Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008

УДК 512.556

КОНГРУЭНЦИИ НА ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И F-ПРОСТРАНВСТВА

Е.М. Вечтомов, Д.В. Чупраков

Исследуются конгруэнции полуколец непрерывных неотрицательных функций над топологическим пространством X. В терминах таких конгруэнций получены новые алгебраические характеризации F-пространств и P-пространств X.

Введение

Пусть $C^+(X)$ $(U(X))$ — полукольцо (полуполе без нуля) всех непрерывных неотрицательных (положительных) функций, определенных на произвольном топологическом пространстве X, с обычными операциями сложения и умножения функций. Если вместо сложения $+$ взять операцию max $\vee$, то получим идемпотентные полукольцо $C^\vee(X)$ и полуполе $U^\vee(X)$. Кольцо $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X служит кольцом разностей для $C^+(X)$ и для $U(X)$.

Целью работы является исследование связей между конгруэнциями полуколец $C^\vee(X)$ и $C^+(X)$.

Основным результатам работы посвящен параграф 2. В теореме 1 установлены новые характеризации F-пространств. В частности, X является F-пространством, если и только если $\mathrm{Con}U(X) = \mathrm{Con}U^\vee(X)$. В теореме 2 доказывается, что множества конгруэнций $\mathrm{Con}C^+(X)$ и $\mathrm{Con}C^\vee(X)$ равны тогда и только тогда, когда X есть P-пространство, что дает новую характеризацию P-пространств.

Пространство X называется *P-пространством*, если нуль-множество любой функции из $C(X)$ открыто [1].

Топологическое пространство X называется *F-пространством*, если в кольце $C(X)$ все конечнопорожденные идеалы — главные [2].

Исходные понятия теории полуколец имеются в монографии Голана [3]. Теория колец непрерывных функций изложена в известной книге

Гилмана и Джерисона [4]. Систематическое изучение конгруэнций на полукольцах непрерывных функций начато в [5].

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид, выполняется законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения, $0 \neq 1$ и тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ [3]. Если операция умножения на S коммутативна, то S — *коммутативное* полукольцо. Полукольцо, не являющееся кольцом, каждый элемент которого обратим, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*.

На полукольце непрерывных функций $C^+(X)$ операции заданы поточечно. Операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ также определяются поточечно: $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ в каждой точке $x \in X$.

На множестве $C(X)$ зададим порядок $f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in X) f(x) \leqslant g(x)$. Запись $f < g$ будет обозначать, что $f \leqslant g$, но $f \neq g$.

Для каждой функции $f \in C(X)$ множества $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ и $\mathrm{coz} f = X \setminus Z(f)$ называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством*. Обозначим $\mathrm{pos} f = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ и $\mathrm{neg} f = \{x \in X \mid f(x) < 0\}$. Множество $Z(f)$ замкнуто, а множества $\mathrm{coz} f$, $\mathrm{pos} f$ и $\mathrm{neg} f$ открыты.

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности на S, сохраняющее полукольцевые операции. Пусть ρ — конгруэнция на полукольце S. Полукольцо $S/_\rho = \{[a]_\rho \mid a \in S\}$ всех классов $[a]_\rho = \{s \in S \mid s \, \rho \, a\}$, $a \in S$, конгруэнтности назвается *фактор-полукольцом* полукольца S по конгруэнции ρ. Через $\ker \rho$ будем обозначать класс единицы $[1]_\rho$ конгруэнции ρ и называть его *ядром* полукольца S. Ядро конгруэнции полуполя $U^\vee(X)$ назовем $\vee$-*ядром*.

Пусть I — идеал полукольца S. Отношение σ_I на полукольце S такое, что

$$\forall a, b \in S \; (a \, \sigma_I \, b \Longleftrightarrow \exists u, v \in I \; (a + u = b + v))$$

является *конгруэнцией Берна* по идеалу I. Это наименьшая конгруэнция, содержащая идеал I в классе нуля.

Пусть I — идеал кольца $C(X)$. Конгруэнция $\gamma(I)$ на полукольце $C^+(X)$ или полуполе $U(X)$ заданная формулой $a \, \gamma(I) \, b \Leftrightarrow a - b \in I$ для любых $a, b \in S$, называется *идеальной* конгруэнцией на $C^+(X)$ или $U(X)$ соответственно. Любая идеальная конгруэнция $\gamma(I) \in \mathrm{Con} U(X)$ продолжается до соответствующей конгруэнции $\gamma(I)$ на $C^+(X)$.

