

УДК 539.3

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Е.И. Михайловский, В.В. Гинтнер, В.В. Миронов

При известной функции Грина для линейной краевой задачи с однородными граничными условиями названную задачу можно считать решенной. Однако аналитическое построение функции Грина даже для одномерной краевой задачи с переменными коэффициентами является весьма проблематичным. В то же время нередко можно подобрать (вспомогательный) дифференциальный оператор того же порядка, что и оператор рассматриваемой задачи, но такой, для которого функция Грина при граничных условиях исходной задачи вычисляется достаточно просто. В работе показано, что в таких случаях исходная краевая задача приводится к интегральному уравнению Фредгольма (1-го и 2-го рода); для решения которого можно использовать, например, метод механических квадратур [1].

1. Общая схема метода

Пусть L – дифференциальный оператор, вообще говоря, с частными производными, старшая из которых имеет порядок $2n$. И пусть дана краевая задача

$$Lu = f(P), \quad P \in \Omega; \quad (1.1)_1$$

$$(\Gamma_k u)(P) = 0, \quad P \in \partial\Omega, \quad k \in 1 : n. \quad (1.1)_2$$

Наряду с L рассмотрим *вспомогательный* оператор L_0 , также имеющий порядок $2n$, но такой, что для него решение краевой задачи

$$L_0 G = \delta(P - Q), \quad P, Q \in \Omega; \quad (1.2)_1$$

$$(\Gamma_k G)(P) = 0, \quad P \in \partial\Omega, \quad k \in 1 : n \quad (1.2)_2$$

($\delta(P - Q)$ – дельта-функция: $\int_{\Omega} \varphi(Q)\delta(P - Q)d\Omega_Q = \varphi(P)$) находится достаточно просто.

Тогда решение исходной краевой задачи можно представить в виде

$$u(P) = \int_{\Omega} G(P, Q)U(Q)d\Omega_Q, \quad (1.3)$$

где

$$U(Q) \triangleq (L_0u)(Q) - (Lu)(Q) + f(Q). \quad (1.3')$$

В выполнении уравнения (1.1)₁ легко убедиться, если на обе части равенства (1.3) подействовать оператором L_0 и учесть фильтрующее свойство дельта-функции. Действуя же на обе части (1.3) операторами Γ_k , $k \in 1 : n$ и полагая в полученных равенствах $P \in \partial\Omega$, убеждаемся с учетом (1.2)₂, что выполняются и граничные условия (1.1)₂.

Действуя теперь на равенство (1.3) оператором L , приходим к следующему интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода относительно функции $U(Q)$:

$$\int_{\Omega} (LG)(P, Q)U(Q)d\Omega_Q = f(P), \quad P \in \bar{\Omega}. \quad (1.4)$$

Для решения уравнения (1.4) можно применить метод механических квадратур [1]. После вычисления значений функции $U(P)$ в узлах квадратурной сетки и подстановки их в уравнение (1.3), правая часть которого записана с использованием той же квадратурной формулы, получим приближенное выражение для искомой функции, которое можно уточнять путем увеличения числа узлов сетки.

В тех случаях, когда функция $f(P)$ является импульсной или сильно осциллирующей, вместо уравнения (1.3) можно использовать следующее, легко проверяемое равенство:

$$u(P) = \int_{\Omega} G(P, Q)f(Q)d\Omega_Q - \int_{\Omega} G(P, Q)\tilde{U}(Q)d\Omega_Q, \quad (1.5)$$

где

$$\tilde{U}(Q) = (\tilde{L}u)(Q), \quad \tilde{L} = L - L_0. \quad (1.5')$$

Действуя на обе части равенства (1.5) оператором \tilde{L} , приходим к следующему интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода:

$$\tilde{U}(P) = \int_{\Omega} \tilde{G}(P, Q)f(Q)d\Omega_Q - \int_{\Omega} \tilde{G}(P, Q)\tilde{U}(Q)d\Omega_Q, \quad (1.6)$$

где

$$\tilde{G} = (\tilde{L}G)(P, Q). \quad (1.6')$$

2. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

2.1. Приведение к интегральному уравнению 1-го рода

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv \frac{d^{2n}u}{dx^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} a_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = f(x), \quad x \in (-1, +1); \quad (2.1)_1$$

$$\Gamma_\nu u(-1) = 0, \quad \nu \in 1 : n,$$

$$\Gamma_\nu u(+1) = 0, \quad \nu \in n + 1 : 2n. \quad (2.1)_2$$

Здесь Γ_ν , $\nu \in 1 : 2n$ – линейные дифференциальные операторы.

