Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008

УДК 517.98

О НАТУРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РЕГУЛЯРНО МЕНЯЮЩИХСЯ КВАЗИВОГНУТЫХ МОДУЛЯР

А.А. Меклер

Квазивогнутые функции, определённые на вещественной положительной полуоси или на конечной её части, играют важную роль в функциональном анализе, используясь, например, в виде так называемых *модуляр* для задания норм банаховых пространств измеримых функций. Наиболее важные топологические и геометрические свойства задаваемых пространств определены, во-первых, квазивогнутостью модуляры и, во-вторых, - её предельным поведением в окрестности некоторых точек области её задания, обычно - одной или двух. Собственно говоря, поведение модуляры в остальных, некритичных точках зачастую не имеет значения и в таких случаях задание модуляры на целом числовом континууме содержит информацию, во многих вопросах несущественную. Поэтому в [1] и [2] был разработан (обратимый) способ замены задающей пространство модулярной функции последовательностью натуральных чисел. Сохраняя общность, такая замена делает более прозрачной интерпретацию некоторых особенностей предельного поведения модуляры пространства, могущих отвечать как за топологическое, так и за геометрическое строение этого пространства. В частности, появляется возможность легко строить разнообразные контрпримеры.

В настоящей работе этот секвенциальный подход применён для характеристики модуляр, представляющих собой *регулярно меняющиеся (в нуле)* функции, [3]. Задаваемые такими модулярами банаховы пространства изучались в работах [4] и [5]. Здесь мы получаем выраженный в терминах натуральной последовательности *топологический* (т.е. инвариантный по отношению к эквивалентной перенормировке) критерий α-регулярного изменения соответствующей модуляры, где α - показатель регулярности, $0 < \alpha \leq 1$. Для случаев же так называемых *быстро* и *медленно* меняющихся модулярных функций (см., например, [3]), т.е. для случая крайних значений показателя α : $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, соответственно, мы предлагаем ещё и *геометрический* критерий регулярности изменения, выражающий некое свойство единичной сферы задаваемого пространства. Из него, например, прямо следует, что только те пространства Марцинкевича, норма которых задаётся медленно меняющимися модулярами, могут по составу своих элементов совпадать с подходящими пространствами Орлича (см., например, [6]).

Класс $\mathfrak{F}$, с которым мы в дальнейшем имеем дело, состоит из всех положительных непрерывных в нуле функций, заданных на отрезке $[0,1]$ и принимающих нулевое значение в точке нуль. Две функции $F, G \in \mathfrak{F}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $F \sim G$), если найдётся константа $c \geq 1$, такая что

$$c^{-1}G(t) \leq F(t) \leq cG(t),\ t \in [0,1].$$

Функцию $\xi \in \mathfrak{F}$, $\xi(1) = 1$, мы называем *квазивогнутой*, если обе функции ξ и $\xi^{\perp}(t) := \frac{t}{\xi(t)}$; $0 < t \leq 1$; $\xi^{\perp}(0) := 0$, строго возрастают и непрерывны в нуле. Квазивогнутую функцию ψ, такую что $\psi(1) = 1$, мы называем *модулярной функцией Марцинкевича,* коротко *М-функцией,* если она вогнута на [0,1], т.е. $\psi(\frac{t+s}{2}) \geq \frac{\psi(t)+\psi(s)}{2}$, $t, s, \in [0,1]$. Множество всех М-функций обозначается $\mathfrak{M}$. Для каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ справедливы неравенства

$$r\psi(t) \leq \psi(r \cdot t); 0 \leq t, r \leq 1, \tag{1}$$

(см. [7]). Каждой квазивогнутой функции ξ можно сопоставить её *наименьшую вогнутую мажоранту* $\tilde{\xi}$, причём $\tilde{\xi} \sim \xi$, точнее, $\frac{1}{2}\cdot\tilde{\xi}(t) \leq \xi(t) \leq \tilde{\xi}(t)$, $t \in [0,1]$, [7]. Для квазивогнутой функции ξ положим $\xi_* := \widetilde{\xi^{\perp}}$. Ясно, что $\xi_{**} := (\xi_*)_* \sim \xi$, причём $\psi_* \in \mathfrak{M}$, если $\psi \in \mathfrak{M}$. М-функция ψ_* называется *дуальной* для ψ; дуальность определяет на $\mathfrak{M}$ инволюцию $\psi \mapsto \psi_*$. Множество $\mathcal{P}$ М-функций мы называем М-*свойством,* если $\psi \in \mathcal{P}$ влечёт $\varphi \in \mathcal{P}$ для всякой М-функции φ эквивалентной ψ. М-свойствами являются, очевидно, следующие подмножества.

