Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.9. 2009

УДК 512.556

ПСЕВДОДОПОЛНЕНИЯ В РЕШЕТКЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.М. Вечтомов, Д.В. Чупраков

Изучаются свойства решетки конгруэнций полуколец и полуполей непрерывных неотрицательных (положительных) функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X. Доказано, что эти решетки являются решетками с псевдодополнениями, причем каждый их элемент имеет не более одного дополнения. На языке решеток конгруэнций полуколец непрерывных функций над X получены характеризации некоторых топологических свойств пространства X.

1. Введение. Исходные понятия

Полукольцом называется алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения и тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

Если операция умножения на S коммутативна, то S — *коммутативное полукольцо.* Полукольцо с $1 \neq 0$, не являющееся кольцом, каждый элемент которого обратим, называется полутелом с нулем. Если из полутела S с нулем выбросить нуль, то получим алгебраическую структуру $\langle S\backslash\{0\}, +, \cdot\rangle$, называемую полутелом. Коммутативное полутело называется *полуполем.*

Полукольцо или полуполе S, удовлетворяющее квазитождеству $a + c = b + c \Rightarrow a = b$, называется (*аддитивно*) *сократимым.* Если для каждого $a \in S$ выполняется равенство $a + a = a$, то S называется (*аддитивно*) *идемпотентным.*

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Тогда $C^+(X)$ ($U(X)$) — полукольцо (полуполе) всех непрерывных неотрицательных (положительных) функций, определенных на пространстве X, с обычными операциями сложения и умножения функций. Если вместо сложения $+$ взять операцию max $\vee$, то получим идемпотентные полукольцо $C^{\vee}(X)$ и полуполе $U^{\vee}(X)$.

Кольцо $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на топологическом пространстве X будет кольцом разностей как полукольца $C^{+}(X)$, так и полуполя $U(X)$. Обозначим через $S(X)$ любой из алгебраических объектов $C^{+}(X)$, $C^{\vee}(X)$, $U(X)$, $U^{\vee}(X)$.

Для каждой функции $f \in C(X)$ множества $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = = 0\}$ и $\operatorname{coz} f = X \backslash Z(f)$ называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* на X соответственно. Обозначим $\operatorname{pos} f = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ и $\operatorname{neg} f = \{x \in X \mid f(x) < 0\}$. См. [15].

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности на S, сохраняющее полукольцевые операции. По теореме Гретцера-Шмидта [1, с. 247] множество всех конгруэнций $\operatorname{Con} S$ полукольца S является полной алгебраической решеткой отностительно включения с наибольшим элементом $\mathbf{1}$ — одноклассовой конгруэнцией и наименьшим элементом $\mathbf{0}$ — отношением равенства. Точной верхней гранью двух конгруэнций $\rho, \sigma \in \operatorname{Con} S$ является транзитивное замыкание $\rho \vee \sigma$ композиции $\rho \circ \sigma$ этих элементов. Точной нижней гранью элементов $\rho, \sigma \in \operatorname{Con} S$ будет их пересечение $\rho \cap \sigma$.

Главной конгруэнцией ρ на полукольце или полуполе S, порожденной парой элементов a, b, называется наименьшая конгруэнция на S с условием $a \rho b$. Обозначим ее $\rho(a, b)$.

Через $\ker \rho$ обозначается класс единицы $[1]_{\rho}$ конгруэнции ρ на полуполе U и называется его *ядром*. Известно, что решетка $\operatorname{Con} U$ изоморфна решетке $\{\ker \rho \mid \rho \in \operatorname{Con} U\}$ всех ядер полутела U с операциями умножения и пересечения ядер [16]. Поэтому для полуполей $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ вместо решетки конгруэнций можно говорить о решетке ядер.

Через $\operatorname{Id} R$ обозначается решетка идеалов кольца R.

Для произвольного сократимого полукольца T и его кольца разностей R зададим отображение $\gamma : \operatorname{Id} R \to \operatorname{Con} T$, ставящее в соответствие каждому идеалу I кольца R конгруэнцию на T следующим образом:

$$a \, \gamma(I) \, b \Leftrightarrow a - b \in I.$$

Конгруэнции $\gamma(I)$ называются *идеальными* [2].

Также определим отображение $\delta : \operatorname{Con} T \to \operatorname{Id} R$

$$\delta(\rho) = \{a - b \in R \mid a, b \in T, a \rho b\}.$$

Очевидно, что $\delta(\gamma(I)) = I$ для каждого идеала I в R и $\rho \subseteq \gamma(\delta(\rho))$ для всех $\rho \in \operatorname{Con} T$. В [2, предложение 3.2] доказано, что отображение δ является эпиморфизмом решетки $\operatorname{Con} T$ на $\operatorname{Id} R$, а γ есть $\cap$-гомоморфное вложение $\operatorname{Id} R$ в $\operatorname{Con} T$.