В случае $a_k(x) \equiv 0$, $k \in 0 : 2n - 1$ краевой задаче (2.1) отвечает функция Грина, удовлетворяющая уравнениям

$$L_0 G \equiv \frac{d^{2n}G}{dx^{2n}} = \delta(x - \alpha), \quad x, \alpha \in (-1, +1); \quad (2.2)_1$$

$$\Gamma_\nu G(-1) = 0, \quad \nu \in 1 : n,$$

$$\Gamma_\nu G(+1) = 0, \quad \nu \in n + 1 : 2n. \quad (2.2)_2$$

Нетрудно проверить, что общее решение уравнения (2.2)₁ можно представить формулой

$$G(x, \alpha) = \frac{1}{(2n - 1)!} (x - \alpha)^{2n-1} H(x - \alpha) + \sum_{k=0}^{2n-1} c_k x^k, \quad (2.3)$$

где $H(x - \alpha)$ – функция Хевисайда:

$$H(x - \alpha) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ 1, & x \geq \alpha \end{cases}.$$

Произвольные постоянные c_k , $k \in 0 : 2n - 1$ определяются из граничных условий (2.2)₂.

Вспомогательная функция $U(x)$ определяется из интегрального уравнения (см. форм. (1.4))

$$\int_{-1}^{+1} (LG)(x, \alpha) U(\alpha) d\alpha = f(x), \quad x \in [-1, +1]. \quad (2.4)$$

Применим для решения уравнения (2.4) метод механических квадратур [1]. Рассмотрим квадратурный процесс

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_m(x) dx = \sum_{j=1}^m A_{jm} \varphi(x_{jm}), \quad (2.5)_1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} \varphi_m(x) dx = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx, \quad (2.5)_2$$

где A_{jm} – веса, x_{jm} ($x_{jm} \in [-1, +1]$; $x_{jm} \neq x_{im}$ при $i \neq j$) – узлы квадратурных формул.

Уравнение (2.4) при достаточно большом m можно заменить следующим:

$$\sum_{j=1}^m A_{jm} (LG)(x, x_{jm}) U(x_{jm}) \approx f(x) \quad (2.6)$$

относительно неизвестных $U(x_{jm})$, $j \in 1 : m$. Подставляя сюда вместо x его значения x_{im} , $i \in 1 : m$ приходим к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m A_{jm} (LG)(x_{im}, x_{jm}) U(x_{jm}) \approx f(x_{im}), \quad i \in 1 : m \quad (2.6')$$

После определения значений вспомогательной функции $U(x)$ в узловых точках искомая функция определяется по формуле

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^m A_{im} G(x, x_{im}) U(x_{im}). \quad (2.7)$$

2.2. Приведение к интегральному уравнению 2-го рода

Вспомогательная функция $\tilde{U}(x)$ определяется из интегрального уравнения (см. форм. (1.6), (1.6'))

$$\tilde{U}(x) = \int_{-1}^{+1} \tilde{G}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha - \int_{-1}^{+1} \tilde{G}(x, \alpha) \tilde{U}(\alpha) d\alpha, \quad (2.8)$$

где

$$\tilde{G}(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k(x) \frac{d^k G(x, \alpha)}{dx^k}. \quad (2.8')$$

В соответствии с квадратурным процессом (2.5) уравнение (2.8) при большом m можно заменить следующим:

$$\tilde{U}(x) + \sum_{j=1}^m A_{jm} \tilde{G}(x, x_{jm}) \tilde{U}(x_{jm}) \approx \tilde{F}(x). \quad (2.9)$$