$$\mathcal{P}_r := \{\psi \in \mathfrak{M} : \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(t/2)}{\psi(t)} < 1\},$$

$$\mathcal{P}^r := \{\psi \in \mathfrak{M} : \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} < 2\},$$

равно как и семейство подмножеств, каждое из которых определяется по $\alpha \in [0,1]$ формулой

$$\mathcal{P}_\alpha := \{\psi \in \mathfrak{M} : \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi(s\cdot t)}{\psi(t)} \sim s^\alpha\}.$$

(В последней эквивалентности по $s,\ 0 \le s \le 1$, как обычно полагается $0^0 = 0$.)

Очевидным образом для M-свойств справедливы следующие соотношения дуальности.

$$(i)\ \psi \in \mathcal{P}_r \ \textbf{iff}\ \psi_* \in \mathcal{P}^r;\ (ii)\ \psi \in \mathcal{P}_\alpha \ \textbf{iff}\ \psi_* \in \mathcal{P}_{1-\alpha} \tag{2}$$

Теорема A. ([8], Theorem 5). *Для всякой квазивогнутой функции φ и для любого $\alpha,\ \alpha \in [0,1]$, следующие условия равносильны.*
a). $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(s\cdot t)}{\varphi(t)} \sim s^\alpha$;
b). Существует M-функция ψ, такая что $\psi \sim \varphi$ и при этом для каждого $s,\ s \in [0,1]$, выполняется равенство

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\psi(s\cdot t)}{\psi(t)} = s^\alpha \tag{3}$$

Замечание. 1. Функция, удовлетворяющая предельному равенству (3), называется *регулярно меняющейся (в нуле) с показателем α*, [3].
2. Из теоремы A прямо следует, что $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}_r,\ 0 < \alpha \le 1;\ \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}^r$.

Далее мы предлагаем наглядную интерпретацию условий теоремы A в терминах натуральных последовательностей. Отсутствие доказательств у некоторых приводимых ниже утверждений означает, что последние просты.

Пусть ψ - M-функция. Точки вида $\psi(2^{-j}),\ j = 0,1,...$ будем называть ψ-точками. Обозначим через D_n двоичный полуоткрытый сегмент $[2^{-n}, 2^{-n+1}),\ n \ge 1$, и введём функцию $\mathbf{p}_\psi$ натурального аргумента, сопоставляя каждой ψ-точке номер сегмента D, её содержащего:

$$\mathbf{p}_\psi(0) = 1,\ \mathbf{p}_\psi(n) = [-\log_2 \psi(2^{-n})] + 1,\ n \ge 1, \tag{4}$$

где $[r]$ обозначает целую часть вещественного числа r. В силу (1) отображение $\mathbf{p}_\psi$ сюръективно на своей области задания, причём

$$\mathbf{p}_\psi(m) \le \mathbf{p}_\psi(m+1) \le \mathbf{p}_\psi(m) + 1,\ m \ge 0. \tag{5}$$

Пусть теперь $\mathbf{p} : \mathsf{N} \mapsto \mathsf{N}$ - любая сюръекция натурального ряда на себя, удовлетворяющая соотношением (5), дополненным договорённостью $\mathbf{p}(0) = 1$. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\mathbf{q_p}$, полагая

$$\mathbf{q_p}(1) := \overline{\overline{\mathbf{p}^{-1}(1)}} - 1;\ \mathbf{q_p}(n) = \overline{\overline{\mathbf{p}^{-1}(n)}},\ n \geq 2. \tag{6}$$

Вместо $\mathbf{q}_{\mathbf{p}_\psi}$ мы пишем $\mathbf{q}_\psi$. По определению $\mathbf{q}_\psi(n)$ есть количество ψ-точек на двоичном промежутке $D_n,\ n \geq 1$. Отметим неравенство $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{q}_\psi(n) > 1$, верное для любой М-функции ψ.