Множество всех конгруэнций $\mathrm{Con} S$ полукольца S является полной решеткой отностительно включения $\subseteq$. Точной верхней гранью двух конгруэнций $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}S$ является транзитивное замыкание $\rho \vee \sigma$ композиции $\rho \circ \sigma$ этих элементов. Точной нижней гранью элементов $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}S$ является их пересечение $\rho \cap \sigma$.

Другие необходимые термины и обозначения будут вводиться по ходу изложения.

1. О ядрах конгруэнций на полуполях $U(X)$ и $U^\vee(X)$

Подмножество A упорядоченного множества S называется *выпуклым*, если вместе с элементами $s_1 \leqslant s_2$ множество A содержит все элементы s, удовлетворяющие условию $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$.

Лемма 1. *Классы любой конгруэнции на полукольце $C^\vee(X)$ и на полуполе $U^\vee(X)$ выпуклы.*

Действительно, пусть ρ — произвольная конгруэнция на $C^\vee(X)$ (или на $U^\vee(X)$), $f_1, f_2 \in [g]_\rho$, $f \in C^\vee(X)$ и $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$. Тогда $[f]_\rho = [f \vee f_1]_\rho = [f]_\rho \vee [f_1]_\rho = [f]_\rho \vee [f_2]_\rho = [f \vee f_2]_\rho = [f_2]_\rho = [g]_\rho$.

Предложение 1. *Мультипликативная нормальная подгруппа K полутела U является ядром тогда и только тогда, когда $k_1 s_1 + ... + k_n s_n \in K$ для любых $k_1, ..., k_n \in K$ и любых $s_1, ..., s_n \in U$ с условием $s_1 + ... + s_n = 1$. При этом K и ρ связаны соотношениями: $u \rho v \Longleftrightarrow uv^{-1} \in K$ для любых $u, v \in U$ и $K = \ker \rho$.*

Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 2$ это предложение рассмотрено в [3, proposition 9.23].

Заметим, что решетка $\mathrm{Con}U$ изоморфна решетке $\{\ker \rho \mid \rho \in \mathrm{Con}U\}$ всех ядер полутела U с операциями умножения и пересечения ядер.

Предложение 2 (см. [6, лемма 7.2]). *Мультипликативная подгруппа K полуполя $U^\vee(X)$ является $\vee$-ядром тогда и только тогда, когда K выпукла и замкнута относительно операций взятия максимума $\vee$ (равносильно, минимума $\wedge$).*

Предложение 3. *На полуполе $U^+(X)$ любое $\vee$-ядро является ядром. Решетка конгруэнций $\mathrm{Con}U^\vee(X)$ является подрешеткой решетки конгруэнций $\mathrm{Con}U(X)$.*

Доказательство. Пусть K — $\vee$-ядро. В силу предложения 1 достаточно показать, что для любых $f_1, f_2 \in U^+(X)$ и любых $e_1, e_2 \in K$ условие $f_1 + f_2 = 1$ влечет $f_1 e_1 + f_2 e_2 \in K$. Имеем $e_1 \wedge e_2 = (f_1 + f_2)(e_1 \wedge e_2) \leqslant f_1 e_1 + f_2 e_2 \leqslant (f_1 + f_2)(e_1 \vee e_2) = e_1 \vee e_2$, причем, $e_1 \wedge e_2, e_1 \vee e_2 \in K$

по предложению 2. В силу выпуклости $\vee$-ядра (лемма 1) получаем $f_1e_1 + f_2e_2 \in K$. По предложению 1 K является ядром. Значит, решетка конгруэнций $\mathrm{Con}U^{\vee}(X)$ является подрешеткой решетки конгруэнций $\mathrm{Con}U(X)$.

Главной конгруэнцией ρ на полуполе U, порожденной парой (u, v), называется наименьшая конгруэнция на U с условием $u\,\rho\,v$. Она однозначно задается парой $(uv^{-1}, 1)$.

Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$ $(U^{\vee}(X))$, порожденной парой $(\varphi, 1)$, будем называть *главным ядром* и обозначим $\ker(\varphi)$ $(\ker^{\vee}(\varphi))$.

И. А. Семеновой [7, теорема 1] установлено строение главных конгруэнций на полуполе $U(X)$.