Здесь

$$\tilde{F}(x) \triangleq \int_{-1}^{+1} \tilde{G}(x, \alpha) f(x, \alpha) d\alpha \approx \sum_{j=1}^m A_{jm} \tilde{G}(x, x_{jm}) f(x_{jm}). \quad (2.9')$$

Подставляя в приближенное равенство (2.9) вместо x его значения x_{im} , $i \in 1 : m$, получим систему уравнений

$$\tilde{U}(x_{im}) + \sum_{j=1}^m \tilde{G}(x_{im}, x_{jm}) \tilde{U}(x_{jm}) \approx \tilde{F}(x_{im}), \quad i \in 1 : m, \quad (2.10)$$

относительно значений вспомогательной функции $\tilde{U}(x)$ в узловых точках квадратурной формулы.

После определения неизвестных $\tilde{U}(x_{im})$, $i \in 1 : m$ искомая функция определяется по формуле (см. (1.5))

$$u(x) \approx F(x) - \sum_{j=1}^m A_{jm} G(x, x_{jm}) \tilde{U}(x_{jm}), \quad (2.11)$$

где

$$F(x) \triangleq \int_{-1}^{+1} G(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha \approx \sum_{j=1}^m A_{jm} G(x, x_{jm}) f(x_{jm}). \quad (2.11')$$

3. Расчет на прочность искусственного водохранилища

В качестве примера краевой задачи с переменными коэффициентами в разрешающем уравнении рассмотрим задачу на расчет стенки искусственного водохранилища. При этом будем считать, что водохранилище имеет форму круговой цилиндрической оболочки радиуса R , толщиной $h = h(x_1)$, $x_1 \in (0, l)$ (Рис. 3.1).

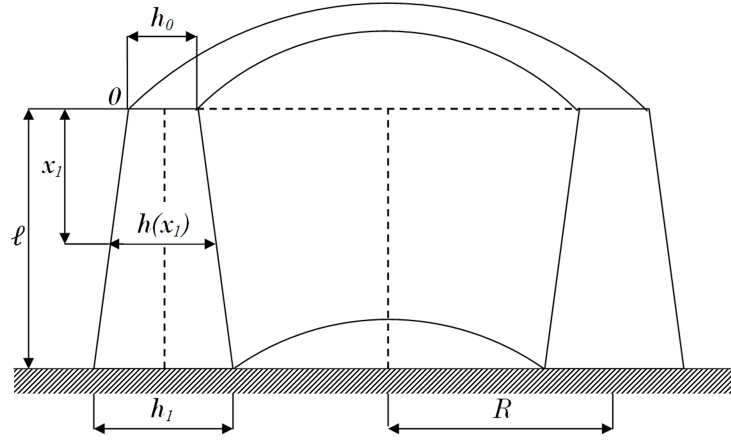


Рис. 3.1.

Разрешающее уравнение имеет вид

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2}{dx_1^2} \left(h^3 \frac{d^2 w}{dx_1^2} \right) = \gamma x_1 - \frac{whE}{R^2}, \quad (3.1)$$

где γ – удельный вес воды.

Предполагая в дальнейшем использовать квадратурную формулу Гаусса-Лежандра, выполним в уравнении (3.1) замену переменной $x_1 = l(1+x)/2$, $x \in (-1; 1)$.

В результате придем к следующему уравнению:

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \frac{\gamma l^5(1+x)}{32} - \frac{whEl^4}{16R^2}. \quad (3.2)$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$w^{IV} = \frac{3l^5\gamma(1+x)(1-\nu^2)}{8Eh^3(x)} - \frac{3wl^4(1-\nu^2)}{4R^2h^2(x)} - \frac{2h^3w'''}{h^3(x)} - \frac{h^3w''}{h^3(x)} \quad (3.3)$$

(штрих здесь и ниже означает производную по x).

