*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008*

УДК 51

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВВЕДЕНИЯ ИНТЕГРАЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

В.Д. Яковлев

Предпринятая в 60-е годы 20-го столетия реформа школьного математического образования преследовала прежде всего цель приблизить школьную математику к вузовской. В программу по математике были включены такие важные с точки зрения практики темы, как "Производная функции" и "Интеграл". В настоящее время, однако, следует признать, что данная реформа в том виде, в каком она представлялась, не удалась. И если тема "Производная функции" еще в самом простейшем варианте изучается в общеобразовательной школе, то тема "Интеграл" фактически исчезла из школьного курса математики.

Тем не менее следует отметить один из плюсов реформы: появились и в настоящее время успешно работают физико-математические школы. Необходимо однако признать, что в программах по математике для этих школ указанные выше темы рассматриваются, на наш взгляд, недостаточно полно. Фактически эти темы излагаются в том же объеме, в каком они были представлены в 70-е годы в учебниках по математике для общеобразовательной школы.

В элементарном изложении (см. [1]) интеграл вводится на уровне интуиции следующим образом. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем. Для любого $x \in [a, b]$ рассматривается площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f на участке $[a, x]$. (Для простоты предполагается, что $f \geq 0$ на $[a, b]$.) Площадь, полученная таким образом, является функцией от x; обозначим эту функцию через F. Остается предположить, что F непрерывна на $[a, b]$ и имеет для всех x производную, в точности равную $f(x)$.

Если $x = b$, то общая площадь обозначается через $\int\limits_a^b f(x)dx$; площадь, соответствующая криволинейной трапеции на $[a, x]$, обозначается через $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$. Тогда $F(a) = 0$ и для всех $x \in [a, b]$ $f(x) = F'(x)$. Функция F при этом называется первообразной функции f на $[a, b]$.

В этом изложении все основано лишь на одной интуиции. Строго ничего не определено. Утверждения в указанном выше пособии [1] в большинстве лишь формулируются. Можно было бы думать, что для любой функции, не обязательно непрерывной, существует первообразная (а это неверно), что интегральное исчисление предназначено для отыскания первообразных функций в предположении, что они существуют и т.д.

В вузовской математике интеграл обычно вводится как предел интегральных сумм для функции f, заданной на $[a, b]$ (определение Римана). Далее доказывается, что всякая непрерывная функция интегрируема в смысле Римана; практически же при этом используются лишь интегралы от непрерывных функций, а бесполезные переходы к пределу лишь направляли использование интеграла от функции, имеющей несколько разрывов.

С другой стороны, прошло уже более 50 лет, как интеграл Лебега сделал интеграл Римана фактически бесполезным. Тем самым, на наш взгляд, необходимо как можно раньше научиться пользоваться понятием интеграла от функций, не обязательно непрерывных.

С этой точки зрения интересным является подход, предпринятый при определении интеграла Ш.Пизо и М.Заманским в книге "Курс математики. Алгебра и анализ"[2]. Интеграл в этой книге вводится следующим образом. В начале рассматривается класс ступенчатых функций и понятие интеграла от ступенчатой функции. Далее вводится класс ярусных функций, как равномерные пределы последовательностей ступенчатых функций. При этом, если f - ярусная функция на отрезке $[a, b]$, а (φ_n) - последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящихся к f на $[a, b]$, то по определению $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$. Сразу же отметим, что непрерывные, а также монотонные функции на отрезке $[a, b]$ являются ярусными, а следовательно, интегрируемы. Дальнейшее изложение теории интеграла по Заманскому мы не будем излагать, отметим лишь, что всякая ярусная функция интегрируема по Риману, но обратное неверно.

Приведенный выше подход определения интеграла является привлекательным с нескольких точек зрения. Во-первых, с точки зрения практики. В самом деле, настоящая простая функция, а именно взятая из физики, является ступенчатой функцией; определение же интеграла от ступенчатой функции проводится легко и в полном согласии с интуицией. Во-вторых, данный подход достаточно близок к современному пониманию интеграла. Наконец, такой подход охватывает довольно широкий класс функций, и не требуется проводить специальные рассуждения при переходе от непрерывных функций к разрывным, как это делается в теории интеграла Римана.

Насколько нам известно, первая попытка ввести интеграл по Заманскому в школьную математику была предпринята Иониным Ю.И. в работах [3], [4], [5]. Однако какого-либо продолжения эти работы не получили.

Несколько лет назад на базе Коми республиканского физико-математического лицея-интерната нами была предпринята попытка разработать учебное пособие по теме "Интеграл"для классов с углубленным изучением математики, основанное на определении интеграла по Заманскому. К настоящему времени это учебное пособие уже фактически готово, необходима лишь более тщательная проработка задачного материала. Пособие состоит из 4 глав.

В 1-й главе вводятся понятия ступенчатой и интегрируемой функции на $[a, b]$. Приведем основные определения и формулировки теорем.

1. Пусть даны числа $a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b$. Система промежутков $< a_k, a_{k+1} >$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ называется разбиением отрезка $[a, b]$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) промежутки между собой не пересекаются;

б) объединение всех этих промежутков дает отрезок $[a, b]$.

2. Функция φ, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$ $< a_k, a_{k+1} >$, что для любого $k = 0, 1, ..., n-1$ найдется число c_0, что $\varphi(x) = c_0$ для всех $x \in < a_k, a_{k+1} >$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Любая ступенчатая функция, заданная на отрезке, ограничена.