Для произвольного множества A пространства X определим на $S(X)$ бинарное отношение ρ_A правилом:

$$f\,\rho_A\,g \text{ тогда и только тогда, когда } f|_A = g|_A\,,$$

и множество $\mathrm{M}_A = \{f \in C(X) \mid A \subseteq Z(f)\}$. Очевидно, ρ_A является конгруэнцией на полукольце или полуполе $S(X)$, а M_A есть идеал кольца $C(X)$, при этом $\rho_A = \gamma(\mathrm{M}_A)$.

Псевдодополнением элемента a решетки $\langle L, \vee, \wedge, 0\rangle$ называется наибольший элемент $a^* \in L$, удовлетворяющий условию $a \wedge a^* = 0$.

Дополнением элемента a решетки $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ называется элемент $a' \in L$, удовлетворяющий условиям $a \wedge a' = 0$ и $a \vee a' = 1$.

Известно, что в произвольном полутеле U дополнение A' ядра A единственно [7, следствие 1].

Топологическое пространство называется *тихоновским* (*хьюиттовским*), если оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) некоторой тихоновской степени числовой прямой $\mathbb{R}$. Пространство X будет тихоновским тогда и только тогда, когда X — T_1-пространство (то есть его одноточечные множества замкнуты) и для произвольных замкнутого множества $B \subseteq X$ и точки $x \in X \backslash B$ найдется функция $f \in C(X)$ с условиями $f(x) = 1$, $f(B) = \{0\}$.

Замечание 1. Известно [15, chapter 3], что для каждого топологического пространства X существует тихоновское пространство τX такое, что кольца $C(X)$ и $C(\tau X)$ канонически изоморфны. При этом также имеет место $S(X) \cong S(\tau X)$. Поэтому при изучении свойств полуколец непрерывных функций пространство X можно считать тихоновским. Тихоновость пространства X означает, что $X = \tau X$. А для любого тихоновского пространства X существуют *хьюиттовское расширение* νX [15, chapter 8] и *стоун-чеховская компактификация* βX [15, chapter 6]. Пространство νX характеризуется как хьюиттовское пространство, плотно содержаще X и на которое непрерывно продолжается любая функция из $C(X)$. Пространство βX можно определить как компактное хаусдорфово пространство, плотно содержащее X, на которое непрерывно продолжаются все ограниченные функции из $C(X)$. Можно считать νX подпространством βX. При этом $C(X) \cong C(\nu X)$ и $S(X) \cong S(\nu X)$. Любое хьюиттовское пространство X определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма как кольцом $C(X)$ [15, chapter

8], так и полукольцами $C^+(X)$, $C^\vee(X)$ и полуполями $U(X)$, $U^\vee(X)$ [2, предложение 2.2].

Аннулятором подмножества I коммутативного полукольца T называется множество $\operatorname{Ann} I = \{b \in T \mid \forall a \in I, ab = 0\}$. Множество $\operatorname{Ann} I$ является идеалом в T. Положим $\operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann}\{a\}$ при $a \in T$.

Идеал вида $\operatorname{Ann} I$, $I \subseteq T$, называется *аннуляторным*; при этом множество I можно считать идеалом в T.

Подмножество A топологического пространства X называется *канонически замкнутым*, если $A = \overline{B}$ — замыкание некоторого открытого множества B. Множество A будет канонически замкнутым тогда и только тогда, когда $A = \overline{A^0}$, где A^0 — это внутренность множества A.

Подмножества A и B топологического пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует функция $f \in C(X)$, принимающая значение 0 на A и 1 на B.

Топологическое пространство X называется F-*пространством*, если в кольце $C(X)$ все конечно порожденные идеалы — главные. Хорошо известно, что пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in C(X)$ множества $\operatorname{neg} f$ и $\operatorname{pos} f$ функционально отделимы [15, chapter 14].

Топологическое пространство X называется P-*пространством*, если кольцо $C(X)$ регулярно по фон Нейману, то есть для любого $f \in C(X)$ существует такой $g \in C(X)$, что $fgf = f$. Это равносильно тому, что все нуль-множества на X открыто-замкнуты [15, chapter 4].

Общетопологические понятия и факты можно найти в книге Энгелькинга [14].

2. Предварительные результаты

О решетках конгруэнций $\operatorname{Con} C^+(X)$, $\operatorname{Con} C^\vee(X)$, $\operatorname{Con} U(X)$, $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ известны следующие факты:

1. Решетка $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ дистрибутивна, а решетка $\operatorname{Con} U(X)$ модулярна [3].

2. Решетка $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ является подрешеткой решетки $\operatorname{Con} U(X)$ [5, предложение 3].

3. Все конгруэнции на полуполе $U(X)$ идеальны тогда и только тогда, когда пространство X *псевдокомпактно*, то есть все функции из $C(X)$ — ограниченные [2, теорема 4.1].

4. Для тихоновского пространства X булевость решетка $\operatorname{Con} U(X)$ равносильна конечности пространства X [2, следствие 4.3].

5. Решетка $\operatorname{Con} U(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда X есть F-пространство [13, теорема 2].

6. Отображение $\gamma\colon \operatorname{Id} C(X) \to \operatorname{Con} U(X)$ является мономорфизмом решеток, а решетка $\operatorname{Id} C(X)$ есть ретракт решетки $\operatorname{Con} U(X)$ (в печати).