Для определенности будем считать, что рассматриваемая оболочка имеет свободный край $x = -1$ и жесткое защемление $x = +1$. Тогда, при неучете подчеркнутого слагаемого в уравнении (3.3), функция Грина краевой задачи удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d^4 G(x, \alpha)}{dx^4} = \delta(x - \alpha),$$

$$G'''(-1) = 0, \quad G''(-1) = 0; \quad G(+1) = 0, \quad G'(+1) = 0 \quad (3.4)$$

и имеет вид

$$G(x, \alpha) = \frac{1}{6}(x - \alpha)^3 H(x - \alpha) + \frac{1}{6}(1 - \alpha)^2(2 + \alpha - 3x). \quad (3.5)$$

Используя функцию Грина (3.5) и имея в виду метод сведения краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, вспомогательную функцию $U(x)$ определяем из уравнения (см. форм. (2.4))

$$\int_{-1}^{+1} (LG)(x, \alpha)U(\alpha)d\alpha = \frac{3l^5\gamma(1+x)(1-\nu^2)}{8Eh^3}, \quad (3.6)$$

где (см. форм. (2.1)₁)

$$Lu = u^{IV} + \frac{3l^4(1-\nu^2)}{4R^2h^2}u + \frac{2h^{3'}}{h^3}u''' + \frac{h^{3''}}{h^3}u''. \quad (3.7)$$

Для получения приближенного решения интегрального уравнения воспользуемся формулами (2.6'), на основе квадратурной формулы Гаусса-Лежандра. На основании равенства (2.7) имеем

$$w(x) \approx \sum_{i=1}^m A_{im}G(x, x_{im})U(x_{im}), \quad (3.8)$$

где x_{im} – корни полинома Лежандра $P_m(x)$

$$A_{im} = \frac{2(1-x_{im}^2)}{m^2[P_{m-1}(x_{im})]^2}. \quad (3.9)$$

В расчетах использовалось следующее выражение для толщины стенки водохранилища:

$$h(x) = \frac{h_1 + h_0}{2} + \frac{h_1 - h_0}{2}x, \quad (3.10)$$

и значения параметров: $R = 100$ м, $l = 10$ м, $E = 2 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0$, $\gamma = 1 \cdot 10^3$ кГ/м³, при $m = 20$.

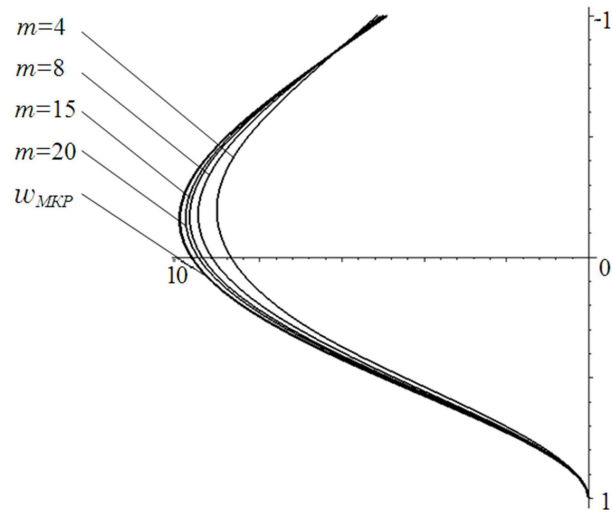


Рис. 3.2.

На рис.3.2 приведены графики функции w при различных значениях параметра m , из которых усматривается, что при увеличении количества узловых точек графики прогиба, рассчитанные по методу механических квадратур, приближаются к точному решению, полученному методом конечных разностей в системе Maple (w_{MKP} - жирная кривая).

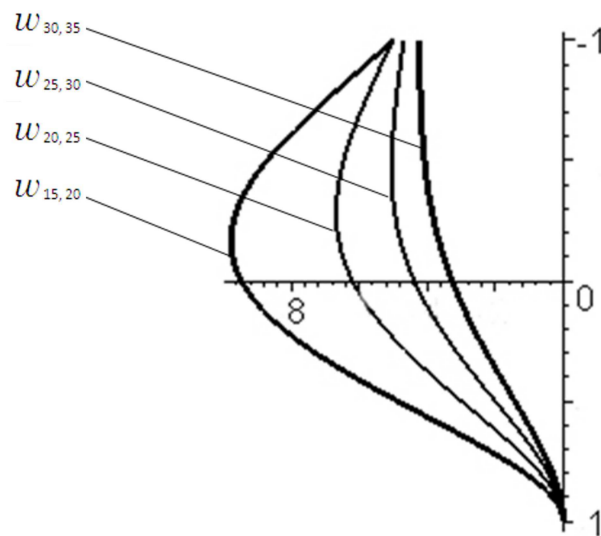


Рис. 3.3.