2. Сумма, разность, произведение и частное (при условии, что это частное определено) ступенчатых функций является ступенчатой функцией.

3. Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *интегрируемой* на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая на $[a, b]$ функция φ такая, что для всех $x \in [a, b]$ $\varphi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon$.

Из данного определения легко получить следующие свойства класса интегрируемых функций.

1. Линейность класса интегрируемых функций.

2. Интегрируемость произведения интегрируемых функций и модуля

интегрируемой функции.

Главу завершают следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 2. Всякая монотонная функция на отрезке $[a,b]$ интегрируема на этом отрезке.

Теорема 3. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$, то она интегрируема на отрезках $[a,c]$.

Вторая глава посвящена интегралу от ступенчатой функции.

Определение. Если φ - ступенчатая функция на $[a,b]$ и $\varphi(x) = c_k$ на $< a_k, a_{k+1} >$, то интегралом от функции φ на $[a,b]$ называется число $\sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\colon\ (a_{k+1} - a_k)$. Это число обозначается $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Дальнейшее изложение традиционно. Доказываются свойство линейности интеграла, свойство монотонности, свойство аддитивности интеграла от ступенчатой функции.

В третьей главе вводится понятие интеграла от интегрируемых функций. Глава начинается со следующей леммы.

Лемма. Пусть f - интегрируемая на $[a,b]$ функция, а (φ_n) - последовательность ступенчатых на $[a,b]$ функций, удовлетворяющая условию: $\forall n \in \boldsymbol{N}$ и $\forall x \in [a,b]$ $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \varphi_n(x) + \frac{1}{n}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что для любых $m, n \geq n_0$ справедливо неравенство $\sup\limits_{[a,b]} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon$.

Иными словами, доказывается фундаментальность последовательности (φ_n) по указанной норме.

Из леммы достаточно просто можно получить доказательство следующей теоремы.

Теорема. f - интегрируема на $[a,b]$, (φ_n) - последовательность ступенчатых функций, таких, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$ и любого $\forall x \in [a,b]$ $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \varphi_n(x) + 1/n$ $(*)$. Тогда последовательность интегралов $\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$ сходится и это предел не зависит от выбора последовательности (φ_n) со свойством $(*)$.

Определение. Пусть f - интегрируемая на $[a,b]$ функция, (φ_n) - последовательность ступенчатых функций со свойством: для любого $n \in \boldsymbol{N}$ и любого $\forall x \in [a,b]$ $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \varphi_n(x) + 1/n$. Тогда интегралом от функции f называется число, равное $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$. Этот предел обозначается через $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Далее в главе 3 доказываются основные свойства интеграла: линейность, монотонность, аддитивность. Доказывается формула Ньютона-Лейбница и правила вычисления интегралов (замена переменной, интегрирование по частям).

Четвертая глава посвящена приложениям интеграла. Центральным в данной главе является понятие аддитивной функции промежутка.

Определение. Пусть $[a, b]$ - некоторый отрезок. Рассмотрим множество всевозможных отрезков $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Определение. Функция Φ, заданная на множестве всех отрезков $[\alpha, \beta]$, называется аддитивной функцией промежутка, если для любых $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ таких, что $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ выполняется равенство $\Phi_{[\alpha,\gamma]} = \Phi_{[\alpha,\beta]} + \Phi_{[\beta,\gamma]}$.

Отмечается, что интеграл от интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции является аддитивной функцией промежутка. Далее устанавливается, что любая аддитивная функция промежутка Φ, заданная на множестве отрезков $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, порождает функцию F, заданную на $[a, b]$ следующим образом: $F(x) = \Phi_{[a,x]}$. Верно и наоборот, любая функция F, заданная на отрезке $[a, b]$, порождает аддитивную функцию промежутка Φ согласно следующему определению: если $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то $\Phi_{[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)}$.

Далее доказывается теорема.

Теорема. Пусть f - интегрируемая функция на $[a, b]$. Φ - аддитивная функция промежутка на $[a, b]$. Тогда, если для любых $\alpha, \beta \in [a, b]$,: $\alpha \leq \beta$, выполнено $\inf\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) \cdot (\beta - \alpha) \leq \Phi_{[\alpha,\beta]} \leq \sup\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) \cdot (\beta - \alpha)$, то $\Phi_{[a,b]} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Согласно данной теореме достаточно просто получаются формулы нахождения площади криволинейной трапеции, объема тела вращения, длины кривой, заданной параметрически. В работе рассмотрены также некоторые задачи из физики: масса неоднородного стержня, работа нелинейной силы, центр масс.

В заключение отметим, что материал данного учебного пособия прошел успешную апробацию в физико-математическом лицее-интернате. После небольшой доработки в плане подбора примеров, а также задач, соответствующих программе по математике с углубленным изучением математики, учебное пособие можно опубликовать.

Литература

1. **Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.** Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1993. 288 с.

2. **Пизо Ш., Заманский М.** Курс математики. Алгебра и анализ. М.: Наука, 1971. 656 с.

3. **Ионин Ю.И.** Интеграл. Квант. 1972. №6. 20 с.

4. **Ионин Ю.И.** Интеграл в геометрии и физике. Квант. 1972. №10. 17 с.

5. **Виленкин А., Ионин Ю.** Площадь и интеграл. Квант. 1977. №5. 30 с.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.03.2008*