Лемма 1. *Для любой последовательности* $\mathbf{q}$ *натуральных чисел найдётся (единственная) сюръекция натурального ряда* $\mathbf{p}$*, удовлетворяющая (5) и такая, что* $\mathbf{q} = \mathbf{q_p}$.

Доказательство следующего утверждения см. [1], Proposition 6.

Теорема B. *Пусть* $\mathbf{q}$ *есть произвольная последовательность натуральных чисел. Найдётся М-функция* ψ*, такая что* $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\psi$.

Предложение 1. *Пусть* ψ *и* φ *две М-функции. Следующие утверждения равносильны.*
i). Найдётся константа $c,\ c \geq 1$*, такая что* $\psi(t) \leq c \cdot \varphi(t),\ t \in [0, 1]$;
ii). Найдётся натуральное d*, такое что* $\mathbf{p}_\varphi(n) \leq \mathbf{p}_\psi(n) + d,\ n \geq 0$;
iii). Найдётся натуральное b*, такое что* $\sum_{k=0}^{m} \mathbf{p}_\varphi(k) \leq \sum_{k=0}^{m+b} \mathbf{p}_\psi(k)$, $m \geq 1$.

Следствие 2. I. *Для любых двух М-функций* ψ *и* φ *следующие условия равносильны.*
i). $\psi \sim \varphi$;
ii). Найдётся натуральное d*, такое что*

$$\mid \mathbf{p}_\psi(n) - \mathbf{p}_\varphi(n) \mid \leq d,\ n \geq 0;$$

iii). Найдётся натуральное b*, такое что*

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbf{p}_\varphi(k) \leq \sum_{k=0}^{m+b} \mathbf{p}_\psi(k) \leq \sum_{k=0}^{m+2b} \mathbf{p}_\varphi(k),\ m \geq 0.$$

II. (Сравни [1], Proposition 7.) *Любые две М-функции* $\psi,\ \varphi$*, такие что* $\mathbf{q}_\psi = \mathbf{q}_\varphi$ *эквивалентны.*

Последнее утверждение позволяет обозначать через $\psi_\mathbf{q}$ любую из функций, существование которой гарантируется теоремой B, ибо все они между собой эквивалентны и, значит, М-свойства у них одинаковы; сюръекцию, соответствующую выбранной М-функции $\psi_{\mathbf{q}}$, мы обозначаем $\mathbf{p_q}$.

Пусть Q обозначает класс всех последовательностей натуральных чисел, а $\mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$ - подкласс Q, состоящий из ограниченных последовательностей: $\mathbf{q} = (q_n) \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$ означает, что найдётся натуральное d, такое что $q_n \leq d, \ n \geq 1$. Определим на Q отношение эквивалентности, считая две последовательности $\mathbf{q}^{(1)} = q^{(1)}(n), \ \mathbf{q}^{(2)} = q^{(2)}(n)$ *эквивалентными* (обозначение $\mathbf{q}^{(1)} \approx \mathbf{q}^{(2)}$), если найдётся натуральное b, такое что

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{q}^{(1)}(k) \leq \sum_{k=1}^{n+b} \mathbf{q}^{(2)}(k) \leq \sum_{k=1}^{n+2b} \mathbf{q}^{(1)}(k).$$

Из теоремы B и предложения 1 вытекает, что М-свойствам взаимно-однозначно соответствуют подклассы $\approx$-эквивалентности множества Q.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{q}^{(1)}$ *и* $\mathbf{q}^{(2)}$ *две ограниченные последовательности:* $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)} \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$. *Они эквивалентны, тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{m \geq 1} \left| \sum_{k=1}^{m} \mathbf{q}^{(1)}(k) - \sum_{k=1}^{m} \mathbf{q}^{(2)}(k) \right| < \infty. \tag{7}$$

Замечание. Очевидно, что (7) является достаточным условием эквивалентности даже и в случае неограниченных последовательностей. Необходимым условием в этом случае (7) не является, что видно из следующего примера: $\mathbf{q}^{(1)}(n) = 2^n; \ \mathbf{q}^{(2)}(2n-1) = 2^{2n}, \ \mathbf{q}^{(2)}(2n) = 2^{2n-1}, \ n \geq 1$.

