*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008*

УДК 513.83

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ ДО ИНТЕГРАЛА[1]

Л.Я. Савельев [2]

Рассматривается бинарная алгебра $(B, +, \cdot)$ и абелева полугруппа $(H, +)$ с нейтральными элементами 0 и топологиями, обеспечивающими непрерывность аддитивных и мультипликативных переносов. Пусть A – подалгебра алгебры B. Назовем абстрактной мерой аддитивное и непрерывное отображение $m : A \to H$. Одной из фундаментальных задач общей теории меры является исследование условий существования непрерывного продолжения $\bar{m} : \bar{A} \to H$ меры $m : A \to H$ на замыкание $\bar{A}$ ее области определения. Решению этой задачи посвящен ряд работ автора, указанных в списке. В статье дается их краткий обзор и описываются некоторые новые результаты. Они посвящены продолжениям векторной меры до интегральной суммы и интегральной суммы до интеграла.

1. Непрерывное продолжение меры

1.1. В статье [1] рассматривается булево кольцо B, его подкольцо A и топологическая абелева группа H. Топология для B определяется фильтром окрестностей нуля в H и мерой $m : A \to H$. При некоторых предположениях о мере m эта топология согласуется со структурой кольца B и делает меру равномерно непрерывной. Эго позволяет применить к ней общую теорему о непрерывном продолжении отображений. В рамках одной модели подробно рассматриваются конечно и счетно аддитивные числовые и булевы меры. Соответственно получаются *жордановы и лебеговы продолжения*. В статье [2] описываются общие свойства

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00422).

[2]Новосибирский государственный университет

секвенциальной порядковой (*борелевской*) топологии для булевых колец множеств и мер, являющихся непрерывными отображениями подколец этих колец в регулярные абелевы полугруппы. Сформулированы общие условия существования непрерывных продолжений мер. Доказано, что для числовых мер борелевская непрерывность эквивалентна счетной аддитивности и ограниченности, а для булевых – счетной аддитивности. В общем случае при борелевской топологии непрерывны только переносы, а не операции. Доказано, что числовые и булевы меры продолжаются с колец на их замыкания, совпадающие с порожденными сигма – кольцами.

Статья [3] посвящена условиям продолжимости *векторных мер*, определенных на кольце множеств с борелевской топологией и принимающих значения в локально выпуклом пространстве.Композиции с линейными функционалами векторных мер являются скалярными мерами. Полунормы позволяют определить вариации векторной меры. Выделяются классы A, B, C, E, V счетно-аддитивных, ограниченных, непрерывных, продолжимых, имеющих ограниченные вариации мер. Доказывается, что $V \subseteq C \subseteq E \subseteq A \subseteq B$. Приводятся следствия для различных частных случаев. Если пространство значений меры конечномерно, то $V = C = E = A = B$. Если оно монтелево или слабо секвенциально полное банахово, то $A = B$. Приводится пример $A \neq B$. Отмечается возможность переноса части результатов на булевы кольца с некоторыми другими топологиями и меры со значениями в абелевых полугруппах.

В приложении "Непрерывные меры" к книге [4] рассматриваются *меры на полутопологических булевых кольцах*, принимающие значения в абелевых полугруппах. Полутопологическим называется кольцо с топологией, при которой аддитивный и мультипликативный переносы непрерывны. Выделяются топологии, порождаемые секвенциальными пределами, удовлетворяющими условиям Фреше и Урысона. Рассматриваются секвенциально непрерывные и топологически непрерывные меры. Рассматриваются порядковый, монотонный и исчерпывающий секвенциальные пределы и порождаемые ими топологии. Доказываются теоремы о секвенциальном и топологическом продолжениях непрерывных мер соответственно на секвенциальное и топологическое замыкания области определения.

В статье [5] подробно описываются свойства топологических булевых колец с частично непрерывными операциями. Рассматриваются меры со значениями в равномерных абелевых полугруппах. Доказывается, что непрерывная в точке 0 мера сходится в каждой точке замыкания области определения. Это позволяет сформулировать теоремы о непрерывных продолжениях мер, обобщающие полученные раньше. Выделяются секвенциальные топологии, при которых каждое секвенциально замкнутое множество топологически замкнуто. Доказываются теоремы о топологическом и секвенциальном продолжениях меры.