7. $\operatorname{Con} U(X) = \operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ тогда и только тогда, когда X — F-пространство [5, теорема 1].

8. $\operatorname{Con} C^{+}(X) = \operatorname{Con} C^{\vee}(X)$ тогда и только тогда, когда X — P-пространство [5, теорема 2].

9. Решетка $\operatorname{Con} C^{+}(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда X является F-пространством (в печати).

10. Если X есть F-пространство, то решетка $\operatorname{Con} C^{\vee}(X)$ дистрибутивна (в печати).

11. Отношения ρ_A, $A \subseteq X$, — это в точности замкнутые конгруэнции на $S(X)$ с топологией поточечной сходимости [10, теорема 1].

12. Максимальные конгруэнции на полуполях $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ имеют вид $\gamma(M)$ по всем $\mathbb{R}$-идеалам M кольца $C(X)$ [9, теорема 2], [12, теорема 2.1]. Идеал M называется $\mathbb{R}$-*идеалом*, если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно полю $\mathbb{R}$ действительных чисел. Максимальные конгруэнции на полукольцах $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ суть двухклассовые конгруэнции $\{P, C^{+}(X)\backslash P\}$ по всем простым идеалам P полукольца $C^{+}(X)$ [2, предложение 3.4].

13. Предмаксимальные конгруэнции на полукольцах $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ исчерпываются конгруэнциями $\gamma(M)$, M — $\mathbb{R}$-идеал кольца $C(X)$ [8, теорема 2], [12, теорема 2.2].

14. Всякое хьюиттовское пространство X определяется (однозначно с точностью до гомеоморфизма) каждой из решеток $\operatorname{Con} S(X)$ [8, теорема 2], [9, следствие 2], [12, предложение 2.4]. Отсюда вытекает, что для любых топологических X и Y решетки $\operatorname{Con} S(X)$ и $\operatorname{Con} S(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $S(X)$ и $S(Y)$ изоморфны.

Лемма 1 ([3, теорема на с. 23]). *Для произвольных полуколец S и T с единицей 1 верны следующие утверждения:*

1) любая конгруэнция полукольца $S \times T$ имеет вид $\rho = \rho_1 \times \rho_2$:

$$(f_1, g_1)\rho(f_2, g_2) \Leftrightarrow f_1\rho_1 f_2 \text{ и } g_1\rho_2 g_2;$$

2) любая конгруэнция ρ_1 полукольца S может быть задана правилом $f_1\rho_1 f_2 \Leftrightarrow (f_1, 0)\rho(f_2, 0)$, где $\rho \in \operatorname{Con}(S \times T)$, аналогично для T;

3) эти соответствия устанавливают изоморфизм решеток:

$$\operatorname{Con}(S \times T) \cong \operatorname{Con} S \times \operatorname{Con} T.$$

Доказательство. Для конгруэнций $\rho_1 \in \operatorname{Con} S$ и $\rho_2 \in \operatorname{Con} T$ определим бинарное отношение $\rho_1 \times \rho_2$ на $S \times T$: $(s, t)(\rho_1 \times \rho_2)(s', t') \Leftrightarrow s\rho s'$ и $t\rho t'$ для любых $s, s' \in S$ и $t, t' \in T$. Очевидно, что отношение $\rho_1 \times \rho_2$ является конгруэнцией на $S \times T$.

Обратно. Рассмотрим произвольную конгруэнцию ρ на полукольце $S \times T$. Для любых $s, s' \in S$ и $t, t' \in T$ положим $s\rho_1 s'$, $t\rho_2 t'$ тогда и только тогда, когда $(s, 0)\rho(s', 0)$ и, соответственно, $(0, t)\rho(0, t')$. Очевидно, ρ_1 и ρ_2 — конгруэнции на S и T соответственно. Покажем, что $\rho = \rho_1 \times \rho_2$. Если $(s, t)(\rho_1, \rho_2)(s', t')$, то $(s, t) = ((s, 0) + (0, t))\rho((s', 0) + (0, t')) = (s', t')$. Если же $(s, t)\rho(s', t')$, то $(s, 0) = (s, t)(1, 0)\rho(s', t')(1, 0) = (s', 0)$ и, аналогично, $(0, t)\rho(0, t')$. То есть, $s\rho_1 s'$ и $t\rho_2 t'$, откуда $(s, t)(\rho_1 \times \rho_2)(s', t')$. Очевидно, тем самым установлен изоморфизм $\operatorname{Con}(S \times T) \cong \operatorname{Con} S \times \operatorname{Con} T$. □

Доказанное предложение верно и для полутел [7, теорема 1].

Лемма 2. *Для полукольца или полуполя $S(X)$ и для любого открыто-замкнутого множества A топологического пространства X конгруэнция ρ_A дополняема в $\operatorname{Con} S$ и ее единственным дополнением служит конгруэнция $\rho_{X \setminus A}$.*

Действительно, пусть множество A открыто-замкнуто в X. Для произвольных $f, g \in S$ имеем $f\rho_A q \rho_{X\setminus A} g$, где функция $q \in S(X)$ равна f на множестве A и совпадает с g на $X \setminus A$. То есть $\rho_A \circ \rho_{X\setminus A} = \mathbf{1}$. Равенство $\rho_A \cap \rho_{X\setminus A} = \mathbf{0}$ очевидно. Таким образом, конгруэнции ρ_A и $\rho_{X\setminus A}$ перестановочны и служат дополнениями друг друга.