Следующее утверждение доказывается стандартным методом срезок.

Предложение 4. *Для любой ограниченной натуральной последовательности найдётся натуральное число* A *и такая эквивалентная последовательность, члены которой суть либо числа* A, *либо числа* 1.

Зафиксируем натуральную последовательность $\mathbf{q} = (q_n)$ и пусть m - некоторое натуральное число. Отрезок вида $n+1, n+2, ..., n+k$ натурального ряда мы называем *m-точечным* $\mathbf{q}$*-блоком длины* k, если $q_n \neq m, q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots = q_{n+k} = m, q_{n+k+1} \neq m$; если $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\psi$ для некоторой М-функции ψ, то мы говорим о ψ-блоке длины k и называем сегмент D_n начальным для этого блока. Понятия **"первой", "последней", "предпоследней"**, и т.п. ψ-точки этого блока относятся к расположению точек $\psi(2^{-j})$ в порядке следования на двоичных промежутках $D_n,\ D_{n+1}, \cdots D_{n+k+1}$.

Теорема C. ([1], Propositions 8,9) *i). М-свойство $\mathcal{P}_r$ выполняется для М-функции ψ, тогда и только тогда, когда последовательность $\mathbf{q}_\psi$ ограничена.*
ii). М-свойство $\mathcal{P}^r$ выполняется для М-функции ψ, тогда и только тогда, когда последовательность длин одноточечных $\mathbf{q}_\psi$-блоков ограничена.

Снова зафиксируем натуральную последовательность $\mathbf{q} = (q_n)$ и определим по ней сюръекцию $\bar{p}$ следующим образом. $\bar{p}(0) = 1;\ \bar{p}(m) = m - \mathbf{p}_\mathbf{q}(m) + 1,\ m \geq 1$. Ясно, что для $\bar{p}$ выполняется (5). Эту сюръекцию мы называем *дуальной* с $\mathbf{p}_\mathbf{q}$, а последовательность $\mathbf{q}_{\bar{p}}$ называем *дуальной* с исходной последовательностью $\mathbf{q}$.

Нетрудно видеть, что дуальность есть инволюция в классе Q, согласованная как с инволюцией в классе $\mathfrak{M}$, так и с эквивалентностью в обоих этих классах.

Для интерпретации М-свойств $\mathcal{P}_\alpha$ в терминах натуральных последовательностей напомним понятие повторного предела.

Определение. Говорят, что двойная последовательность $\{t_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ вещественных чисел имеет *повторным пределом* число t, обозначаемое $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} t_{n,m}$, если для любого $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, найдётся натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое что для всякого $n \geq N$ существует натуральное $M = M(n,\varepsilon)$, для которого $\mid t_{n,m} - t \mid \leq \varepsilon$ при всех $m \geq M$.

Теорема 5. *Для любой последовательности натуральных чисел $\mathbf{q} = (q_n)$ и любого $\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, следующие условия равносильны*
i). $\psi_\mathbf{q} \in \mathcal{P}_\alpha$;
ii). Повторный предел $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\Sigma_{i=n+1}^{n+m} q_i}$ существует и равен α.

Доказательство. Если предположить, что $\mathbf{q}$ удовлетворяет $ii)$, то выполнение равенства

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\psi_\mathbf{q}(2^{-n_k - m})}{\psi_\mathbf{q}(2^{-n_k})} = 2^{-m\cdot\alpha} \tag{8}$$

для всякого $m \geq 0$ и любой монотонной последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, стремящейся к бесконечности, легко проверяется с помощью правил $\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_4$ построения М-функции $\psi_{\mathbf{q}}$ работы [1]. Возьмём произвольные числа $t, s \in (0,1]$ и подищем такие натуральные n_t, m_s, что $2^{-n_t} \leq t < 2^{-n_t+1}$, $2^{-m_s} \leq s < 2^{-m_s+1}$, так что $2^{-n_t-m_s} \leq ts < 2^{-n_t-m_s+2}$. Тогда получим

$$\frac{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-n_t-m_s})}{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-n_t+1})} \leq \frac{\psi_{\mathbf{q}}(ts)}{\psi_{\mathbf{q}}(t)} \leq \frac{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-n_t-m_s+2})}{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-n_t})}.$$