Теорема о топологическом продолжении меры. *Пусть m – непрерывная мера на подалгебре A топологической булевой алгебры C, принимающая значения в полной отделимой абелевой полугруппе H. Существует единственная непрерывная мера $\bar{m}$ на замыкании $\bar{A}$ алгебры A, принимающая значения в H и продолжающая m.*

Аналогичная теорема верна для мер, непрерывных при секвенциальной топологии и принимающих значения в секвенциально полной отделимой абелевой полугруппе.

Теорема о секвенциальном продолжении меры. *Пусть m – непрерывная при секвенциальной топологии мера на подалгебре A топологической булевой алгебры C, принимающая значения в секвенциально полной отделимой абелевой полугруппе H. Существует единственная непрерывная мера $\bar{m}$ на секвенциальном замыкании $\bar{A}$ алгебры A, принимающая значения в H и продолжающая m.*

1.2. Статья [6] посвящена мерам, непрерывным при общей порядковой топологии, определяемой порядково сходящимися *направленностями* для класса всех частей данного множества. Эти меры называются *вполне непрерывными.* Доказывается, что вполне непрерывные меры дискретны и исчерпываемы, а исчерпываемость эквивалентна существованию плотности, удовлетворяющей условию Коши. Рассматриваются меры, принимающие значения в частично равномерных абелевых полугруппах. Доказывается относительная компактность образа вполне непрерывной меры. Описываются ее атомические представления. Доказывается теорема о существовании и единственности секвенциального продолжения вполне непрерывной меры. Выделяется групповая компонента полугрупповой меры.

В статье [7] рассматриваются *индуктивные пределы направленностей* непрерывных абстрактных мер. Описываются индуктивные пределы топологических булевых алгебр и колец. Формулируются критерии замкнутости, отделимости и сходимости. Выделяются секвенциальные топологии. Описывается непрерывное присоединение единицы.

Доказывается, что индуктивный предел возрастающей направленности непрерывных мер является непрерывнои мерой. Доказываются теоремы о топологическом и секвенциальном продолжениях индуктивного предела непрерывных мер. Формулируются следствия для векторных мер со значениями в банаховом пространстве со свойством Радона-Никодима.

В заметке [8] доказываются две теоремы о непрерывных продолжениях аддитивных на ортогональных парах элементов отображений топологических орторешеток в топологические полугруппы. Предлагается общее определение отношения ортогональности для решетки с нулем и операцией вычитания. Рассматриваются топологические орторешетки и частично равномерные топологические абелевы полугруппы. Доказываются теоремы о продолжении непрерывной меры на топологическое и секвенциальное замыкания ортоподрешетки, являющейся областью определения данной меры.

1.3. В препринте [9] и статье [10] описываются *абстрактные внешние меры.* Внешней мерой называется функция, обладающая свойством: если элементы достаточно малы, то их сумма имеет произвольно малое значение. это свойство обобщает классическое неравенство треугольника. Внешняя мера определяется на подалгебре булевой алгебры и принимает значения в топологическом пространстве с выбранной нулевой точкой. Фильтр окрестностей этой точки служит шкалой для измерения малости значений функции. Для разных классов абстрактных внешних мер доказано существование продолжений, сохраняющих класс. Сформулированы условия единственности продолжения.

Из теорем о внешних мерах получены следствия для абстрактных мер. Доказано в частности, что классическое условие счетной аддитивности меры можно заменить условием непрерывности меры при некоторой локально выпуклой топологии.

Выделяются следующие результаты. Пусть E – непустое множество, R – некоторое кольцо его *измеримых* частей, $S = \{Y \subseteq E : YR \subseteq R\}$, F – отделимое локально выпуклое пространство, $m : R \to F$ – счетно-аддитивная мера, $n : S \to F$ – счетно-аддитивное продолжение меры m. Мера m, для которой такое продолжение n существует, называется *наследственно продолжимой.* Мера m, которая сходится по определяемому включением возрастающему направлению для R, называется *замкнутой.* Мера m, которая каждый отрезок $[0, X] \subseteq R$ отображает в ограниченное множество, называется *локально ограниченной.* Замкнутость меры эквивалентна ее непрерывности при определяемой мерой внешней топологии. Существует тесная связь между наследственной продолжимостью меры, ее исчерпываемостью и ее суммируемостью на дизъюнктивных последовательностях измеримых множеств.

Теорема о наследственной продолжимости меры. *Если F полное, то замкнутая мера m наследственно продолжима. Если F специальное секвенциально полное или слабо полное, то наследственная продолжимость меры m эквивалентна ее локальной ограниченности.*

1.4. В статье [11] рассматриваются решетки с инволютивными начальными дополнениями. Для них определяются операция вычитания и отношение ортогональности. Описываются алгебраические свойства получающихся дифференциальных орторешеток и мер, являющихся ортоаддитивными монотонными операторами на этих решетках. Доказывается теорема об условиях их корректной продолжимости.