Теорема A. *Главные ядра* $\ker(\varphi)$ *на полуполе* $U(X)$ *и только они имеют вид:*

$$\left\{ v \in U(X) \,\middle|\, \begin{array}{l} v - 1 \in (\varphi - 1)C(X), \\ (\exists k \in \mathbb{N})\ (\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leqslant v \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}) \end{array} \right\}.$$

Для главных $\vee$-ядер теорема приобретает следующий вид:

Предложение 4. *Главные ядра* $\ker^{\vee}(\varphi)$ *на полуполе* $U^{\vee}(X)$ *и только они имеют вид:*

$$\left\{ v \in U^{\vee}(X) \mid (\exists k \in \mathbb{N})\ (\varphi \wedge \varphi^{-1})^{k} \leqslant v \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}) \right\}. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим отношение ρ, заданное условием: $f\,\rho\,g \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) f(\varphi \wedge \varphi^{-1})^{k} \leqslant g \leqslant f(\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}$ для любых $f, g \in U^{\vee}(X)$. Легко видеть, что ρ является конгруэнцией, причем $[1]_{\rho}$ есть множество (1). Пусть τ — произвольная конгруэнция на $U^{\vee}(X)$, для которой $\varphi \tau 1$. Рассмотрим произвольные функции $f, g \in U^{\vee}(X)$, такие, что $f\,\rho\,g$. Для них $f(\varphi \wedge \varphi^{-1})^{k} \leqslant g \leqslant f(\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. По предложению 2 $f(\varphi \wedge \varphi^{-1})^{k} \in [f]_{\tau}$ и $f(\varphi \vee \varphi^{-1})^{k} \in [f]_{\tau}$. Значит, по лемме 1 $g \in [f]_{\tau}$ и $f\,\tau\,g$. Таким образом, ρ является наименьшей конгруэнцией на $U^{\vee}(X)$, порожденная парой $(\varphi, 1)$.

Для каждой конгруэнции $\rho \in \mathrm{Con}U^{\vee}(X)$ с ядром $K = [1]_{\rho}$ на полукольце $C^{\vee}(X)$ введем бинарное отношение ρ_K:

$$f\,\rho_K\,g \Longleftrightarrow gk \leqslant f \leqslant gk' \text{ для некоторых } k, k' \in K.$$

Для каждой конгруэнции $\rho \in \mathrm{Con}U(X)$ с ядром $[1]_{\rho} = K$ рассмотрим бинарное отношение $\sim_K$ на полукольце $C^{+}(X)$:

$$f \sim_K g \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i u_i = \sum_{i=1}^{m} g_i v_i$$

для некоторых $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m \in K$ и некоторых $f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m \in C^+(X)$ с условиями $f = f_1 + ... + f_n$, $g = g_1 + ... + g_m$.

Предложение 5. *Пусть ρ — некоторая конгруэнция на $U^\vee(X)$, $K = [1]_\rho$. Тогда отношение ρ_K является найменьшей конгруэнцией на $C^\vee(X)$, склеивающих K. При этом $[1]_{\rho_K} = K$.*

Доказательство. Несложно видеть, что ρ_K — конгруэнция на $C^\vee(X)$. Докажем, что ядра конгруэнций $\rho \in \mathrm{Con}U^\vee(X)$ и $\rho_K \in \mathrm{Con}C^\vee(X)$ совпадают. Покажем включение $K \subseteq [1]_{\rho_K}$. Возьмем произвольную функцию $f\,\rho\,1$. Значит, $1 \cdot f \leqslant f \leqslant 1 \cdot f$. Следовательно, $f\,\rho_K\,1$.

Обратно, пусть $f\,\rho_K\,1$, то существуют $k, k' \in K$, для которых $1 \cdot k \leqslant f \leqslant 1 \cdot k'$. По лемме 1, $f\,\rho\,1$. Значит, $K = [1]_{\rho_K}$. Теперь докажем, что конгруэнция $\rho_K \in \mathrm{Con}C^\vee(X)$ является наименьшей конгруэнцией на $C^\vee(X)$, склеивающей ядро $K = [1]_\rho$. Рассмотрим произвольную конгруэнцию $\tau \in \mathrm{Con}C^\vee(X)$, удовлетворяющую условию $f \in K \Rightarrow f\,\tau\,1$. Покажем, что $f\,\rho_K\,g$ влечет $f\,\tau\,g$.

Пусть $f\,\rho_K\,g$, то $gk \leqslant f \leqslant gk'$ для некоторых $k, k' \in K$. Заметим, что $[gk]_\tau = [g]_\tau[k]_\tau = [g]_\tau$ и $[gk']_\tau = [g]_\tau[k']_\tau = [g]_\tau$. По лемме 1, $f \in [g]_\tau$. Итак, конгруэнция ρ_K является наименьшей на $C^\vee(X)$, с $\ker\rho = K$.

