*

$$\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 = 1, \tag{5}$$

$$\langle x_k, x_s \rangle + \langle y_k, y_s \rangle = 0 \quad \textit{при} \quad k \neq s. \tag{6}$$

Доказательство. Через Ψ обозначим матрицу со столбцами $y_1, \dots, y_m$. Она состоит из добавленных строк $\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_m$, удовлетворяющих соотношению

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k \in n+1:m,$$

что равносильно равенству $\Psi \Psi^T = I_{m-n}$, значит, $\{y_1, \dots, y_m\}$ - фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$. Соотношения (5) и (6) вытекают из ортонормированности векторов (4).

Предложение доказано. □

Построенный фрейм $\{y_1, \dots, y_m\}$ называется *дополнительным фреймом Парсеваля.* Он обладает характерным свойством

$$\langle y_k, y_s \rangle = -\langle x_k, x_s \rangle \quad \text{при} \quad k \neq s.$$

2°. Конструкции из п. 1° можно придать другую форму. Введём матрицу размера $n \times m$

$$P = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right].$$

Умножение P на вектор $X = (x_1, \dots, x_m)^T$ приводит к отбрасыванию последних $m-n$ компонент вектора X:

$$PX = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис $\{X_1, \dots, X_m\}$ в $\mathbb{R}^m$ такой, что*

$$PX_k = x_k, \quad k \in 1:m. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Если $\{x_k\}_{k=1}^m$ — фрейм Парсеваля, то существует ортонормированная система в $\mathbb{R}^m$ вида (4), а тогда $PX_k = x_k, k \in 1:m$.

Достаточность. Если существует ортонормированная система $\{X_k\}_{k=1}^m$ и выполнено (7), то рассмотрим матрицу Φ_0 из столбцов $X_1, \dots, X_m$. Это ортогональная матрица. Её строки $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ также образуют ортонормированный базис:

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k \in 1:m. \tag{8}$$

Из векторов $x_k = PX_k$, $k \in 1:m$, составим матрицу Φ размера $n \times m$. Её строками являются $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. В силу (8) выполнено равенство $\Phi\Phi^T = I_n$, значит $\{x_k\}_{k=1}^m$ — фрейм Парсеваля.

Предложение доказано. □

Формула (7) даёт единообразный способ получения фреймов Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^n$. На этот способ обращали внимание многие авторы, например, [2, 3].

3°. Построение дополнительных равноугольных жёстких фреймов. Обратимся к получению дополнительных фреймов для равноугольных жёстких фреймов.

Напомним [1], что система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *равноугольным жёстким фреймом*, если

1) $\|\varphi_k\| = 1, k \in 1:m$;

2) $|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle| = c \quad$ при $\quad k \neq s$;

3) $\sum_{k=1}^m [\langle x, \varphi_k \rangle]^2 = A\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,

где c и A - некоторые константы.

Показывается [1], что константы определяются однозначно:

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}, \quad A = \frac{m}{n}.$$

Равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (n, m). Полезным является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $m > n$. Если для данной пары (n, m) существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, то существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ для пары (n', m), где $n' = m - n$, при этом*

$$\operatorname{sign}\langle \psi_k, \psi_s \rangle = -\operatorname{sign}\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \quad \textit{при } k \neq s.$$

Доказательство. Векторы

$$x_k = \sqrt{\frac{n}{m}}\varphi_k, \quad k \in 1 : m,$$

образуют фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^n$. По построению п. 1° существует дополнительный фрейм Парсеваля $\{y_k\}$ в $\mathbb{R}^{n'}$, при этом выполнены равенства (5) и (6).