В заметке [12] и книге [13] рассматривается общее пространство с мерой. Так называется тройка (C, B, m), составленная из спектрального множества C, базового класса B линейно свободных множеств элементов модуля E и аддитивного на каждом базовом множестве $B \subseteq C$ отображения $m : C \to F$ множества C в модуль F (*меры*). Эта конструкция объединяет классические (коммутативные) и квантовые (некоммутативные) пространства с мерами. Выделяются меры на множествах индикаторов и на множествах проекторов, объединяемых свойством идемпотентности. Общая модель позволяет объединить классический и квантовый случаи, рассматриваемые в теоретической физике [14]. Из определений следует, что рассматриваемая мера является линейным отображением. Она линейно продолжается до интегральной суммы на линейную оболочку своей области определения. В случае, когда для рассматриваемых модулей определены топологии, при которых скалярные и векторные операции непрерывны, выделяются непрерывные меры. Формулируются критерий непрерывности интегральной суммы, порождаемой непрерывной мерой и теорема о непрерывном продолжении интегральной суммы до регулярного интеграла на замыкании ее области определения.

2. Меры и интегральные суммы

2.1. Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ с ассоциативными, коммутативными, имеющими общую единицу 1 скалярными кольцами. Предполагается, что $\mathbb{K}$ есть подкольцо кольца $\mathbb{L}$. Выберем непустой наследственный класс $\mathcal{B}$ линейно свободных множеств $B \subseteq E$. Наследственность $\mathcal{B}$ означает, что вместе с множеством B класс $\mathcal{B}$ содержит все его части: $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{B}$. Назовем $\mathcal{B}$ *базовым классом* или *мультибазой*, а множества $B \in \mathcal{B}$ – *базовыми* множествами или просто *базами*. Выберем также множество $C \subseteq E$ такое, что для каждого конечного $X \subseteq C$ существует база $B \subseteq C$, аддитивная оболочка $A(B)$ которой содержит X. Это значит, что каждый вектор из X равен сумме некоторых векторов из B: по определению $A(B)$ состоит из всех конечных сумм элементов B. Назовем множество C *спектральным* по $\mathcal{B}$ или просто *спектром*. Возьмем отображение $m : C \to F$, аддитивное на каждой конечной базе $B \subseteq C$, сумма векторов которой принадлежит C. Назовем m *мерой*. Тройку $(C, \mathcal{B}, m)$ будем называть *пространством с мерой*.

Рассмотрим: поле $\mathbb{P}$, кольцо $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ всех последовательностей элементов $\mathbb{P}$, его подкольцо $\mathcal{A}$, идеал $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$, фактор-кольцо $\mathbb{K} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$, множество U, кольцо $E = \mathcal{F}(U, \mathbb{K})$ всех функций $x : U \to \mathbb{K}$, алгебру $(\mathbb{K}, E)$. Векторами алгебры $(\mathbb{K}, E)$ являются скалярные функции x, а скалярами – фактор-множества последовательностей элементов поля $\mathbb{P}$. Обозначим через P множество всех индикаторов, определенных на U. Будем отождествлять множества в U с их индикаторами: $\mathcal{P}(U) = P \subseteq E$. Ортогональность индикаторов означает дизъюнктность соответствующих множеств. Семейства попарно ортогональных векторов будем называть *ортосемействами*. Порядок для множеств определяет порядок для индикаторов. Говорят, что множество Q индикаторов образует *полукольцо*, если:

$$(a)\ 0 \in Q, \qquad (b)\ xy \in Q \quad (x, y \in Q), \qquad (c)\ y - x = \sum z_k \quad (x \leqslant y)$$

для некоторого конечного ортосемейства векторов $z_k \in Q$. При этом возможно, что $y - x \notin Q$. Так как $x \leqslant y$ эквивалентно $xy = x$ и $z_j z_k = 0$ $(j \neq k)$, то

$$0 = x - x = x(y - x) = \sum x z_k \Rightarrow x z_k = 0,$$

и поэтому условие (c) эквивалентно равенству

$$(c1)\ y = x + \sum z_k, \quad x z_k = z_j z_k = 0 \quad (j \neq k).$$

Оно означает, что каждый индикатор $y \in Q$, больший индикатора $x \in Q$, равен сумме некоторых попарно ортогональных индикаторов из Q, одним из которых является x.