Откуда следует, что

$$S(X) \cong S(X)/\rho_A \times S(X)/\rho_{X\setminus A}, \quad S(X)/\rho_A \cong S(A) \text{ и } S/\rho_{X\setminus A} \cong S(X\setminus A).$$

Рассмотрим произвольное дополнение ρ конгруэнции ρ_A. Из леммы 1 следует, что $\rho = \rho_1 \times \rho_2$, где $\rho_1 \in \operatorname{Con} S(A)$, $\rho_2 \in \operatorname{Con} S(X \backslash A)$, $\rho_A = \mathbf{0}_{S(A)} \times \mathbf{1}_{S(X\backslash A)}$ и $\rho_{X\backslash A} = \mathbf{1}_{S(A)} \times \mathbf{0}_{S(X\backslash A)}$.

Так как $\rho \vee \rho_A = \mathbf{1}_{S(X)}$ и $\rho \cap \rho_A = \mathbf{0}_{S(X)}$, то $\mathbf{1}_{S(A)} \times \mathbf{1}_{S(X\backslash A)} = \mathbf{1}_{S(X)} = (\rho_1 \times \rho_2) \vee (\mathbf{0}_{S(A)} \times \mathbf{1}_{S(X\backslash A)}) = (\rho_1 \vee \mathbf{0}_{S(A)}) \times (\rho_2 \vee \mathbf{1}_{S(X\backslash A)}) = \rho_1 \times \mathbf{1}_{S(X\backslash A)}$ и $\mathbf{0}_{S(A)} \times \mathbf{0}_{S(X\backslash A)} = \mathbf{0}_{S(X)} = (\rho_1 \times \rho_2) \cap (\mathbf{0}_{S(A)} \times \mathbf{1}_{S(X\backslash A)}) = (\rho_1 \cap \mathbf{0}_{S(A)}) \times (\rho_2 \cap \mathbf{1}_{S(X\backslash A)}) = \mathbf{0}_{S(A)} \times \rho_2$.

Откуда $\rho_1 = \mathbf{1}_{S(A)}$, $\rho_2 = \mathbf{0}_{S(X\backslash A)}$, и $\rho = \rho_{X\backslash A}$.

3. Строение псевдодополнений

Лемма 3. *Для любых конгруэнций ρ, τ полукольца или полуполя $S(X)$ равенство $\rho \cap \tau = \mathbf{0}$ эквивалентно тому, что $(f-g)(h-q) = 0$ для всех функций $f, g, h, q \in S(X)$ таких, что $f\rho g$ и $h\tau q$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим конгруэнции $\rho, \tau \in \operatorname{Con} S(X)$ с условием $\rho \cap \tau = \mathbf{0}$. Предположим от противного, что существуют функции $f, g, h, q \in S(X)$ такие, что $f\rho g$, $h\tau q$ и $(f-g)(h-q) \neq 0$. Тогда $(fh + gq) - (gh + fq) \neq 0$.

Пусть сначала $S(X)$ сократимо. Имеем $(fh + gq)(\rho \cap \tau)(gh + fq)$, но $fh + gq \neq gh + fq$. То есть $\rho \cap \tau \neq \mathbf{0}$; противоречие.

Пусть теперь $S(X)$ идемпотентно. Тогда $f(x_0) \neq g(x_0)$ и $h(x_0) \neq q(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Не умаляя общности, можно считать, что $f(x_0) > g(x_0)$ и $h(x_0) > q(x_0)$. Имеем $(fh \vee gq)(\rho \cap \tau)(gh \vee fq)$, причем

$$f(x_0)h(x_0) \vee g(x_0)q(x_0) = f(x_0)h(x_0) > g(x_0)h(x_0) \vee f(x_0)q(x_0).$$

Значит, $fh \vee gq \neq gh \vee fq$, и $\rho \cap \tau \neq \mathbf{0}$. Противоречие.

Получаем $(f-g)(h-q) = 0$ для любых функций $f, g, h, q \in S$ таких, что $f\rho g$, $h\tau q$.

Достаточность. Рассмотрим конгруэнции $\rho, \tau \in \operatorname{Con} S(X)$, для которых выполняется условие $(f-g)(h-q) = 0$ при любых функциях $f, g, h, q \in S(X)$ таких, что $f\rho g$ и $h\tau q$. Возьмем функции f и g, находящиеся в отношении $\rho \cap \tau$. Тогда $(f-g)(f-g) = 0$, или $f = g$. То есть $\rho \cap \tau = \mathbf{0}$. □

Лемма 4. *Для произвольных функций $f, g, h, q \in S(X)$ равенство $\rho(f, g) \cap \rho(h, q) = \mathbf{0}$ эквивалентно равенству $(f-g)(h-q) = 0$.*

Действительно, необходимость доказана в лемме 3 Для доказательства достаточности заметим, что равенство $(f-g)(h-q) = 0$ влечет $(f-g)C(X) \cap (h-q)C(X) = \{0\}$ и $\rho(f, g) \subseteq \gamma((f-g)C(X))$, $\rho(h, q) \subseteq \gamma((h-q)C(X))$. Поэтому $\rho(f, g) \cap \rho(h, q) \subseteq \gamma((f-g)C(X) \cap (h-q)C(X))) = \gamma(\{0\}) = \mathbf{0}$.