Предложение 6. *Для любого $\vee$-ядра K отношение ρ_K является конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$.*

Для доказательства достаточно показать, что отношение ρ_K стабильно относительно сложения. Действительно, если $f\rho_K g$, то $gk \leqslant f \leqslant gk'$, для некоторых $k, k' \in K$. Возьмем $s = k \wedge 1$ и $s' = k' \vee 1$ и получим $(g+h)s = gs + hs \leqslant gk + h \leqslant f + h \leqslant gk' + h \leqslant gs' + hs' = (g+h)s'$. Таким образом, $(f+h)\,\rho_K\,(g+h)$ и ρ_K — конгруэнция на $C^+(X)$.

Лемма 2. *Пусть ρ — некоторая конгруэнция на $U(X)$, $K = [1]_\rho$. Тогда $f \sim_K g$, тогда и только тогда, когда существуют $g_1, ..., g_n \in C^+(X)$ и $w_1, ..., w_n \in K$, такие что $g = g_1 + ... + g_n$ и $f = \sum_{i=1}^n g_i w_i$.*

Доказательство. Достаточность очеочевидна. Докажем необходимость. Пусть $f \sim_K g$ для $f, g \in C^+(X)$. Существуют $u_i, v_j \in K$ и $f_i, g'_j \in C^+(X)$, для которых

$$f = \sum_{i=1}^n f_i, \quad g = \sum_{j=1}^m g'_j, \quad \sum_{i=1}^n f_i u_i = \sum_{j=1}^m g'_j v_j.$$

Можно считать, что $n = m$.

Заметим, что для фиксированных $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ и любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \leqslant n$, если $j = (i+k-2) \bmod n) + 1$, то $i = ((j-k) \bmod n) + 1$.

Для всех $k, i \in \{1, ..., n\}$ рассмотрим функции из полукольца $C^+(X)$:

$$\beta_{ik} = f_{i,k-1} \wedge g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k-1}, \quad f_{i0} = f_i u_i, \quad g'_{i0} = g'_i v_i,$$
$$f_{ik} = f_{i,k-1} - \beta_{ki}, \quad g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k} = g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k-1} - \beta_{ki}.$$

Тогда при $k = 1$ имеем

$$s = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} + \sum_{i=1}^{n} f_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} + \sum_{i=1}^{n} g'_{i1} \text{ и}$$
$$f_i u_i = \beta_{i1} + f_{i1}, \quad g'_j v_j = \beta_{j1} + g'_{j1},$$
$$\mathrm{coz} f_{i1} \cap \mathrm{coz} g'_{i1} = \varnothing \quad \text{для } i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Рассмотрим шаг $k > 1$ $(k \leqslant n)$ в предположении, что

$$s = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \beta_{il} + \sum_{i=1}^{n} f_{i,k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \beta_{il} + \sum_{i=1}^{n} g'_{i,k-1} \text{ и}$$
$$f_i u_i = \sum_{l=1}^{k-1} \beta_{il} + f_{i,k-1}, \quad g'_j v_j = \sum_{l=1}^{k-1} \beta_{((j-l+1) \bmod n)+1,l} + g'_{j,k-1},$$
$$\mathrm{coz} f_{i,k-1} \cap \mathrm{coz} g'_{((i+p-2) \bmod n)+1,k-1} = \varnothing$$

для всех $i, j \in 1, ..., n$ и $p \in \{1, ..., k-1\}$. Тогда

$$s = \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \beta_{il} + \sum_{i=1}^{n} f_{ik} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \beta_{il} + \sum_{i=1}^{n} g'_{ik} \text{ и}$$
$$f_i u_i = \sum_{l=1}^{k} \beta_{il} + f_{ik}, \quad g'_j v_j = \sum_{l=1}^{k} \beta_{((j-l) \bmod n)+1}, l + g'_{jk},$$
$$\mathrm{coz} f_{ik} \cap \mathrm{coz} g'_{((i+k-1) \bmod n)+1,k} = \varnothing.$$

Для всех $i \in \{1, ..., n\}$, $p \in \{1, ..., k-1\}$ и $j = ((i+p-1) \bmod n) + 1$ имеем $\mathrm{coz} f_{ik} = \mathrm{coz}(f_{i,k-1} - (f_{i,k-1} \wedge g'_{((i+k-2) \bmod n)+1,k-1}) \subseteq \mathrm{coz} f_{i,k-1}$, аналогично $\mathrm{coz} g'_{jk} \subseteq \mathrm{coz} g'_{j,k-1}$ В силу предположения $\mathrm{coz} f_{ik} \cap \mathrm{coz} g'_{jk} = \varnothing$. Значит, $\mathrm{coz} f_{ik} \cap \mathrm{coz} g'_{((i+p-2) \bmod n)+1,k} = \varnothing$ для всех $p \in \{1, ..., k\}$.