2.2. Возьмем: класс $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ всех линейно свободных ортомножеств в E, полукольцо $C = Q$ индикаторов множеств в U, векторное пространство $(\mathbb{K}, F)$ и *ортоаддитивную* функцию $m : Q \to F$. Ортоаддитивность m означает, что

$$m\left(\sum b\right) = \sum m(b) \quad (b \in B)$$

для каждой базы $B \subseteq Q$ такой, что $\sum b \in Q$. Если поле P бесконечно, то для конечного семейства индикаторов $x_i \in Q$ верно $\sum x_i \in Q$ тогда и только тогда, когда индикаторы x_i попарно ортогональны. В этом случае ортоаддитивность функции m эквивалентна ее обычной аддитивности. Здесь рассматриваются только бесконечные поля. Если в смешанном произведении вектора на скаляр нет делителей нуля, то ортомножество линейно свободно тогда и только тогда, когда ему не принадлежит нулевой вектор.

Часто бывает полезен алгоритм ортогонализации последовательности индикаторов. Рассмотрим последовательность индикаторов $x_i \in Q$ и определяемую ею последовательность индикаторов

$$y_j = x_j - \left(\bigcup_{i<j} x_i\right) x_j \in P.$$

(В скобках верхняя грань индикаторов x_i.) Легко доказываются [13, 3.1.3] следующие утверждения.

Лемма. *Для всех номеров j, k, n верны соотношения*

$$y_j \leqslant x_j, \qquad y_j y_k = 0 \quad (j \neq k), \qquad \sum_{j \leqslant n} y_j = \bigcup_{i<j} x_i.$$

Предложение. *Для кажых индикатора $y \in Q$ и ортосемейства $u_i \in Q$, $u_i \leqslant y$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ существует ортосемейство индикаторов $v_j \in Q$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ такое, что $u_i v_j = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ и*

$$y = \sum u_i + \sum v_j.$$

Равенство предложения обобщает равенство (с1). Основной результат пункта формулирует

Теорема о полукольце индикаторов. *Полукольцо индикаторов Q является спектральным множеством по ортогональной мультибазе $\mathcal{R}$.*

□ Рассмотрим множество индикаторов $x_i \in Q$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Если $m = 1$, то теорема верна: элементарное множество $X = \{x_1\}$ само является нужной базой. Предположим, что теорема верна для $m = n$, и докажем, что тогда она верна для $m = n + 1$. Пусть

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A(B), \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j \qquad (\alpha_{ij} \in \{0,1\}, b_j \in B \in \mathcal{R}).$$

Положим $c_j = b_j x_{n+1}$. Из определения полукольца следует, что

$$c_j \in Q, \qquad b_j = c_j + \sum_s z_{js}, \qquad z_{js} \in B_j \in \mathcal{R} \quad (z_{js} \in Q).$$

Так как $b_j b_k = 0$, $c_j \leqslant b_j$, $c_k \leqslant b_k$, то $c_j c_k = 0$. По той же причине $c_j z_{kn} = z_{js} z_{kn} = 0$ $(j \neq k)$. Кроме того, $c_j z_{js} = 0$. Таким образом, индикаторы c_j, z_{js} попарно ортогональны и

$$x_i = \sum_j \alpha_{ij} c_j + \sum_{j,s} \alpha_{ij} z_{js} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Вместе с тем по предложению

$$x_{n+1} = \sum_j c_j + \sum_p z_p \qquad (z_p \in Q, \quad c_j z_p = z_p z_q = 0 \quad (p \neq q)).$$

Так как $z_p \leqslant x_{n+1}$, то $z_{js} \leqslant b_j - c_j = b_j(1 - x_{n+1}) \leqslant 1 - x_{n+1} z_{js} z_p = 0$. Значит, $B1 = \{c_j, z_{js}, z_p\} \in \mathcal{R}$ и $X1 = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \subseteq A(B1)$.

По принципу индукции из сказанного следует, что теорема верна для любого $m \geqslant 1$. ∎

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Полукольцо индикаторов Q, ортогональная мультибаза $\mathcal{R}$ и ортоаддитивная функция $m : Q \to F$ составляют пространство с мерой $(Q, \mathcal{R}, m)$.*

Выбирая подходящим образом поле $\mathbb{P}$, кольцо $\mathcal{A}$, идеал $\mathcal{I}$ и группу F можно получить определенные на классах множеств меры с вещественными, инфинитезимальными, p-адическими, векторными и операторными значениями .