Теорема. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Тогда для полукольца или полуполя $S(X)$ любая конгруэнциия ρ решетки $\operatorname{Con} S(X)$ имеет псевдодополнение ρ_A для некоторого единственного канонически замкнутого подмножества A пространства X. Обратно, для каждого канонически замкнутого множества A в X конгруэнция ρ_A является псевдодополнением некоторой конгруэнции на $S(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную конгруэнцию ρ на $S(X)$. Построим конгруэнцию

$$\tau = \gamma\Big(\bigcap_{\substack{f,g\in S(X),\\ f\rho g}} \operatorname{Ann}(f-g)\Big).$$

Для любых функций $f, g, h, q \in S$ таких, что $f\rho g$ и $h\tau q$, по определению конгруэнции τ имеем $h - q \in \operatorname{Ann}(f - g)$, или $(f - g)(h - q) = 0$. По лемме 3 получаем $\rho \cap \tau = \mathbf{0}$.

Рассмотрим теперь произвольную конгруэнцию $\sigma \in \operatorname{Con} S(X)$ такую, что $\rho \cap \sigma = \mathbf{0}$. По лемме 3 для произвольных функций $f, g, h, q \in S(X)$ таких, что $f\rho g$ и $h\sigma q$, имеем $(f - g)(h - q) = 0$. Значит,

$$h - q \in \gamma\Big(\bigcap_{\substack{u,v\in S(X),\\ u\rho v}} \operatorname{Ann}(u-v)\Big).$$

Откуда $\sigma \subseteq \tau$.

Итак, τ является псевдодополнением конгруэнции ρ на полукольце или полуполе $S(X)$. При этом, $\tau = \gamma(\mathrm{M}_A) = \rho_A$, где $A = \overline{\bigcup \operatorname{coz}(f-g)}$ по всем $f, g \in S$, для которых $f\rho g$, канонически замкнуто.

Пусть существует замкнутое множество $B \in X$ такое, что $\rho^* = \rho_B = \gamma(\mathrm{M}_B)$. В силу единственности псевдодополнения $\gamma(\mathrm{M}_B) = \gamma(\mathrm{M}_A)$, Откуда, $\mathrm{M}_B = \delta(\gamma(\mathrm{M}_B)) = \mathrm{M}_A$, и $A = B$ в силу тихоновости пространства X.

Обратно, возьмем произвольное канонически замкнутое множество A пространства X. Ясно, что $\mathrm{M}_A = \operatorname{Ann} \mathrm{M}_B$ при $B = X\backslash A^0 = \overline{X\backslash A}$, и $\mathrm{M}_B = \operatorname{Ann} \mathrm{M}_A$. Тогда, $\rho_A = \gamma(\mathrm{M}_A) = (\gamma(\mathrm{M}_B))^*$ в силу леммы 3. □

4. Следствия

Предложение 1. *Для любого топологического пространства X решетки $\operatorname{Con} U(X)$, $\operatorname{Con} U^\vee(X)$, $\operatorname{Con} C^+(X)$, $\operatorname{Con} C^\vee(X)$ суть решетки с псевдодополнениями.*

Достаточно заметить, что $\operatorname{Con} S(X) \cong \operatorname{Con} S(\tau X)$.

Предложение 2. *Для любого топологического пространства X псевдодополнение главной конгруэнции на $S(X)$, порожденной парой функций f и g, имеет вид $\gamma(\operatorname{Ann}(f-g)) = \mathrm{M}_A$, где $A = \overline{\operatorname{coz}(f-g)}$.*

Является непосредственным следствием теоремы.

Предложение 3 ([11]). *Бинарное отношение ρ на полукольце или полуполе $S(X)$ является дополняемой конгруэнцией тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_A$ для некоторого единственного открыто-замкнутого подмножества A топологического пространства X. Любая дополняемая конгруэнция на $S(X)$ имеет единственное дополнение.*

Доказательство. Необходимость. Пусть конгруэнция $\rho \in \operatorname{Con} S(X)$ имеет некоторое дополнение ρ'. По теореме она имеет псевдодополнение $\rho^* = \rho_B$, где

$$B = \overline{\bigcup_{\substack{f,g \in S(X), \\ f\rho g}} \operatorname{coz}(f-g)}.$$

Заметим, что $\rho' \subseteq \rho_B$. Поэтому ρ_B также является дополнением конгруэнции ρ. В свою очередь, ρ_B имееет псевдодополнение ρ_A, где

$$A = \overline{\bigcup_{\substack{f,g \in S(X), \\ f\rho_B g}} \operatorname{coz}(f-g)},$$

причем $\rho \subseteq \rho_A$.