Из этих равенств получаем

$$\|y_k\|^2 = 1 - \|x_k\|^2 = 1 - \frac{n}{m} = \frac{m-n}{m},$$

$$\langle y_k, y_s \rangle = -\langle x_k, x_s \rangle = -\frac{n}{m}\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle = -\frac{n}{m}c \quad \text{при } k \neq s.$$

Введём теперь векторы

$$\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}y_k, \quad k \in 1 : m.$$

Они обладают свойствами:

1) $\|\psi_k\| = 1, \quad k \in 1 : m;$
2) $|\langle \psi_k, \psi_s \rangle| = \frac{m}{m-n}|\langle y_k, y_s \rangle| = \frac{n}{m-n}c$ при $k \neq s$;
3) $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{R}^{n'}$ с константой

$$\frac{m}{m-n} = \frac{m}{n'}.$$

Значит, $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^{n'}$, где $n' = m - n$.

Предложение доказано. □

4°.

Пусть $m > n$ и $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$. Введём матрицу $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$ размера $n \times m$ со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Тогда условие жёсткого фрейма как и выше можно записать в виде

$$\Phi \Phi^T = \frac{m}{n} I_n. \tag{9}$$

Строки матрицы Φ обозначим $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Тогда (9) переписывается в виде

$$\langle \gamma_i, \gamma_k \rangle = \frac{m}{n} \delta_{ik}, \quad i,\ k \in 1 : n,$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Процесс построения дополнительного фрейма можно конкретизировать следующим образом :

1. Введём нормированные векторы-строки

$$s_i = \sqrt{\frac{n}{m}} \gamma_i,\ i \in 1 : n; \quad (\|s_i\| = 1).$$

2. Дополним систему $\{s_1, \dots, s_n\}$ строками $s_{n+1}, \dots, s_m$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^m$. Из строк $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im})$, $i \in 1 : m$, составим матрицу S. Эта матрица является ортогональной, т. е. $SS^T = I_m$. Кроме того, выполнено равенство $S^T S = I_m$, которое означает, что столбцы матрицы S также образуют ортонормированную систему. Столбец матрицы S с номером k можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n,\ y_k \in \mathbb{R}^{m-n}.$$

Условие ортонормированности записывается так:

$$\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 = 1, \quad k \in 1 : m; \tag{10}$$

$$\langle x_k, x_j \rangle + \langle y_k, y_j \rangle = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j. \tag{11}$$

3. По предложению 1 система $\{y_1, \dots, y_m\}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{R}^{m-n}$, который называется *дополнительным* к фрейму $\{x_1, \dots, x_m\}$.

По построению

$$x_k = \sqrt{\frac{n}{m}} \varphi_k, \quad \|x_k\| = \sqrt{\frac{n}{m}}, \quad k \in 1 : m.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$\|y_k\| = \sqrt{1 - \|x_k\|^2} = \sqrt{\frac{m-n}{m}}, \quad k \in 1:m.$$

Нормированные векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}} y_k$, $k \in 1 : m$, образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

5°. Введём симметричную матрицу размера $m \times m$

$$Q[i,k] = \begin{cases} 0, & i = k, \\ \operatorname{sign}\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle, & i \neq k, \end{cases}$$

которая является *конференц-матрицей* (см. [4]).

ТЕОРЕМА. *Столбцы $s_1^T, \ldots, s_n^T$ являются собственными векторами матрицы Q, соответствующими собственному числу $\lambda_1 = \frac{m-n}{nc}$. Столбцы $s_{n+1}^T, \ldots, s_m^T$ являются собственными векторами матрицы Q, соответствующими собственному числу $\lambda_2 = -\frac{1}{c}$.*

Доказательство. Введём матрицу Грама $G = \Phi^T \Phi$, состоящую из скалярных произведений $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle$, $i, k \in 1 : m$, и найдём её собственные числа. Для $k \in 1 : n$ вычислим $G s_k^T = \Phi^T \Phi_k^T$. Строки матрицы Φ ранее были обозначены $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Имеем

$$\langle \gamma_i, s_k \rangle = 0,\ i \neq k; \quad \langle \gamma_k, s_k \rangle = \sqrt{\frac{n}{m}} \langle \gamma_k, \gamma_k \rangle = \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{m}{n}.$$

Отсюда

$$G s_k^T = \Phi^T (\Phi S_k^T) = \frac{m}{n} \sqrt{\frac{n}{m}} \gamma_k^T = \frac{m}{n} s_k^T, \quad k \in 1 : n.$$

Кроме того, $G s_k^T = \mathbb{O}$ при $k \in n+1 : m$. Значит, собственными числами G являются числа $\frac{m}{n}$ и 0.