2.3. Рассмотрим векторные пространства $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ и некоторое множество S линейно независимых векторов из E. Класс $\mathcal{B} = \mathcal{K}(S)$ всех конечных частей множества S является мультибазой в E. Объединение $A = A(S) = \cup A(B)$ $(B \in \mathcal{K}(S))$ назовем *аддитивной оболочкой* множества S. Она содержится в линейной оболочке $L = L(S) = \cup L(B)$ $(B \in \mathcal{K}(S))$ множества S. Легко доказывается

Лемма. *Аддитивная оболочка $A = A(B)$ есть спектральное множество по $\mathcal{K}(S)$.*

Сужение $m = T|A$ на A линейного оператора $T : L \to F$ является мерой: аддитивность m на $B \in \mathcal{K}(S)$ следует из линейности T. Класс $\mathcal{B} = \mathcal{K}(S)$, множество $A(S)$ и сужение $m = T|A$ составляют пространство с мерой $(A(S), \mathcal{K}(S), T|A)$. Каждый линейный оператор порождает некоторое семейство мер. Интегрирование связано с обратным процессом: порождением семейством мер некоторого линейного оператора.

Рассмотрим поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, комплексное гильбертово пространство H и алгебру $E = \mathcal{L}(H)$ ограниченных линейных операторов $x : H \to H$. Отождествление каждого подпространства $X \subseteq H$ с эрмитовым проектором $p : H \to X$ позволяет отождествить класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(H)$ подпространств пространства H с множеством $P = P(H) \subseteq E$ эрмитовых проекторов на эти подпространства. Для эрмитовых проекторов отношение ортогональности определяется равенствами $pq = qp = 0$. Ортогональность ненулевых проекторов влечет их линейную независимость. Поэтому класс $\mathcal{R}$ всех ортомножеств $B \subseteq P$ из ненулевых проекторов – базовый. Назовем $\mathcal{R}$ *ортогональной проекторной мультибазой.* Возьмем некоторое ортомножество $R \in \mathcal{R}$, составленное из проекторов конечного ранга, и его аддитивную оболочку $A = A(R) = \cup A(B)$ $(B \in \mathcal{K}(R))$. Она является спектральным множеством по $\mathcal{B} = \mathcal{K}(R)$ и тем более по $\mathcal{R}$. Размерность $d(p) = \dim p(H)$ образа $p(H)$ проектора $P \in R$ определяет меру $d : A \to R$. Класс $\mathcal{K}(R)$, множество $A(R)$ и мера d составляют пространство с мерой $(A(R), \mathcal{K}(R), d)$.

Замечание. Индикаторы и проекторы объединяет их идемпотентность. Можно рассматривать общую модель с алгеброй E и множеством P ее идемпотентов. Если для E определена инволюция, то можно взять эрмитовы идемпотенты. В теории возможностей [15], построенной по аналогии с теорией вероятностей, используется порядковая шкала и суммой считается максимум, а произведением – минимум. Индикаторы множеств заменяются произвольными функциями со значениями в отрезке $[0, 1]$.

2.4. При данных определениях спектральная аддитивность меры $m : C \to F$ эквивалентна ее линейности. Обычно линейные операторы определяются на подпространствах рассматриваемого пространства. Спектральное множество C, на котором определена мера m, может не быть подпространством пространства .

Лемма. *Мера является линейным отображением.*

□ Линейность меры $m : C \to F$ означает, что

$$m(\alpha x + \beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K}; x, y, z = \alpha x + \beta y \in C).$$

Так как $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, то $\alpha m(x), \beta m(y) \in F$. Пусть

$$x = \sum \xi(e)e, \qquad y = \sum \eta(e)e, \qquad z = \sum \zeta(e)e \qquad (e \in B)$$

для некоторых базы $B \subseteq C$ и финитных индикаторов $\xi, \eta, \zeta : B \to \mathbb{K}$. Так как $\alpha\xi(e) + \beta\eta(e) = \zeta(e)$, $\zeta(e) \in \{0, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ и m аддитивна на B, то

$$m(z) = \sum \zeta(e)m(e) = \sum(\alpha\xi(e) + \beta\eta(e))m(e) =$$
$$= \alpha \sum \xi(e)m(e) + \beta \sum \eta(e)m(e) = \alpha m(x) + \beta m(y).$$

Значит, мера m линейна в своей области C. ■

2.5. Линейность меры позволяет продолжить ее на линейную оболочку $S = L(C)$. Эта оболочка состоит из линейных комбинаций $u = \sum \alpha(x)x$ $(x \in C)$ с финитными $\alpha : C \to \mathbb{K}$. Назовем векторы $u \in S$ *простыми*. Равенство

$$s(u) = \{\sum \alpha(x)m(x) : u = \sum \alpha(x)x\}$$

определяет соответствие $s : S \to F$. Назовем $s : S \to F$ *интеградьной суммой* по мере m.