Имеем $\rho_{A\cup B} = \rho_A \cap \rho_B = \mathbf{0}$ и $\rho_{A\cap B} \supseteq \rho_A \vee \rho_B = \mathbf{1}$. Поэтому $A \cup B = X$ и $A \cap B = \varnothing$ в силу тихоновости X. Значит, A и B — дополнительные друг другу открыто-замкнутые множества. В силу леммы 2 имеем $\rho = \rho_A$, $\rho' = \rho_B$. Это доказывает единственность дополнения конгруэнции ρ.

Достаточность доказана в лемме 2. □

Предложение 4 ([4, §1.3, предложение 2]). *Аннуляторные идеалы кольца $C(X)$ — это в точности идеалы M_A по различным канонически замкнутым множествам A тихоновского пространства X.*

Доказательство. По определению произвольный аннуляторный идеал кольца $C(X)$ имеет вид $\operatorname{Ann} I = \{f \mid \forall g \in I, fg = 0\}$ для некоторого идеала I в $C(X)$. Тогда по теореме $\gamma(\operatorname{Ann} I) = (\gamma(I))^* = \gamma(\mathrm{M}_A)$ для однозначно определенного канонически замкнутого множества $A \subseteq X$.

Рассмотрим теперь произвольное канонически замкнутое множество A. По теореме конгруэнция $\rho_A = \gamma(\mathrm{M}_A)$ является псевдодополнением некоторой конгруэнции ρ. Откуда $\mathrm{M}_A = \mathrm{Ann}\,\delta(\rho)$. □

Предложение 5. *Для любого топологического пространства X справедливы утверждения:*

1) *множество всех псевдодополнений конгруэнций из $\mathrm{Con}\,S(X)$ относительно отношения включения образует булеву решетку, антиизоморфную решетке $\mathrm{L}(\tau X)$ всех канонически замкнутых подмножеств пространства τX;*

2) *упорядоченное множество всех дополняемых конгруэнций из $\mathrm{Con}\,S(X)$ изоморфно булевой решетке $\mathrm{B}(X)$ всех открыто-замкнутых множеств пространства X.*

Доказательство. 1) Будем считать, что $X = \tau X$ в силу замечания 1. По теореме отображение $A \mapsto \gamma(\mathrm{M}_A)$ является антигомоморфизмом упорядоченного множества $\mathrm{L}(X)$ на упорядоченное множество псевдодополнений всевозможных конгруэнций на $S(X)$. Легко видеть, что $\mathrm{L}(X)$ будет булевой решеткой относительно объединения множеств, взятия нижней грани $A \wedge B = \overline{A^0} \wedge \overline{A^0} = \overline{A^0 \cap B^0}$ и дополнения $A' = \overline{X \setminus A^0}$, $A, B \in \mathrm{L}(X)$ [6, глава IV, §6].

Отметим, что по предложению 4 аннуляторные идеалы кольца $C(X)$ также образуют булеву решетку, изоморфную $\mathrm{L}(\tau X)$.

2) следует из предложения 3. □

Полукольцо или полуполе $S(X)$ называется:

слабо риккартовым, если для любых главных конгруэнций $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}\,S(X)$ таких, что $\rho \cap \sigma = \mathbf{0}$, выполняется равенство $\rho^* \vee \sigma^* = \mathbf{1}$;

риккартовым, если псевдодополнение любой его главной конгруэнции дополняемо;

бэровским, если псевдодополнение любой его конгруэнции дополняемо.

Топологическое пространство называется *базисно несвязным*, если внутренности всех его нуль-множеств замкнуты.

Тихоновское пространство называется *экстремально несвязным*, если все его канонически замкнутые множества открыты. Экстремально несвязные пространства *нульмерны*, то есть обладают открытой базой из открыто-замкнутых множеств.

Предложение 6. *Для топологического пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ слабо риккартово тогда и только тогда, когда X — F-пространство.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $S(X)$ слабо риккартово. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C(X)$. Обозначим $u = (f \vee 0) + 1$, $v = (1 - (f \wedge 0))$ Тогда $f = u - v$ и $u, v \in S(X)$. Возьмем главные конгруэнции $\rho(u, 1)$ и $\rho(v, 1)$ Так как $(u-1)(v-1) = 0$, то $\rho(u,1) \cap \rho(v,1) = \mathbf{0}$ по лемме 4. Поэтому и по предложению 2 имеем

$$\gamma(C(X)) = \mathbf{1} = \rho(u,1)^* \vee \rho(v,1)^* = \gamma(\mathrm{Ann}(u-1)) \vee \gamma(\mathrm{Ann}(v-1)) \subseteq \\ \subseteq \gamma(\mathrm{Ann}(u-1) + \mathrm{Ann}(v-1)).$$

Откуда $C(X) = \mathrm{Ann}(u-1) + \mathrm{Ann}(v-1)$. Значит, $1 = g + h$ для некоторых функций $g \in \mathrm{Ann}(u-1)$ и $h \in \mathrm{Ann}(v-1)$. Причем $Z(g) \supseteq \mathrm{coz}(u-1) = \mathrm{pos}\, f$ и $Z(h) \supseteq \mathrm{coz}(u-1) = \mathrm{neg}\, f$. Так как $Z(g) \cap Z(h) = \varnothing$, то $\mathrm{neg}\, f$ и $\mathrm{pos}\, f$ функционально отделимы. Поэтому X есть F-пространство.

