Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.9. 2009

УДК 519.652

СФЕРИЧЕСКИЕ ДИЗАЙНЫ

А.Б. Певный, А.М. Дурягин

Даётся определение сферического t - дизайна в $\mathbb{R}^n$. Приводится пример 4-дизайна в $\mathbb{R}^3$. Подробно исследуется вопрос о виде t - дизайнов на плоскости, их можно назвать круговыми дизайнами.

1. Введение

Пусть t — четное число, $t \geq 2$. Система векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$, $\|\varphi_i\| = 1, \quad i \in 1:m$, называется *сферическим t-дизайном*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{m} [\langle x, \varphi_i \rangle]^t = A\|x\|^t,$$

где $A > 0$ — некоторая константа. Такое определение используется в [3].

При $t = 2$ сферические 2-дизайны — это то же самое, что жёсткие фреймы, состоящие из единичных векторов.

Следует отметить, что есть другое определение сферического дизайна, связанное с интегрированием по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [2], [4]).

Количество элементов сферического t-дизайна не может быть меньше некоторой нижней границы. А именно, при $t = 2s$ должно выполнятся неравенство (см. [3]):

$$m \geq C_{n+s-1}^{n-1}. \tag{1}$$

Например, при $n = 3, t = 4, s = 2$ выполняется неравенство

$$m \geq C_4^2 = 6.$$

Приведем пример минимального (состоящего из 6 векторов) 4-дизайна в пространстве $\mathbb{R}^3$.

2. Пример 4-дизайна

Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} g_1 &= (\alpha, 1, 0), & g_4 &= (\alpha, -1, 0),\\ g_2 &= (0, \alpha, 1), & g_5 &= (0, \alpha, -1),\\ g_3 &= (1, 0, \alpha), & g_6 &= (-1, 0, \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение. Точки $g_1, \ldots, g_6$ лежат на сфере S_R радиуса

$$R = \sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Введем единичные векторы $\varphi_i = g_i/R$. Эти векторы обладают свойством равноугольности

$$|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad i \neq j.$$

Покажем, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^6$ является сферическим 4-дизайном.

Пусть $X = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$. Вычислим сумму

$$\begin{aligned} &F_4(X) = \sum_{i=1}^{6} [\langle g_i, X \rangle]^4 = \\ &= (\alpha x + y)^4 + (\alpha y + z)^4 + (\alpha z + x)^4 + (\alpha x - y)^4 + (\alpha y - z)^4 + (\alpha z - x)^4. \end{aligned} \tag{2}$$

При возведении в 4-ую степень все нечётные степени x, y, z уничтожатся. Придём к выражению

$$F_4(X) = 2[(1+\alpha^4)x^4 + (1+\alpha^4)y^4 + (1+\alpha^4)z^4 + 6\alpha^2x^2y^2 + 6\alpha^2y^2z^2 + 6\alpha^2x^2z^2].$$

Нетрудно подсчитать, что $1 + \alpha^4 = 3\alpha^2 = \frac{3}{2}(3+\sqrt{5})$.

Введем обозначение

$$A = 2(1+\alpha^4) = 2 \cdot 3\alpha^2 = 3(3+\sqrt{5}).$$

Тогда

$$F_4(X) = A[x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2] = A(x^2+y^2+z^2)^2 = A\|X\|^4. \tag{3}$$

Подставим в (2) $g_i = R\varphi_i$. С учетом (3) получим

$$\sum_{i=1}^{6} [\langle \varphi_i, X \rangle]^4 = \frac{A}{R^4}\|X\|^4 = \frac{6}{5}\|X\|^4 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

Значит, система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ является сферическим 4-дизайном в $\mathbb{R}^3$.

Ясно, что система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ не является сферическим 6-дизайном в $\mathbb{R}^3$, ибо при $n = 3$, $t = 6$, $s = 3$ выполнялось бы неравенство $m \geq C_5^2 = 10$, а у нас только 6 векторов.

Дополним систему $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ векторами $-\varphi_1, \dots, -\varphi_6$.

Получившуюся систему из 12 векторов в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{12}\}$. Выпуклая оболочка системы Φ является икосаэдром, вписанном в единичную сферу. Система Φ является сферическим 2-дизайном и 4-дизайном.

3. Круговые дизайны

В этом пункте рассматриваются сферические $t-$дизайны на плоскости, где t — произвольное чётное число, $t \geq 2$. Такие дизайны можно назвать круговыми.

Система векторов $\{b_0, \dots, b_{m-1}\}$ в $\mathbb{R}^2$, $\|b_k\| = 1$, $k \in 0 : m-1$, будет круговым t-дизайном, если выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} [\langle b_k, X\rangle]^t = A\|X\|^t, \tag{4}$$

где $A > 0$ –константа, $X = (x, y)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть $t = 2s$. Неравенство (1) принимает вид

$$m \geq C_{s+1}^1 = s + 1 = \frac{t}{2} + 1.$$

Если $m = \frac{t}{2} + 1$, то дизайн будем называть *минимальным*. При $t = 2$ минимальный дизайн должен содержать два вектора ($m = 2$). Два единичных вектора b_0 и b_1 образуют 2-дизайн (жёсткий фрейм) только тогда, когда эти векторы ортогональны: $\langle b_0, b_1\rangle = 0$. В этом случае концы векторов $\{b_0, b_1, -b_0, -b_1\}$ совпадают с вершинами квадрата.