При $k = n$ имеем $\mathrm{coz} f_{in} \cap \mathrm{coz} g'_{jn} = \varnothing$ для всех $i, j \in \{1, ..., n\}$ или

$$\mathrm{coz} \sum_{i=1}^{n} f_{in} \cap \mathrm{coz} \sum_{j=1}^{n} g'_{jn} = \varnothing.$$

Откуда для любых $i, j \in \{1, ..., n\}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f_{in} = \sum_{i=1}^{n} g'_{in} = 0, \quad s = \sum_{i,j=\overline{1,n}} \beta_{ij},$$

$$f_i u_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}, \quad g'_j v_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{((i+j-1) \bmod n)+1,j} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}.$$

Получаем

$$g'_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} v_j^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \beta'_{ij}, \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_i^{-1},$$

$$g = \sum_{j=1}^{n} g_j = \sum_{ij=\overline{1,n}} \beta'_{ij} = \sum_{k=1}^{n^2} g_k,$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i,j=\overline{1,n}} \beta_{ij} u_i^{-1} = \sum_{i,j=\overline{1,n}} \beta'_{ij} u_i^{-1} v_j = \sum_{k=1}^{n^2} g_k w_k.$$

Опираясь на лемму 2, легко убедиться в справедливости следующего предложения:

Предложение 7. *Пусть ρ — некоторая конгруэнция на полуполе $U(X)$, $K = [1]_\rho$. Тогда отношение $\sim_K$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$, склеивающей ядро K: $K \subseteq [1]_{\sim_K}$.*

2. Полукольца непрерывных функций на F-пространствах

Подмножества A и B пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует функция $f \in C(X)$, принимающая значение 0 на A и 1 на B.

Подпространство A топологического пространства X называется *C^*-расширяемым*, если любая ограниченная функция из $C(A)$ непрерывно продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Теорема В. *Для любого топологического пространства X следующие условия равносильны:*

1. *X — F-пространство;*
2. *непересекающиеся конуль-множества на X функционално отделимы;*

3. *для любой функции $f \in C(X)$ множества $negf$ и $posf$ функционально отделимы;*

4. *любое конуль-множество на X C^*-расширяемо;*

5. *каждый идеал в $C(X)$ выпуклый (абсолютно выпуклый);*

6. *решетка всех идеалов кольца $C(X)$ (равносильно, полукольца $C^+(X)$) дистрибутивна;*

7. *решетка конгруэнций $ConU(X)$ дистрибутивна;*

8. $\forall u \in U(X)\ \ker(u) = \ker(u \vee u^{-1})$.

Характеризации 2–5 имеются в [3], условие 6 для колец $C(X)$ доказано Е. М. Вечтомовым в [8], а для полуколец $C^+(X)$ в [5], условия 7 и 8 получены Д. В. Широковым в [9].

Теорема 1. *Для любого пространства X равносильны условия:*

1. *X — F-пространство;*

2. $ConU(X) = ConU^{\vee}(X)$*;*

3. $(\forall f, g, h \in C(X),\ f \leqslant h \leqslant g)(\exists \alpha \in C(X),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$
$[h = \alpha f + (1-\alpha)g]$*;*

4. $\sim_K = \rho_K$ *для любого ядра K;*

5. *для любого ядра K $f\,\rho_K\,g$ тогда и только тогда, когда $f = gk$ для некоторого $k \in K$;*

6. *отношение σ на полукольце $C^+(X)$, заданное условием*

$$f\,\sigma\,g \iff (\exists u \in U(X))f = gu,$$

является конгруэнцией на нем;