Ясно, что $n_t \uparrow_{t\downarrow 0} \infty$, откуда из (1) и (8) для фиксированного s выводим:

$$\frac{1}{4}s^{\alpha} \leq \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi_{\mathbf{q}}(ts)}{\psi_{\mathbf{q}}(t)} \leq 4 \cdot s^{\alpha},$$

т.е. $\psi_{\mathbf{q}} \in \mathcal{P}_{\alpha}$. Импликация $ii) \Rightarrow i)$ доказана.
Докажем обратную к ней. Если для $\mathbf{q}$ выполнено включение $i)$, то теорема C, а также Теорема A и замечание 2 к ней влекут, что $\mathbf{q} \in \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}$. С учётом Теоремы A и Леммы 3 для $\psi_{\mathbf{q}}$ можно считать выполненным предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-n+1})}{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-n})} = 2^{\alpha}. \tag{9}$$

Для $n \geq 1$ обозначим через L_n множество всех частичных пределов последовательности $\{\frac{m}{\Sigma_{i=m+1}^{m+n} q_i}\}_{m=1}^{\infty}$, где $(q_i) = \mathbf{q}$. Зафиксируем произвольную вещественную последовательность δ_i, $0 < \delta_i < 1$, $\delta_i \uparrow 1$, и обозначим $N_i^- = \{n : L_n \cap [0, \delta_i \cdot \alpha) \neq \emptyset\}$. По предположению при каждом $n \in N_i^-$ для некоторой строго возрастающей последовательности $\{m_k^{(n)}\}$ предел $\lim_{k\to\infty} \frac{m_k^{(n)}}{\mu_k^{(n)}}$ существует и меньше $\delta_i \cdot \alpha$, где $\mu_k^{(n)} := \sum_{i=n+1}^{n+m_k^{(n)}} \mathbf{q}_{\psi}(i) \geq m_k^{(n)}$, $k, n \geq 1$. Поскольку речь идёт о пределе, то полученное неравенство можно записать как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k^{(n)}}{\mu_k^{(n)} - 1} < \delta_i \cdot \alpha. \tag{10}$$

Покажем теперь, что все множества возрастающей последовательности N_i^-, $i \geq 1$, конечны. Допустим, что это не так. Тогда для любого $i \geq 1$ с помощью (9) найдём J_i, такое что

$$\frac{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-J_i-j+1})}{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-J_i-j})} > 2^{\delta\cdot\alpha},\ j \geq 1. \tag{11}$$

Обозначим $n_i,\ n_i \geq 2$, такой номер, что $2^{-n_i-1} \leq \psi_{\mathbf{q}}(2^{-J_i}) < 2^{-n_i}$. Выберем $n,\ n \in N_i^-, n \geq n_i$, и возьмём последовательность $\{m_k^{(n)}\}$, удовлетворяющую (10). Для достаточно большого k из (10) следует неравенство

$$\frac{m_k^{(n)}}{\mu_k^{(n)} - 1} < \delta \cdot \alpha. \tag{12}$$

Обозначим $\psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-1})$ наибольшую $\psi_{\mathbf{q}}$-точку двоичного сегмента D_{n+1}. Имеем:

$$2^{-n-m_k^{(n)}} < \psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-\mu_k^{(n)}}) < \cdots < \psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-1}) < 2^{-n},$$

что вместе с (11) даёт

$$2^{-n} \geq \psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-1}) = \frac{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-1})}{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-2})} \cdots \frac{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-\mu_k^{(n)}+1})}{\psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-\mu_k^{(n)}})} \cdot \psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-\mu_k^{(n)}}) >$$

$$> \psi_{\mathbf{q}}(2^{-\nu-\mu_k^{(n)}}) 2^{(\delta_i \cdot \alpha)(\mu_k^{(n)}-1)} > 2^{-n-m_k^{(n)}} \cdot 2^{(\delta_i \cdot \alpha)(\mu_k^{(n)}-1)},$$

откуда $\frac{m_k^{(n)}}{\mu_k^{(n)}-1} > \delta_i \cdot \alpha$, вопреки (12).