В мемуаре [3], p.23, без доказательства утверждалось, что при любом $t \geq 2$ половина вершин правильного $(t+2)$-угольника, вписанного в единичный круг, образует круговой t-дизайн.

Докажем это утверждение путём непосредственной проверки равенства (4).

Пусть t — четное, $t \geq 2$. Положим

$$m = \frac{t}{2} + 1. \tag{5}$$

Разделим окружность на $2m = t + 2$ частей и рассмотрим векторы

$$b_k = \left(\cos\frac{k\pi}{m},\ \sin\frac{k\pi}{m}\right), \quad k \in 0 : m-1. \tag{6}$$

Это половина векторов с концами в вершинах правильного $2m$-угольника.

Теорема. Векторы (6) образуют p - дизайн с константой

$$A_p = \frac{m(p-1)!!}{p!!}$$

для любого $p = 2, 4, \ldots, t$.

4. Вспомогательное утверждение

Перед доказательством теоремы установим хорошо известную лемму о точности квадратурной формулы прямоугольников для тригонометрических полиномов.

Лемма. Разделим отрезок $[0, 2\pi]$ на $2m$ равных частей с шагом $h = \frac{\pi}{m}$. Тогда для любого тригонометрического полинома

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

порядка p, где $p \le 2m - 1$, справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} f\left(\frac{j\pi}{m}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Полином $f(\varphi)$ можно записать в виде

$$f(\varphi) = \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{ik\varphi}.$$

Достаточно доказать (7) для функции $e^{ik\varphi}, |k| \le p$. При $k = 0$ получаем равенство $2\pi = 2\pi$. Если же $1 \le |k| \le p \le 2m - 1$, то сумма в (7) будет геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = e^{ik\pi/m} \ne 1.$$

Сумма в (7) равна

$$\frac{q^{2m} - 1}{q - 1} = \frac{e^{2ik\pi} - 1}{q - 1} = 0,$$

а интеграл также равен нулю. $\square$

5. Доказательство теоремы

Произвольный вектор $X = (x, y)$ можно представить в виде

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|X\|$, а θ – некоторый угол.

Тогда для любого $p = 2, 4, \ldots, t$ справедливы равенства

$$\langle b_k, X\rangle = r\Big(\cos\frac{k\pi}{m}\cos\theta + \sin\frac{k\pi}{m}\sin\theta\Big) = r\cos\Big(\frac{k\pi}{m} - \theta\Big),$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}[\langle b_k, X\rangle]^p = r^p S(\theta), \tag{8}$$

где

$$S(\theta) = \sum_{k=0}^{m-1}\Big[\cos\Big(\frac{k\pi}{m} - \theta\Big)\Big]^p.$$

Поскольку p — чётное, то функция $\cos^p\varphi$ имеет период π. Отсюда

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\Big[\cos\Big(\frac{k\pi}{m} - \theta\Big)\Big]^p.$$

Выражение $[\cos(\varphi - \theta)]^p$ является тригонометрическим полиномом порядка p по переменной φ. В силу (5) $2m = t + 2$, отсюда $p \le t = 2m - 2 < 2m - 1$. По лемме

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\frac{m}{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(\varphi - \theta)]^p d\varphi = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\varphi]^p d\varphi, \tag{9}$$

так как при сдвиге аргумента 2π-периодической функции на фиксированное число θ интеграл не меняется. Последний интеграл вычисляется в "Курсе" Фихтенгольца (Т.2, п. 312):

$$\int_0^{2\pi}\cos^p\varphi d\varphi = 4\int_0^{\pi/2}\cos^p\varphi d\varphi = 2\pi\frac{(p-1)!!}{p!!}.$$

В силу (8) и (9) придем к равенству

$$\sum_{k=0}^{m-1}[\langle b_k, X\rangle]^p = \frac{m(p-1)!!}{p!!}\|X\|^p$$

Теорема доказана.

Замечание. Добавим к системе (6) противоположные векторы $-b_0, -b_1, \ldots, -b_{m-1}$. Получим систему из $2m$ векторов

$$b_k = \Big(\cos\frac{k\pi}{m},\ \sin\frac{k\pi}{m}\Big), \quad k \in 0 : 2m-1. \tag{10}$$

Эти векторы направлены в вершины правильного $2m$-угольника.

Векторы (10) также образуют круговой p-дизайн (с константой $2A_p$).

Можно сказать также так: вершины правильного $2m$-угольника образуют круговой p-дизайн при любом $p = 2, 4, \ldots, 2m-2$ (из формулы (5) следует, что $t = 2m-2$).

Более подробные сведения о сферических t - дизайнах можно найти в [1]– [4].

Литература

1. **Андреев Н.Н., Юдин В.А.** Экстремальные расположения точек на сфере// *Матем. просвещение. Сер.3. Вып.1. 1997. С.115–121.*

2. **Waldron S.** Generalized Welch bound equality sequences are tight frame// *Technical Report. 18 March 2003* (`http://www.math.auckland.ac.nz/~waldron`)

3. **Bruce Reznick.** Sums of even powers of real linear forms// *Memoirs of Amer. Math. Soc. 1992. V.96. №463. P. 1–155.*

4. **Bannai E., Munemasa A., Venkov B.** The nonexistence certain tight spherical designs// *Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.*

Summary

Pevnyi A.B., Duriagin A.M. Spherical designs

Definition of spherical t-design is made. The example of 4-design $\mathbb{R}^3$ is presented. The designs on a plane is in detail investigated, it is possible to name them circular designs.

Сыктывкарский университет *Поступила 11.03.2009*