7. *классы любой конгруэнции полукольца $C^+(X)$ выпуклы;*

8. *классы любой конгруэнции полуполя $U(X)$ выпуклы;*

9. *ядра всех конгруэнций полукольца $C^+(X)$ выпуклы.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X является F-пространством. Возьмем произвольную функцию $v \in \ker^{\vee}(u)$. По предложению 4 справедливо неравенство $1 \leqslant v \vee v^{-1} \leqslant u \vee u^{-1}$. Значит, $v \vee v^{-1} - 1 \leqslant u \vee u^{-1} - 1$. По условию 5) теоремы B идеал $(u \vee u^{-1} - 1)C(X)$ является выпуклым и $v \vee v^{-1} - 1 \in (u \vee u^{-1} - 1)C(X)$. По теореме A $v \vee v^{-1} \in \ker(u)$. Пользуясь условием 8) теоремы B, имеем $v \in \ker(u)$. Значит, на F-пространстве $\ker^{\vee}(u) \subseteq \ker(u)$. В тоже время, всегда $\ker(u) \subseteq \ker^{\vee}(u)$.

Итак, $\ker^{\vee}(u) = \ker(u)$ для любой $u \in U(X)$. Следовательно, $\mathrm{Con}U(X) = \mathrm{Con}U^{\vee}(X)$, поскольку каждая конгруэнция полуполя $U(X)$ (полуполя $U^{\vee}(X)$) является объединением главных конгруэнций полуполя $U(X)$ ($U^{\vee}(X)$).

2) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $\mathrm{Con}U(X) = \mathrm{Con}U^{\vee}(X)$. Тогда конгруэнция $\sim_K$ является конгруэнцией на $C^{\vee}(X)$. По предложению 5 $\rho_K \subseteq \sim_K$. С другой стороны, $\sim_K \subseteq \rho_K$ по предложению 7. Откуда и следует условие 4).

4) $\Longrightarrow$ 8). Рассмотрим произвольное ядро K полуполя $U(X)$. Исходя из посылки $\sim_K = \rho_K$, заключаем что ρ_K — конгруэнция полуполя $U(X)$. По предложению 5 имеем $[1]_{\rho_K} = K$. Значит, ядро K выпуклое. Пусть $\rho \in \mathrm{Con}U(X)$, $f \in U(X)$, $g_1, g_2 \in [g]_\rho$ и $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$. Тогда $g_1 g^{-1} \leqslant f g^{-1} \leqslant g_2 g^{-1}$ и $g_1 g^{-1}, g_2 g^{-1} \in K$. Откуда $f g^{-1} \in K$, или $f \in [g]_\rho$.

8) $\Longrightarrow$ 1) Возьмем идеал I кольца $C(X)$. Пусть $f \in C^{+}(X)$ и $g \in I$ такие, что $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда $1 \leqslant 1 + f \leqslant 1 + g$. Рассмотрим идеальную конгруэнцию $\gamma(I) \in \mathrm{Con}U(X)$ и ее ядро $K = [1]_{\gamma(I)}$. Тогда $K = (1 + I) \cap U(X)$ и $1 + g \in K$. По условию 8) все ядра выпуклы, следовательно, $1 + f \in K$ и $f \in I$. Значит, произвольный идеал I выпуклый. По условию 5) теоремы B X — F-пространство.

1) $\Longrightarrow$ 3). Рассмотрим функции $f \leqslant g \leqslant h$ из $C^{+}(X)$. На $\mathrm{pos}(g - f) = \mathrm{coz}((g - f) \vee 0)$ рассмотрим непрерывную функцию $\alpha' = (g - h)/(g - f)$. Очевидно, $0 \leqslant \alpha' \leqslant 1$. Тогда по условию 4) теоремы B α' продолжается до искомой функции $\alpha \in C(X)$.

3) $\Longrightarrow$ 7). Пусть $f, g, h \in C^{+}(X)$, $f \leqslant h \leqslant g$ и $f, g \in [f]_\tau$ ($\tau \in \mathrm{Con}C^{+}(X)$). Тогда для некоторой $\alpha \in C^{+}(X)$, $\alpha \leqslant 1$, справедливо $[h]_\tau = [\alpha f + (1 - \alpha) g]_\tau = [\alpha]_\tau [f]_\tau + [1 - \alpha]_\tau [g]_\tau = [\alpha]_\tau [f]_\tau + [1 - \alpha]_\tau [f]_\tau = ([\alpha]_\tau + [1 - \alpha]_\tau)[f]_\tau = [\alpha + 1 - \alpha]_\tau [f]_\tau = [f]_\tau$. Значит, $h \in [f]_\tau$ и класс $[f]_\tau$ выпуклый.