Возьмём теперь произвольную последовательнос $\delta_i \downarrow 1$ и обозначим через N_i^+ подмножество натуральных чисел $\{n :\ L_n \cap (\alpha \cdot \delta_i, 1] \neq \emptyset\}$. Рассуждая как и выше, нетрудно показать, что все множества $N_i^+,\ i \geq 1$, также конечны. Но конечность множеств N_i^- и N_i^+ при всех $i \geq 1$ означает справедливость утверждения ii). Теорема доказана.

Предложение 6. *Если М-функция ψ удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2,$$

то тогда

1). $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{q}_\psi(n) = 2$;

2). $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$, *где* $\{l_n\}$ *обозначает последовательность длин всех одноточечных* $\mathbf{q}_\psi$*-блоков.*

Доказательство. Доказываем 1). Предположим, что найдётся натуральная последовательность $\{n_k\}$, для которой $\lim_{k\to\infty} \mathbf{q}_\psi(n_k) = r > 2$. Положим $\delta = \sqrt{2^{-1}}$ и выберем номер N, такой что $\frac{\psi(2^{-n+1})}{\psi(2^{-n})} \geq 2 \cdot \delta$ при $n \geq N$. Далее выберем натуральное $K = K(\delta)$, таким образом, чтобы во-первых $\mathbf{q}_\psi(n_k) = r$ при $k \geq K$ и во-вторых, чтобы при всех $k \geq K$

неравенство $j > N$ выполнялось, если только $2^{-n_k} \le \psi(2^{-j}) < 2^{-n_k+1}$. Для каждого $k \ge K$ выберем m_k, так чтобы

$$2^{-n_k} < \psi(2^{-m_k-r}) \le \psi(2^{-m_k-r+1}) \le \cdots \le \psi(2^{-m_k-1}) \le 2^{-n_k+1}.$$

По определению $m_k \ge N$ для всех $k \ge K$, значит, поскольку $r \ge 3$, мы имеем:

$$2^{-n_k} < \psi(2^{-m_k-3}) = \frac{\psi(2^{-m_k-3})}{\psi(2^{-m_k-2})} \cdot \frac{\psi(2^{-m_k-2})}{\psi(2^{-m_k-1})} \cdot \psi(2^{-m_k-1})$$

$$\le \frac{\psi(2^{-m_k-1})}{(2\cdot\delta)^2} \le \frac{2^{-(n_k+1)}}{(2\cdot\delta)^2},$$

откуда $(2\delta)^2 < 2$, - противоречие.
Доказываем 2). Допустим противное: $\lim_{k\to\infty} l_{n_k} := \rho < \infty$. Положим $\delta = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{\rho+3}}$, и по предыдущему найдём такое натуральное $M = M(\delta)$, что для $m \ge M$ выполняются условия.
1). $2^{-i} \le \psi(2^{-m}) < 2^{-i+1}$ влечёт $\mathbf{q}_\psi(i) = 1$ или $\mathbf{q}_\psi(i) = 2$;
2). $\frac{\psi(2^{-m+1})}{\psi(2^{-m})} \ge 2\cdot\delta$.
Обозначим $K = K(\delta)$ такое натуральное число, что при $k \ge K$ для ψ-точки $\psi(2^{-m})$, содержащейся в двухточечном полусегменте D_{n_k}, начальном по отношению к $\mathbf{q}_\psi$-одноточечному блоку длины l_{n_k}, справедливо неравенство $m \ge M$. Имеем: $\psi(2^{-m-1}) \in D_{n_k}$, $\psi(2^{-m-2}) \in D_{n_k+1}, \ldots, \psi(2^{-m-\rho-1}) \in D_{n_k+\rho}$, $\psi(2^{-m-\rho-2}) \in D_{n_k+\rho+1}$, $\psi(2^{-m-\rho-3}) \in D_{n_k+\rho+1.}$ Следовательно

$$2^{\rho+2} > \frac{\psi(2^{-m})}{\psi(2^{-m-\rho-3})} = \frac{\psi(2^{-m})}{\psi(2^{-m-1})} \cdot \frac{\psi(2^{-m-1})}{\psi(2^{-m-2})} \cdots \frac{\psi(2^{-m-\rho-2})}{\psi(2^{-m-\rho-3})} \ge (2\cdot\delta)^{\rho+3},$$

откуда $\delta < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{\rho+3}}$, - противоречие. Предложение доказано.