Достаточность. Пусть X является F-пространством. Возьмем функции $f, g, h, q \in S(X)$ такие, что $\rho(f,g) \cap \rho(h,q) = \mathbf{0}$. По лемме 4 $(f-g)(h-q) = 0$, то есть $\mathrm{coz}(f-g) \cap \mathrm{coz}(h-q) = \varnothing$. Покажем, что $\rho(f,g)^* \vee \rho(h,q)^* = \mathbf{1}$. На F-пространстве X для произвольных функций $u, v \in S(X)$ найдется функция $w \in S(X)$ такая, что $w = u$ на $\mathrm{coz}(f-g)$ и $w = v$ на $\mathrm{coz}(h-q)$. Тогда $u\gamma(\mathrm{Ann}(f-g))w\gamma(\mathrm{Ann}(h-q))v$. Поэтому $\gamma(\mathrm{Ann}(f-g)) \circ \gamma(\mathrm{Ann}(h-q)) = \mathbf{1}$. По предложению 2 получаем $\rho(f,g)^* \vee \rho(h,q)^* = \mathbf{1}$. □

Предложение 7. *Для топологического пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ риккартово тогда и только тогда, когда X — базисно несвязное пространство.*

Доказательство. Пусть $S(X)$ риккартово. Возьмем произвольную функцию $f \in C(X)$. Составим функцию $u = (f+1) \vee \frac{1}{2} \in S(X)$. Имеем $Z(u-1) = Z(f)$. Рассмотрим главную конгруэнцию $\rho(u,1)$ По предложению 2 имеем $\rho(u,1)^* = \gamma(\mathrm{Ann}(u-1)) = \gamma(\mathrm{Ann}\, f) = \mathrm{M}_A = \rho_A$, где $A = \overline{\mathrm{coz}\, f}$. Поскольку конгруэнция $\rho(u,1)^*$ дополняема, то множество A открыто-замкнуто в силу предложения 3. Поэтому $Z(f)^0 = X \backslash A$ открыто-замкнуто.

Обратно, пусть пространство X базисно несвязно. Рассмотрим главную конгруэнцию $\rho(f,g)$, порожденную функциями $f, g \in S(X)$. По предложению 2 имеем $\rho(f-g)^* = \gamma(\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{coz}(f-g)}})$. Так как $Z(f-g)^0$ открыто-замкнуто, то и множество $X \backslash \overline{\mathrm{coz}(f-g)}$ открыто-замкнуто.

Для завершения доказательства осталось применить предложение 3. $\square$

Предложение 8. *Для тихоновского пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ является бэровским тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно.*

Доказательство. Пусть $S(X)$ — бэровское. Рассмотрим произвольное замкнутое множество $A \subseteq X$ и конгруэнцию ρ_A. Ее псевдодополнением служит конгруэнция $\rho_{X\backslash A^0}$ (см. теорему). Так как эта конгруэнция $\rho_{X\backslash A^0}$ дополняема и множество $X\backslash A^0$ замкнуто, то по теореме множество $X\backslash A^0$ открыто-замкнуто. То есть и A^0 замкнуто.

Обратно, пусть X экстремально несвязно. Возьмем произвольную конгруэнцию $\rho \in \operatorname{Con} S(X)$. По теореме ее псевдодополнение $\rho^* = \rho_A$ для некоторого канонически замкнутого множества $A \subseteq X$. В силу экстремальной несвязности пространства X множество A открыто-замкнуто. Значит, по предложению 3 конгруэнция ρ^* дополняема. $\square$

Предложение 9. *Для тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1) все конгруэнции из $\operatorname{Con} U(X)$ $(\operatorname{Con} U^{\vee}(X))$ дополняемы;

2) все главные конгруэнции из $\operatorname{Con} U(X)$ $(\operatorname{Con} U^{\vee}(X))$ дополняемы;

3) все конгруэнции на $S(X)$ — главные;

4) пространство X конечно.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из предложения 3.

2) $\Rightarrow$ 4). По условию и предложению 3 для произвольных $u, v \in U(X)$ найдется открыто-замкнутое множество $A \subseteq X$, для которого $\rho(u,v) = \rho_A$. По [2, следствие 3.1] все конгруэнции на $U(X)$ идеальны и, стало быть, X псевдокомпактно по факту 3.

Для любой $f \in C(X)$ $f = u - v$, где $u = (1 + (f \vee 0))$, $v = (1 - (f \wedge 0))$. Тогда $\gamma(M_A) = \rho(u,v) \subseteq \gamma((u-v)C(X)) \subseteq \gamma(M_A)$ для некоторого открыто-замкнутого множества $A \subseteq X$. Откуда $Z(f) = Z(u-v) = A$. Значит, X — P-пространство. А псевдокомпактные P-пространства конечны [15, chapter 4].