Теорема 1. . *Интегральная сумма $s : S \to F$ является единственным линейным отображением S в F, продолжающим меру $m : C \to F$.*

□ 1) Соответствие s однозначно. В самом деле, равенство $\sum \alpha(x)x = \sum \beta(x)x$ $(x \in C)$ для финитных $\alpha, \beta : C \to \mathbb{K}$ эквивалентно равенству $\sum \gamma(x)x = 0$ для $\alpha(x) - \beta(x) = \gamma(x)$ $(x \in C)$. А равенство $\sum \alpha(x)m(x) = \sum \beta(x)m(x)$ $(x \in C)$ – равенству $\sum \gamma(x)m(x) = 0$ $(x \in C)$. Поэтому соответствие s однозначно, если из $\sum \gamma(x)x = 0$ следует $\sum \gamma(x)m(x) = 0$ $(x \in C)$. Рассмотрим конечное множество $X = \{x : \gamma(x) \neq 0\} \subseteq C$ и базу $B \subseteq C$, аддитивная оболочка которой содержит X. Пусть $x = \sum \xi(x, e)e$ $(e \in B)$ для каждого $x \in X$ и некоторого финитного индикатора $\xi(x, \cdot) : B \to \mathbb{K}$. Тогда благодаря линейной независимости базовых векторов $e \in B$ из равенств

$$0 = \sum_x \gamma(x)x = \sum_x \gamma(x) \left(\sum_e \xi(x, e)e \right) = \sum_e \left(\sum_x \gamma(x)\xi(x, e) \right) e$$

следуют равенства

$$\sigma(e) = \sum_x \gamma(x)\xi(x,e) = 0,$$

откуда, так как мера m линейна на C,

$$\sum_x \gamma(x)m(x) = \sum_x \sum_e \gamma(x)\xi(x,e)m(e) = \sum_e \sigma(e)m(e) = 0.$$

2) Отображение s линейно. В самом деле, пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $u = \sum \alpha(x)x$, $v = \sum \beta(x)x \in S$ для финитных семейств скаляров $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{K}$ $(x \in C)$. Тогда $\alpha u + \beta v = \sum(\alpha\alpha(x) + \beta\beta(x))x$ и вследствие однозначности s

$$s(\alpha u + \beta v) = \sum(\alpha\alpha(x) + \beta\beta(x))m(x) = \\ = \alpha \sum \alpha(x)m(x) + \beta \sum \beta(x)m(x) = \alpha s(u) + \beta s(v).$$

3) Отображение s продолжает меру m. Это сразу следует из определений и однозначности s: так как $u = 1 * u$ $(u \in S)$ и по условию скалярные кольца $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ имеют общую единицу 1, то $s(u) = 1 * m(u) = m(u)$.

4) Если линейный оператор $t : S \to F$ продолжает меру m, то $t = s$. В самом деле,

$$t(u) = \sum \alpha(x)t(x) = \sum \alpha(x)m(x) = s(u)$$

для каждого $u = \sum \alpha(x)x \in S$. ∎

Замечание. Теорема об интегральной сумме является модификацией общего принципа линейного продолжения [16, гл. II, § 2.1].

3. Интегралы

3.1. Непрерывное продолжение интегральной суммы до интеграла – самый трудный шаг при его определении. Трудность заключается в выборе подходящих условий для меры, обеспечивающих такое продолжение. Здесь будет сделан ряд упрощающих предположений. Предположим, что скалярные кольца $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ являются полями и для $\mathbb{K}, \mathbb{L}, E, F$ определены топологии, при которых операции со скалярами и векторами непрерывны. В топологических векторных пространствах $(\mathbb{K}, E)$ и $(\mathbb{L}, F)$ замыкание подпространств вследствие непрерывности переносов являются подпространствами. Непрерывность линейного оператора эквивалентна его непрерывности в точке 0. Это позволяет сформулировать следующий общий критерий непрерывности интегральной суммы.