Предложение 7. Если для М-функции ψ справедливы равенства $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{q}_\psi(n) = 2$ и $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$,
где $\{l_n\}$ означает последовательность длин одноточечных $\mathbf{q}_\psi$-блоков, то $\psi \in \mathcal{P}_1$, тогда и только тогда, когда множество длин всех двухточечных $\mathbf{q}_\psi$-блоков ограничено.

Доказательство. По условию существует натуральное N_0, такое что при $n \ge N_0$ имеем: $\mathbf{q}_\psi(n) = 1$ или $\mathbf{q}_\psi(n) = 2$.
Определим натуральную последовательность $\mathbf{q} = (q_n)$, полагая $q_n = \mathbf{q}_\psi(n)$, $n \ge 1$, и, согласно правилам $\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_4$ работы [1], построим

М-функцию φ, так что $\mathbf{q}_\varphi(n) = q_n$, $n \geq 1$. Все $\mathbf{q}_\psi$- и $\mathbf{q}_\varphi$-блоки оказываются одними и теми же. Рассмотрим двухточечный $\mathbf{q}_\varphi$-блок $(n+1, n+2, \cdots, n+m)$ длины m, такой что $n \geq N_0$. Если $\varphi(2^{-k-1})$ - первая φ-точка этого блока, то очевидно, что $\varphi(2^{-k-2m+1})$ есть его предпоследняя φ-точка; отношение их аргументов есть 2^{2m-2}. С другой стороны, вычисляя по упомянутым выше правилам построения φ, мы получим $\frac{2^{2m-2}\varphi(2^{-k-2m+1})}{\varphi(2^{-k+1})} = 2^{m-1}$. Отсюда и из того, что $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{n\varphi(t/n)}{\varphi(t)}$ возрастает по n следует, что $\varphi \in \mathcal{P}_1$, тогда и только тогда, когда множество всех длин двухточечных $\mathbf{q}_\psi$-блоков ограничено. Но в этом случае для М-функции φ очевидным образом выполняется условие ii) Теоремы 5, и тем самым $\varphi \in \mathcal{P}_1$. Поскольку же $\mathcal{P}_1$ есть М-свойство и $\varphi \sim \psi$, то и $\psi \in \mathcal{P}_1$. Предложение доказано.

Теорема 8. *Для любой последовательности натуральных чисел* $\mathbf{q} = (q_n)$ *следующие требования I и II равносильны.*
I. $\psi_{\mathbf{q}} \in \mathcal{P}_1$;
II. Найдётся последовательность $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{q}_n)$, $\mathsf{Q} \ni \bar{\mathbf{q}} \approx \mathbf{q}$, *удовлетворяющая условиям*
1). *Последовательность длин одноточечных блоков для* $\bar{\mathbf{q}}$ *стремится к бесконечности;*
2). $\bar{q}_n = 1$ *или* $\bar{q}_n = 2$;
3). *Длина каждого двухточечного* $\bar{\mathbf{q}}$*-блока равна* 1.

Доказательство. Импликация $II \Rightarrow I$ прямо следует из предложения 7 . Доказываем $I \Rightarrow II$. Если $\psi \in \mathcal{P}_1$, то, пользуясь теоремой А и предложениеми 6 и 7, для $\mathbf{q}_\psi$ можно найти последовательность $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_n) \approx \mathbf{q}_\psi$, удовлетворяющую условиям
a). $\lim_{n\to} \tilde{l}_n = \infty$, где $(\tilde{l}_n)$ обозначает последовательность длин одноточечных $\tilde{\mathbf{q}}$-блоков;
b). $\limsup_{n\to\infty} \tilde{q}_n = 2$;
c). Множество длин всех двухточечных $\tilde{\mathbf{q}}$-блоков ограничено подходящим целым d.
Из b), из леммы 3 и из Замечания 2 к теореме А следует, что, изменяя, если нужно, некоторую начальную часть последовательности $(\tilde{q}_n)$, мы можем, оставаясь в том же классе $\approx$-эквивалентности, считать, что $\tilde{q}_n = 1$ или $\tilde{q}_n = 2$, $n \geq 1$. Из тех же соображений мы можем предполагать для $\tilde{\mathbf{q}}$ выполненными условия $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{l}_n \geq 3d$, $n \geq 1$. Таким образом, последовательность $\{\tilde{q}_n\}$ разбивается на идущие поочерёдно один за другим двухточечные и одноточечные блоки длины $\tilde{m}_n$ и $\tilde{l}_n$, соответственно. Оставляя количество двоек и единиц в каждой