Импликания 7) $\Longrightarrow$ 9) очевидна, а 9) $\Longrightarrow$ 1) доказывается аналогично импликации 8) $\Longrightarrow$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 5). Пусть X — F-пространство и K—ядро полуроля $U(X)$. Возьмем функции $f, g \in C^{+}(X)$, для которых $f \,\rho_K\, g$. Тогда по определению отношения ρ_K найдутся такие $k_1, k_2 \in K$, что $g k_1 \leqslant f \leqslant g k_2$. Очевидно, $\mathrm{coz} f = \mathrm{coz} g$.

На $\mathrm{coz} g$ функция $k_1 k_2^{-1} \leqslant f g^{-1} k_2^{-1} \leqslant 1$ и непрерывна. Следовательно, она продолжается до функции $\chi' \in C^{+}(X)$ Возьмем $\chi = \chi' \vee k_1 k_2^{-1} \in U(X)$. Имеем $\chi = \chi' = fg^{-1}k_2^{-1}$ на $\mathrm{coz}g$ и $k_1 k_2^{-1} \leqslant \chi \leqslant 1$ на всем X. Значит, $\chi \in K$ и $k = \chi k_2 \in K$.

На $\mathrm{coz}g$ имеем $k = fg^{-1}$ или $f = gk$. Откуда $f = gk$ на всем X.

5) $\Longrightarrow$ 6). Поскольку множество $U(X)$ является $\vee$-ядром, то $\sigma = \rho_{U(X)}$ будет конгруэнцией на $C^{+}(X)$ по предложению 5.

6) $\Longrightarrow$ 1). Очевидно, $\sigma \subseteq \sim_{U(X)}$. С другой стороны, $\sim_{U(X)} \subseteq \sigma$ по предложению 7. То есть $\sigma = \sim_{U(X)}$. Рассмотрим произволные функции $g_1, g_2 \in C^{+}(X)$, такие, что $\mathrm{coz}g_1 \cap \mathrm{coz}g_2 = \varnothing$, то есть $g_1 g_2 = 0$. Возьмем функции $g = g_1 + g_2, f = g_1 + 2g_2 \in C^{+}(X)$. Тогда $f \sim_{U(X)} g$. Поэтому $f \,\sigma\, g$, то есть $f = gu = g_1 u + g_2 u$ для некоторой $u \in U(X)$. Функция u, непрерывная на $\mathrm{coz}g$, принимает значение 2 на $\mathrm{coz}g_1$ и 1 на $\mathrm{coz}g_2$. По условию 2) теоремы В X является F-пространством. Теорема полностью доказана.

Полукольцо S называется *абелево-регулярным положительным* (arp-полукольцом), если S - абелево-регулярное (т. е. для любого $a \in S$ найдется такой элемент $x \in S$, что $axa = a$, и каждый его идемпотент e коммутирует с любым элементом из S) и положительное полукольцо (т. е. для любого элемента $a \in S$ элемент $a + 1$ обратим в S).

Пусть σ - конгруэнция на дистрибутивной решетке $L(S)$ всех идемпотентов полукольца S и τ - конгруэнция на полутеле $U(S)$ всех обратимых элементов полукольца S. Пара конгруэнций (σ, τ) называется *согласованной*, если она удовлетворяет условию: $e\sigma f \Rightarrow \tau \circ \varphi(e) = \tau \circ \varphi(f)$, где конгруэнция $\varphi(e)$ задается условием: $u\,\varphi(e)\,v \Leftrightarrow eu = ev, u, v \in U(S)$.

Нам потребуется следующая теорема О.В. Старостиной [10]:

Теорема C. *Отображение $\alpha\colon \rho \to (\rho|_{L(S)}, \rho|_{U(S)})$ является изоморфизмом решетки всех конгруэнций $ConS$ arp-полукольца S на подрешетку решетки всех согласованных пар конгруэнций $ConL(S) \times ConU(S)$.*

Теорема 2. *Множества конгруэнций $ConC^{+}(X)$ и $ConC^{\vee}(X)$ равны тогда и только тогда, когда X — P-пространство.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathrm{Con}\, C^{+}(X) = \mathrm{Con}\, C^{\vee}(X)$. Покажем, что, для любой функции $\tau \in C^{+}(X)$, множество $Z(\tau)$ открыто. Множество $M_{x_0} = \{f \in C^{+}(X) \mid f(x_0) = 0\}$ служит идеалом полуколец $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$. Пусть $\rho = \rho(M_{x_0})$ — конгруэнция Берна $C^{+}(X)$, а $\sigma = \sigma(M_{x_0})$ — конгруэнция Берна на $C^{\vee}(X)$. Тогда их классы нуля совпадают с M_{x_0}. Более того, они являются наименьшими такими конгруэнциями. Учитывая $\mathrm{Con}C^{+}(X) = \mathrm{Con}C^{\vee}(X)$, получаем $\rho = \sigma$.