Лемма. *Интегральная сумма s по мере m непрерывна тогда и только тогда, когда для каждой окрестности V точки $0 \in F$ существует окрестность U точки $0 \in E$ такая, что*

$$\sum \alpha(e)m(e) \in V \quad \text{при} \quad \sum \alpha(e)e \in U \quad (e \in B, B \in \mathcal{B}, B \subseteq C).$$

Этот критерий дает возможность в некоторых случаях выделять меры, простые интегралы по которым непрерывны. Вместо топологий для пространств E и F можно рассматривать топологии для некоторых их подпространств, содержащих соответственно S и $m(S)$.

Непрерывность линейных операторов в топологических векторных пространствах равномерна. При некоторых предположениях равномерно непрерывное отображение можно продолжать на замыкание области определения. Предположим дополнительно, что пространство F отделимое и полное. Это влечет его регулярность и обеспечивает существование и единственность непрерывного продолжения $t : T \to F$ непрерывной интегральной суммы $s : S \to F$ на замыкание T ее области определения S. Значения t определяются равенством

$$t(f) = \lim s(u) \qquad (u \to f, u \in S).$$

Оператор t линеен вместе с s. Будем называть оператор t *регулярным интегралом* по мере m. Функции $f \in T$ назовем *регулярно интегрируемыми* по мере m.

3.2. Пусть выполнены условия леммы и интегральная сумма s непрерывна в точке 0, а векторное пространство F отделимое и полное. Тогда верна следующая теорема существования и единственности регулярного интеграла по мере m.

Теорема 2. *Равенство $t(f) = \lim s(u)$ $(u \to f,\ u \in S)$ определяет единственный непрерывный линейный оператор $t : T \to F$, продолжающий меру $m : C \to F$.*

□ По теореме 1 интегральная сумма $s : S \to F$ является единственным линейным оператором продолжающим меру $m : C \to F$ на линейную оболочку S спектрального множества C. По условию интегральная сумма s непрерывна в точке 0 и значит равномерно непрерывна. Следовательно [13, 3.1.3], равенство $t(f) = \lim s(u)$ $(u \to f,\ u \in S)$ определяет единственное непрерывное отображение $t : T \to F$, продолжающее интегральную сумму s. Это отображение линейно вместе с интегральной суммой s. Поэтому t является единственным непрерывным линейным отображением, продолжающим меру $m : C \to F$ на замыкание T линейной оболочки S ее области определения C. ■

Замечание. Переход от множеств к индикаторам, простым и интегрируемым функциям, а от булевых операций к действиям с функциями, вместе с переходом от мер к интегральным суммам и интегралам позволяет широко использовать методы математического и функционального анализа. Это часто бывает удобно и эффективно. Точно так же целесообразно переходить от подпространств к проекторам и линейным операторам, используя развитую для них теорию.

В числовом случае, когда рассматриваются линейные функционалы на нормированных пространствах, для продолжения интегральной суммы до интеграла можно использовать классическую теорему Хана - Банаха. Она обеспечивает существование непрерывных продолжений определенного на подпространстве непрерывного линейного функционала на все рассматриваемое пространство. Вследствие непрерывности на замыкании области опреления рассматриваемого функционала все эти продолжения равны.

3.3. В заключение рассмотрим два примера продолжения меры до интеграла.

Пример 1. Пусть: $\mathbb{K} = \mathbb{L} = F = \mathbb{R}$, E – нормированное пространство ограниченных вещественных функций на отрезке $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, C – полукольцо индикаторов интервалов в $[a, b]$. Линейная оболочка S множества C состоит из ступенчатых функций на $[a, b]$. Будем называть их простыми. Замыканием T множества S в пространстве E служит множество функций на $[a, b]$, не имеющих сложных разрывов (имеющих в каждой точке отрезка $[a, b]$ пределы слева и справа с естественной оговоркой насчет концов a, b). Эти функции являются пределами равномерно сходящихся последовательностей простых функций. Будем называть их *равномерно измеримыми*. Мерами, интегральными суммами и интегралами в рассматриваемом примере являются *ограниченные линейные функционалы* соответственно на C, S и T. Выделяются *интегралы Римана и Стилтьеса* для рассматриваемых функций. Подробное описание различных классов равномерно измеримых функций и подробные доказательства сформулированных утверждений есть в [17], где рассматриваются функции на расширенной вещественной прямой.