соседней паре вида $22\cdots 211\cdots 1$ неизменным, преобразуем её к виду $211\cdots 1211\cdots 1\cdots\cdots\cdots 211\cdots 1$, помещая $\tilde{m}_n - 1$ раз за одной двойкой блок из $[\frac{\tilde{l}_n}{2\tilde{m}_n}]$ единиц, а в последний $\tilde{m}_n$-й раз помещая за ней все оставшиеся из $\tilde{l}_n$ единиц. Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{l}_n}{\tilde{m}_n} = \infty$, то полученная таким путём последовательность $\bar{\mathbf{q}}$, будучи по лемме 3 эквивалентной $\tilde{\mathbf{q}}$, является искомой. Теорема 8 доказана.

Она допускает дуальную переформулировку.

Теорема 9. *Для любой натуральной последовательности* $\mathbf{q} = (q_n)$ *следующие требования I и II равносильны.*
I. $\psi_{\mathbf{q}} \in \mathcal{P}_0$;
II. Найдётся последовательность $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{q}_n)$, *эквивалентная* $\mathbf{q}$, *такая что* $\lim_{n\to\infty}\bar{q}_n = \infty$.

Литература

1. **Mekler A.A.** On Regularity and Weak Regularity of Functions Generating Marcinkiewicz Spaces// *Proc. Intern. Conf. "FUNCTION SPACES, V."- Poznan, Poland, July 2000. ed. by H. Hudzik and L. Skrzypczak. Marcel Dekker, Lect. Not. Pur. Appl. Math. Ser. 213. P. 379-387.*

2. **Меклер А.А.** Представление суперпозиции вогнутых модуляр на двоичной логарифмической шкале. "Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования", Герценовские Чтения - 2007. LX. СПб, 2007. С. 121-128.

3. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** Regular Variations. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

4. **Меклер А.А.** О полугруппе модулярных функций с операцией инволюции// *"Исследования по линейным операторам и теории функций", 32. Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 315. 2004. С. 121 - 131.*

5. **Dodds P.G., B.de Pagter, Semenov E.M., Sukochev F.A.** Symmetric functionals and singular traces. Positivity. 2. 1998. P. 47-75.

6. **Седаев А.А., Смуров В.А.** О нахождении одной числовой характеристики для пространств Марцинкевича. В сб. "Методы решения операторных уравнений". Воронеж: ВГУ, 1978. С. 135-142.

7. **Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

8. **Abakumov E.V., Mekler A.A.** A Concave Regularly Varying Leader for Equi-concave Functions. J. Math. Anal. Appl. 187. 1994. 3. P. 943-951.

Summary

Mekler A.A. On positive integer characteriyation of regular variyng quasi-concave modulars

The initiated in [1] study of the correspondence between quasi-concave modulars and sequences of positive integers is continued. In the presented paper are examenated especially regularly variyng quasi-concave modulars. It is stated in Theorems 9, that a sequence of positive integers corresponds to a *fast variyng* quasi-concave modular (that means the case of regularity index $\alpha = 0$) **iff** it is equivalent to a integer sequence which tends to $+\infty$. In Theorem 8 is proved that the sequece of positive integers corresponds to a *slow variyng* modular (the case of regularity index $\alpha = 1$) **iff** it is equivalent to a sequence of the form $211\cdots1211\cdots121\cdots\ \cdots\cdots$ where the lengths of blocks of units tends to $+\infty$. In Theorem 5 the case of intermediate value of regularity index $\alpha : 0 < \alpha < 1$ is investigated.

Потсдамский университет
Потсдам,Германия
e-mail:alexandre.mekler@freenet.de

Поступила 17.02.2008