Ввиду равноугольности фрейма $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ справедливо равенство $Q = \frac{1}{c}(G - I_m)$. Отсюда получаем, что

$$Q s_k^T = \frac{1}{c}(\frac{m}{n} - 1) s_k^T = \frac{m-n}{nc} s_k^T, \quad k \in 1 : n;$$
$$Q s_k^T = -\frac{1}{c} s_k^T, \quad k \in n+1 : m.$$

Теорема доказана.

$\square$

6°. Один из возможных способов построения дополнительного равноугольного фрейма $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ основан на теореме. Найдём ортонормированные собственные векторы $s_{n+1}^T, \dots, s_m^T$ матрицы Q, соответствующие собственному числу $-\frac{1}{c}$. Из строк $s_{n+1}, \dots, s_m$ составим матрицу

$$Y = \begin{bmatrix} s_{n+1,1} & \dots & s_{n+1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & \dots & s_{mm} \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы обозначим $y_1, \dots, y_m$. Тогда векторы

$$\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}} y_k, \quad k \in 1:m,$$

образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

Пример. Пусть $n = 3$, $m = 6$. Известным примером равноугольной системы в $\mathbb{R}^3$ является набор из 6 векторов:

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0), & g_4 &= (\alpha, -1, 0), \\ g_2 &= (0, \alpha, 1), & g_5 &= (0, \alpha, -1), \\ g_3 &= (1, 0, \alpha), & g_6 &= (-1, 0, \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение.

Нормированные векторы $\varphi_k = g_k / \sqrt{1+\alpha^2}$, $k \in 1:6$, образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^3$, причём

$$|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}} =: c \text{ при } k \neq s.$$

Построим дополнительный равноугольный жёсткий фрейм.

В данном случае матрица Q имеет вид:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У этой симметричной матрицы можно найти собственные векторы, соотвествующие собственному числу $\lambda_2 = -1/c = -\sqrt{5}$. Запишем эти векторы в строчку:

$$\gamma_4 = (-1, 0, 0, \alpha, \alpha, 1),$$
$$\gamma_5 = (0, 0, -1, \alpha, 1, \alpha),$$
$$\gamma_6 = (0, -1, 0, 1, \alpha, \alpha).$$

После ортогонализации и нормировки этих векторов получим векторы s_4, s_5, s_6, которые запишем в виде строк матрицы Y размера 3×6.

Столбцы этой матрицы, как и выше, обозначим $y_1, \ldots, y_6$. Векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{n}} y_k = \sqrt{2} y_k$, $k \in 1 : 6$, образуют дополнительный равноугольный жёсткий фрейм. Матрица $\Psi = [\psi_1, \ldots, \psi_6]$ имеет вид

$$\Psi = \sqrt{2} Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & \frac{2}{5+\sqrt{5}} & -\frac{2}{5+\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

При этом

$$|\langle \psi_k, \psi_s \rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \langle \psi_k, \psi_s \rangle = -\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle \text{ при } k \neq s.$$

Литература

1. **Малозёмов В. Н., Певный А. Б.** Равноугольные жёсткие фреймы// *Проблемы математического анализа. 2009. Вып. 39. С. 3–25.*

2. **Han D., Larson D. R.** Frames, bases and group representation// *Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 147. № 697. P. 1–94.*

3. **Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C.** Real equiangular frames// (`http://www.math.missouri.edu/~pete`)

4. **Conway J. H., Sloane N. J. A.** Sphere packing, Lattices and Groups. 3rd edition// *Springer–Verlag, 1999.*

Summary

Pevnyi A.B., Istomina M.N., Maksimenko V.V. Complementary tight frames

For any tight frame in the space $\mathbb{R}^n$ consisting of m vectors, $m > n$, the authors construct a complimentary tight frame in the space of dimension $n' = m - n$.

Сыктывкарский университет *Поступила 01.04.09*