Пример 2. Рассмотрим: множество X, алгебру $\mathcal{R}$ некоторых частей X, комплексное гильбертово пространство H, алгебру $\mathcal{P}$ проекторов $H \to H$. Множества из $\mathcal{R}$ будем называть *простыми.* Будем предполагать, что существует возрастающая последовательность проекторов, сходящаяся к единице. Проекторной *мерой* называется сильно непрерывная снизу в единице аддитивное отображение $P : \mathcal{R} \to \mathcal{P}$. Проекторная мера не только аддитивна, но и мультипликативна. По аналогии с числовой определяется проекторная *функция распределения.* Проекторная мера по линейности продолжается до проекторной *интегральной суммы* на пространство S простых функций $u : X \to \mathbb{C}$. Она является ограниченным линейнам оператором на $\mathcal{S}$. И вместе с проекторной мерой обладает свойством мультипликативности. Проекторная мера порождает семейство числовых мер, которые определяют пространство $\mathcal{M}$ ограниченных *измеримых функций* по проекторной мере. Непрерывное продолжение интегральной суммы дает интеграл по проекторной мере, который является всюду определенным ограниченным нормальным оператором на $\mathcal{M}$. Он вместе с проекторной интегральной суммой обладает свойством мультипликативности. Проекторный интеграл для неограниченных измеримых функций является неограниченным плотно определенным нормальным оператором в $\mathcal{M}$. Проекторные меры и определяемые ими интегралы подробно рассматриваются в посвященном спектральной теореме пункте 4.9 книги [13]. В главе 14 книги [18] описываются некоммутативные интегралы.

Литература

1. **Савельев Л.Я.** Продолжение мер по непрерывности// *Сиб. мат. ж. Т. 5. № 3. 1964. С. 639–650.*

2. **Савельев Л.Я.** О порядковых топологиях и непрерывных мерах// *Сиб. мат. ж. Т .6. № 6. 1965. С. 1357–1364.*

3. **Савельев Л.Я.** Некоторые условия продолжимости векторных мер// *Сиб. мат. ж. Т. 9. № 4. 1968. С. 940–950.*

4. **Савельев Л.Я.** Лекции по математическому анализу, часть 4. Новосибирск: НГУ, 1975.

5. **Савельев Л.Я.** Продолжение непрерывных мер// *Сиб. мат. ж. Т. 20. № 5. 1979. С. 1082–1091.*

6. **Недогибченко Г.В., Савельев Л.Я.** Вполне непрерывные меры// *Сиб. мат. ж. Т. 22. № 6. 1981. С. 126–141.*

7. **Недогибченко Г.В., Савельев Л.Я.** Индуктивные пределы направленностей мер// *Новосибирск: Труды ИМ СОАН, Т. 1. 1982. С. 168–179.*

8. **Савельев Л.Я.** Меры на орторешетках// *ДАН, Т. 264. № 5. 1982. С. 1091–1094.*

9. **Савельев Л.Я.** Абстрактные внешние меры// *Институт математики СОАН, препринт № 22. 1983.*

10. **Савельев Л.Я.** Внешние меры и топологии// *Сиб. мат. ж. Т. 24. № 2. 1983. С. 133–149.*

11. **Савельев Л.Я.** Операторы на дифференциальных решетках// *Вестник НГУ, серия «Математика, механика, информатика», Т. 2. Вып. 3. 2002. С. 26—43.*

12. **Савельев Л.Я.** Пространства с мерами// *Докл. РАН, Т. 357. № 3. 1997. С. 310–312.*

13. **Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.** Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Институт Математики, 1999.

14. **Эмх Ж.** Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.

15. **Пытьев Ю.П.** Возможность. Элементы теории и применения.М.: Эдиториал УРСС, 2000.

16. **Бурбаки Н.** Алгебра. М.: Физматгиз, 1962.

17. **Савельев Л.Я.** Интегрирование равномерно измеримых функций. Новосибирск: НГУ, 1984.

18. **Segal I.E., Kunze R.A.** Integrals and Operators. Berlin: Springer – Verlag, 1978.

Summary

Savelev L.J. Extension of a measure up to integral

In this paper the task about a bend of cylindrical panel under effect of normal load is considiered. The normal load are distributed on field, simular to middle surface of a panel. The bend of panel on register of transversal shears by S.P. Timoshenko's model is described. The mechanism of dependence of a momemts for transversal shears is confirmed — the graphics of moments for change of curvature of middle surface and for change of transversal shears are be in anti-phases in fields of a maximal absolute values.

Новосибирский государственный университет *Поступила 13.02.2008*