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть множество A замкнуто в X. По условию $\gamma(M_A) = \rho(f,g)$ для подходящих функций $f, g \in S(X)$. Тогда $\rho(f,g) \subseteq \gamma((f-g)C(X)) \subseteq \gamma(M_A)$. Откуда, $M_A = (f-g)C(X)$ и $A = Z(f-g)$. Поэтому функция $h = \sqrt{|f-g|} = (f-g)q = h^2|q|$ для некоторой функции $q \in$

$C(X)$. Следовательно, множество $A = Z(h)$ открыто-замкнуто. Поэтому пространство X дискретно.

Предположим от противного, что пространство X бесконечно. На X существует нефиксированный ультрафильтр $\mathcal{F}$, то есть максимальный фильтр на булеане множества X с пустым пересечением. Рассмотрим на $S(X)$ конгруэнцию $\rho(\mathcal{F})$: $f\rho(\mathcal{F})g$ тогда и только тогда, когда $f|_A = g|_A$ для некоторого $A \in \mathcal{F}$, $f, g \in S(X)$. Ясно, что конгруэнция $\rho(\mathcal{F})$ не является главной. Противоречие.

4) $\Rightarrow$ 3). Пусть X — конечное n-элементное пространство. Тогда $S(X) = (\mathbb{R}_0^+)^n$, если $S(X)$ — полукольцо, и $S(X) = (\mathbb{R}^+)^n$, если $S(X)$ — полуполе. Очевидно, $\operatorname{Con} \mathbb{R}_0^+ = \{\mathbf{0} = \rho(1,1), \mathbf{1} = \rho(0,1), \rho(1,2)\}$ и $\operatorname{Con} \mathbb{R}^+ = \{\mathbf{0} = \rho(1,1), \mathbf{1} = \rho(1,2)\}$. По лемме 1 и [7, теорема 1] любая конгруэнция из $\operatorname{Con} S(X)$ — главная.

Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) вытекает из предыдущего абзаца. □

Замечание 2. Все предложения пункта 4 имеют аналоги в теории колец непрерывных функций [4].

Замечание 3. Вообще говоря, булева решетка $\mathrm{L}(X)$ не определяет хьюиттовское пространство X. Достаточно рассмотреть непсевдокомпактное экстремально несвязное пространство X. По определению имеем $\mathrm{L}(X) = \mathrm{B}(X)$. Вместе с пространством X экстремально несвязными будут и его расширения νX и βX (см. [14] и замечание 1). При этом $\mathrm{B}(X) \cong \mathrm{B}(\nu X) \cong \mathrm{B}(\beta X)$. Значит, $\mathrm{L}(\nu X) = \mathrm{B}(\nu X) \cong \mathrm{B}(\beta X) = \mathrm{L}(\beta X)$, но хьюиттовские пространства νX и βX не гомеоморфны.

Литература

1. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984.

2. **Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы,конгруэнции// *Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т.4. №2. С. 493–510.*

3. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца: Пособие для студентов и аспирантов. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000.

4. **Вечтомов Е. М.** Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. М.: МПГУ, 1992.

5. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F-пространства// *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2008. № 8. С. 15–26.*

6. **Расёва Е., Сикорский Р.** Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

7. **Семенов А. Н.** О решетке конгруэнций полутел// *Вестник ВятГГУ. 2003. № 9. С. 92–95.*

8. **Семенова И. А.** Определеяемость хьюиттовских пространств X решеткой конгруэнций полуколец непрерывных неотрицательных функций на X// *Вестник Вятского гос. пед. ун-та. 1999. № 1. С. 20–23.*

9. **Семенова И. А**. Максимальные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций// *Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. № 1. С. 305–310.*

10. **Подлевских М. Н.** Замкнутые конгруэнции на полукольцах непрерывных функций// *Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 3. С. 947–952.*

11. **Чупраков Д. В.** Дополнения конгруэнций в полукольцах непрерывных функций// *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2009. Вып. 11. С. 122–127.*

12. **Чупраков Д. В.** О максимальных конгруэнциях на полукольцах непрерывных функций с идемпотентным сложением // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2008. Вып. 10. С. 99–110.*

13. **Широков Д. В.** Условия дистрибутивности решетки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций// *Вестник ВятГГУ. 2003. №8. С. 137–140.*

14. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.:Мир, 1986.

15. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1976.

16. **Hutchins H. J., Weinert H. J.** Homomorphisms and kernels of semifields// *Periodica Mathematica. 1990. V 5. №2. P. 113–152.*

Summary

Vechtomov E.M., Chuprakov D.V. Pseudo-complements in a lattice of congruence of semirings of continuous functions

We investigate the properties of lattice of congruencies of semirings and semifields of continuous nonnegative (positive) functions, set on an arbitrary topological space X. It's proved that these lattices are lattices with pseudocomplements and every its element has not more than one complement. In terms of lattices of congruencies of semirings of continuous functions over X, the characterizations of some properties of space X are obtained.

Вятский государственный
гуманитарный университет

Поступила 21.01.2009