На рис.3.3 приведены графики функции w при различных параметрах h_0 и h_1 , обозначенных в нижнем индексе соответственно (w_{h_0, h_1}).

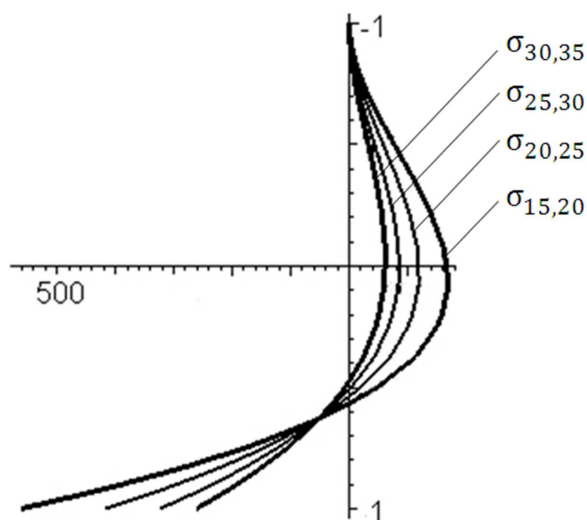


Рис. 3.4.

На рис.3.4 приведены графики продольных напряжений σ_x при различных параметрах h_0 и h_1 , показанных в нижнем индексе ($\sigma_x \triangleq \sigma_{h_0, h_1}$; $[\sigma_x] = \text{кГ/м}^2$).

Графики окружных напряжений σ_φ имеют тот же вид, что и графики прогибов ($\sigma_\varphi = Ew/R$).

4. Расчет на прочность цилиндрически изгибаемой пластины переменной толщины

Рассмотрим метод вспомогательного оператора, сводящийся к интегральному уравнению 2-ого рода применительно к задаче о цилиндрическом изгибе ($\partial(\cdot)/\partial x_2 \equiv 0$) пластины переменной толщины (рис.4.1), т.е. такой, что $h = h(x_1)$ и, следовательно, $D = D(x_1)$.

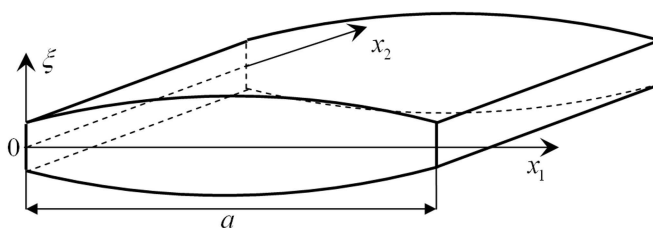


Рис. 4.1.

В силу соотношений (5.1.2), (5.1.10), (5.1.13) [3] уравнение цилиндрического изгиба такой пластины имеет вид

$$\frac{d^2}{dx_1^2} D(x_1) \frac{d^2 w}{dx_1^2} = q_n(x_1), \quad x_1 \in (0, a). \quad (4.1)$$

Выполнив замену переменной по формуле $x_1 = a(1+x)/2$ и положив $q_n \equiv q$, получим

$$(Dw'')'' = \frac{a^4}{16} q(x), \quad x \in (-1, +1). \quad (4.2)$$

Уравнению (4.2) можно придать вид

$$w^{IV} = \frac{a^4}{16} \frac{q(x)}{D(x)} - \tilde{U}(x), \quad (4.3)$$

где (см. форм. (1.5'))

$$\tilde{U}(x) = \left(\frac{D''}{D} w'' + \frac{2D'}{D} w''' \right) (x) \triangleq \tilde{L}w(x). \quad (4.3')$$