Для любых $g, h \in C^+(X)$ $(g, h \in U(X))$, таких, что $g\,\rho\,h$ существует $\varphi, \psi \in M_{x_0}$, для которых $g + \varphi = h + \psi$. Тогда $g(x_0) = h(x_0)$. Предположим, что $g(x_0) > 0$. Так как $g\,\sigma\,h$ то существует $\chi \in M(x_0)$, с условием $g \vee \chi = h \vee \chi$. Так как $[g]_\rho \neq M_{x_0}$, то существует такое открытое множество $A \ni x_0$, на котором $\chi < g \wedge f$. Следовательно, $g|_A = h|_A$.

Итак, если две непрерывные функции в какой-то точке положительны и равны, то они равны и в некоторой открытой окрестности этой точки.

Возьмем произвольную функцию $f \in C^+(X)$ и любую точку $x_0 \in Z(f)$. Тогда функции 1 и $1 + f$ равны 1 в точке x_0. Значит, $1 + f = 1$ на некотором открытом множестве A, содержащем x_0. Имеем $A \subseteq Z(f)$. Поэтому, нуль-множество $Z(f)$ является открытым множеством. Итак, любое нуль-множество пространства X открыто, то есть X является P-пространством.

Достаточность. Пусть X — P-пространство. Тогда $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ являются arp-полукольцами. Значит, $L(C^+(X)) = L(C^\vee(X))$. Так как любое P-пространство является F-пространством, то $\mathrm{Con}U(X) = \mathrm{Con}U^\vee(X)$ по теореме 1. Тогда по теореме C получаем: $\mathrm{Con}C^+(X) = \mathrm{Con}C^\vee(X)$.

Замечание. Решетка $\mathrm{Con}U^\vee(X)$ всегда дистрибутивна. По теореме B дистрибутивность решетки $\mathrm{Con}U(X)$ равносильна тому, что пространство X является F-пространством. Из теоремы 2 и теорем B и C вытекает, что решетки $\mathrm{Con}C^+(X)$ и $\mathrm{Con}C^\vee(X)$ дистрибутивна для любого P-пространства X. Известно, что если одна из решеток $\mathrm{Con}C^+(X)$ или $\mathrm{Con}U(X)$ дистрибутивны, то X является F-пространством [5, следствие 3.2].

Естественно поставить вопрос. Какое свойство топологического пространства X равносильно дистрибутивности решетки $\mathrm{Con}C^+(X)$ (решетки $\mathrm{Con}C^\vee(X)$)?

Литература

1. **Gillman L., Henriksen M.** Concerning rings of continious functions. *//Trans American Math. Soc. 1954. V.77. №2. P. 340–362.*

2. **Gillman L., Henriksen M.** Rings of continious functions in which every finitely generated ideal is principal //*Trans American Math. Soc. 1956. V.82. №2. P. 366–391.*

3. **Golan J.S.** The theory of semirings with applications in mathematics and theoetical computer science. Harlow: Longman scientific and technical, 1992.

4. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1976.

5. **Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы,конгруэнции //*Фундам. и прикл. математика. 1998. Т.4. №2. С. 493–510.*

6. **Полин С.В.** Простые полутела и полуполя //*Сиб. матем. журнал. 1974. Т.15. №1. С. 90–101.*

7. **Семенова И.А.** Максималные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций //*Фундам. и прикл. математика. 2000. Т.6. №.1. С. 305–310.*

8. **Вечтомов Е.М.** Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства //*Матем. заметки. 1983. Т.34. №3. С. 321–332.*

9. **Широков Д.В.** Условия дистрибутивности решетки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций //*Вестник ВятГГУ. 2003. №8. С. 137–140.*

10. **Старостина О.В.** Строение абелево регулярных положительных полуколец //*Чебышевский сборник. 2005. Т.6. №4(16). С. 141–151.*

Summary

Vechtomov E.M., Chuprakov D.V. Congruences on semirings of continious functions and F-spaces

The congruences of semirings of non-negative continuous functions on topological space are investigated. In terms such congruences new algebraic characterizations of F-spaces and P-spaces are received.

Вятский гуманитарный университет *Поступила 12.01.2008*