Предположим для определенности, что пластина жестко защемлена по краям $x = \pm 1$. Тогда функция Грина определяется решением краевой задачи

$$\begin{aligned} G^{IV} &= \delta(x - \alpha), \quad x, \alpha \in (-1, +1), \\ G(\pm 1) &= 0, \quad G'(\pm 1) = 0 \end{aligned}$$

и имеет вид (см. форм. (1:7.44) [4])

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) &= \frac{1}{24} (1 - \alpha)^2 (1 + x)^2 (1 - 2x + 2\alpha - x\alpha) + \\ &+ \frac{1}{6} (x - \alpha)^3 H(x - \alpha). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя (4.4), на основании (4.3) получаем

$$w(x) = w_q(x) - \int_{-1}^{+1} G(x, \alpha) \tilde{U}(\alpha) d\alpha, \quad (4.5)$$

где

$$w_q(x) = \frac{a^4}{16} \int_{-1}^{+1} G(x, \alpha) \frac{q(\alpha)}{D(\alpha)} d\alpha. \quad (4.5')$$

Дифференцируя уравнение (4.5) последовательно дважды и трижды по x , а затем, умножая первое из полученных уравнений на $(D''/D)(x)$, второе – на $(2D'/D)(x)$ и складывая, будем иметь

$$\tilde{U}(x) = U_q(x) - \int_{-1}^{+1} \tilde{G}(x, \alpha) \tilde{U}(\alpha) d\alpha, \quad (4.6)$$

где

$$U_q(x) = \tilde{L}w_q(x), \quad \tilde{G}(x, \alpha) = \frac{D''(x)}{D(x)} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{2D'(x)}{D(x)} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}. \quad (4.6')$$

Для получения приближенного решения уравнения (4.6) можно воспользоваться методом механических квадратур на основе квадратурной формулы Гаусса-Лежандра. В соответствии с формулами (2.11), (2.11') искомая функция (прогиб) определяется из приближенного равенства

$$w(x) = w_q(x) - \sum_{i=1}^m A_{im} G(x, x_{im}) \tilde{U}(x_{im}), \quad (4.7)$$

где x_{jm} , A_{jm} определяются по формулам (3.9).

В качестве примера рассмотрим изгиб жестко заземленной на краях $x = \pm 1$ пластины под действием сосредоточенной по линии $x = 0$ нагрузки $q = P\delta(x)$, $P = \text{const}$ (рис. 4.2).

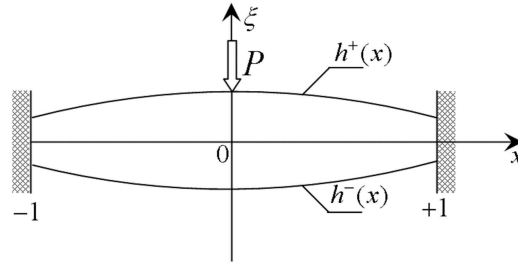


Рис. 4.2.

Толщина в соответствии с рисунком 4.2 задается равенствами

$$\begin{aligned} h^+(x) &= \frac{1}{2}h_0[1 + \lambda \sin \frac{\pi}{2}(1+x)], \\ h^-(x) &= -\frac{1}{2}h_0[1 + \lambda \sin \frac{\pi}{2}(1+x)], \\ h(x) &= h^+(x) - h^-(x) = h_0[1 + \lambda \sin \frac{\pi}{2}(1+x)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Соответственно цилиндрическая жесткость определяется формулой

$$D(x) = D_0[1 + \lambda \sin \frac{\pi}{2}(1+x)]^3, \quad (4.9)$$

где

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.9')$$

Вспомогательные функции D'/D , D''/D , входящие в соотношения (4.3'), (4.6'), определяются по формулам

$$\left(\frac{D'}{D}\right)(x) = \frac{3\pi\lambda \cos \frac{\pi}{2}(1+x)}{2 \frac{h(x)}{h_0}}, \quad \left(\frac{D''}{D}\right)(x) = \frac{3\pi^2\lambda \cos^2 \frac{\pi}{2}(1+x)}{2 \frac{h^2(x)}{h_0^2}}. \quad (4.10)$$

Функция $w_q(x)$ определяется по формуле

$$w_q(x) = \frac{a^4}{16} \int_{-1}^{+1} G(x, \alpha) \frac{P\delta(\alpha)}{D(\alpha)} d\alpha = \frac{a^4}{16} \frac{P}{D(0)} G(x, 0). \quad (4.11)$$

В расчетах рассматривалась пластина с параметрами: $h_0 = 0.05$ м, $a = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^4$ МПа, $P = 10$ кГ при $m = 20$.

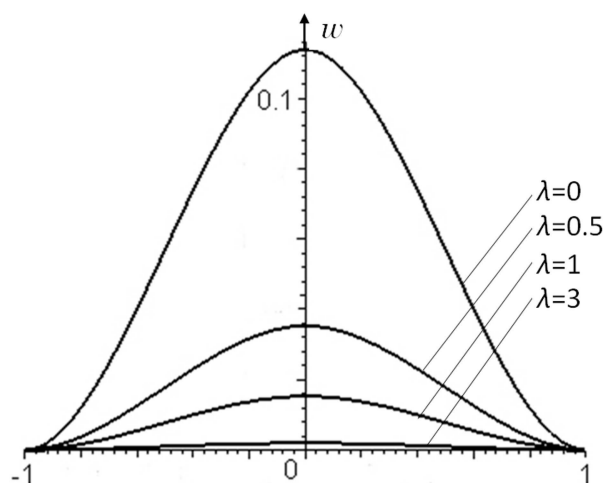


Рис. 4.3.

На рис.4.3 приведены графики функции прогиба при различных значениях параметра λ .

При известном прогибе w напряжение σ_x вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad [\sigma_x] = \text{кГ/м}^2$$

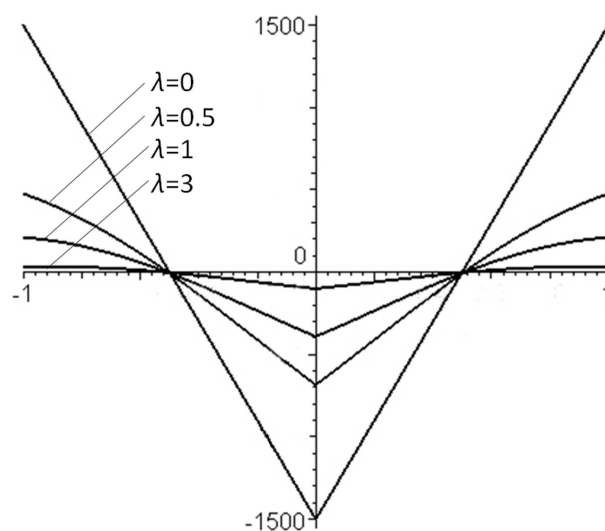


Рис. 4.4.

На рис.4.4 приведены графики напряжений σ_x при различных параметрах λ .

Литература

1. Даугавет И.К. Приближенное решение линейных функциональных уравнений: Учебное пособие для вузов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 224 с.
2. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
3. Михайловский Е.И. Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. 516 с.
4. Михайловский Е.И. Лекции по вариационным методам механики упругих тел: Учебное пособие для вузов. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2002. 256 с.

Summary

Mikhailovskii E.I., Gintner V.V., Mironov V.V. Auxiliary operator method for solving linear boundary-value problem

Linear boundary-value problem with homogeneous boundary condition under certain Green function may be considered as solved. But analytical

construction of Green function is very problematical even for a homogeneous linear boundary-value problem with variable coefficients. At the same time one can select (auxiliary) differential operator with the same order, as operator of considered problem, the one for which Green function of the original problem with the boundary condition is fairly simply computed. This article shows that in these cases the original boundary-value problem is reduced to a Fredholm integral equation of the first or second kind. For its solution, for example, method of mechanical quadrature can be used.

Сыктывкарский университет

Поступила 28.03.2009