

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

*Е.В. Тулубенская, Р.В. Каргин*

В работе исследуется устойчивость продольно сжатого стержня переменной жесткости на границе винклеровских сред с помощью алгоритма локального перебора вариантов [1], суть которого заключается в выявлении качественно адекватной собственной формы на основе полного перебора вариантов на "редкой сетке" с дальнейшим последовательным удвоением числа её узлов путем деления пополам и перебором вариантов лишь вблизи корней собственной формы.

### 1. Введение

Предложенный алгоритм локального перебора вариантов позволяет решать некоторые задачи конструктивно нелинейной механики упругих систем с достаточно большой точностью. Погрешность данного алгоритма лежит в рамках погрешности применяемой конечно-разностной аппроксимации.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим шарнирно опертый сжимаемый продольной силой  $P$  стержень длины  $l$ , находящийся на границе раздела двух упругих сред с жесткостями  $k_1, k_2$ . Полную энергию системы можно представить формулой

$$\begin{aligned} 2\Pi(w) = & \int_0^l (EI)(x) (w'')^2 dx + \int_0^l c_1 (w_+)^2 dx + \\ & + \int_0^l c_2 (w_-)^2 dx - \int_0^l P (w')^2 dx, \quad w' = \frac{dw}{dx} \end{aligned} \quad (1)$$

Необходимое условие минимума функционала (1) выражается уравнением

$$((EI)(x)w'')'' + c_1w_+ + c_2w_- = -Pw''. \quad (2)$$

Заменим формулу (1) приближенной, основанной на дискретном представлении функции  $w(x)$ ,  $x \in [0, l]$  на  $m$ -мерной сетке:

$$w_i = w(x_i), \quad i \in 0 : m; \quad x_{i+1} = x_i + \tau, \quad \tau = l/m, \quad x_0 = 0, \quad x_m = l.$$

Интеграл вычисляем по квадратурной формуле трапеций, производные аппроксимируем конечноразностными отношениями

$$w'(x_i) = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\tau}, \quad w''(x_i) = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\tau^2}. \quad (3)$$

Значения срезов функции  $w(x)$  в узлах сетки представляем формулами

$$w_+(x_i) = b_i w_i, \quad w_-(x_i) = (1 - b_i) w_i, \quad (4)$$

где

$$b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ 0, & w_i \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия шарнирного опирания

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w''(0) = w''(l) = 0$$

с учетом аппроксимации (3) принимают вид

$$w_0 = 0, \quad w_{-1} = -w_1, \quad w_m = 0, \quad w_{m+1} = -w_{m-1}.$$

На основании сказанного формула (1) переходит в следующую:

$$2\Pi(\tilde{w}) = (A\tilde{w}, \tilde{w}) + (C\tilde{w}, \tilde{w}) - \lambda(Q\tilde{w}, \tilde{w}), \quad (6)$$

где  $\tilde{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{m-1}]^T$ ;  $\lambda = P$ ;  $A, Q$  — симметричные матрицы размерности  $(m-1) \times (m-1)$ ,  $C$  — диагональная матрица с неотрицательными элементами.

Необходимое условие минимума функционала (6) имеет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} = \lambda Q\tilde{w}. \quad (7)$$

Задача на устойчивость сводится к обобщенной задаче на собственные значения операторного уравнения (7), где  $\lambda$  имеет смысл критической нагрузки.

### 3. Алгоритм

Для построения части собственного спектра уравнения (7) предлагается следующий алгоритм локального перебора вариантов (ЛПВ):

1. На сетке с относительно небольшим числом узлов применяется к уравнению (7) алгоритм полного перебора вариантов (ППВ) возможных форм изгиба в соответствии с принятой сеткой, который (алгоритм) заключается в следующем:
  - перебираются все  $2^{m-1}$  возможных представлений вектора формы  $b = [b_1, b_2, \dots, b_{m-1}]^T$  с учетом соотношения (5);
  - для каждого варианта вектора формы решается задача на собственные значения детерминированного (все компоненты вектора формы известны) уравнения (7) [3];
  - запоминается собственная пара, для которой форма изгиба согласуется с выбранным вектором формы.
2. Определяется *качественно адекватная* собственная форма (качественная конфигурация которой остается неизменной)[1].
3. Далее последовательно удваивается число узлов сетки путем деления пополам и выполняется перебор вариантов лишь вблизи корней искомой собственной формы.
4. Процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой (и достижимой) точностью.

Наибольший интерес представляет минимальное собственное значение  $\lambda_1$ , которому соответствует первая критическая сила

$$P_1 = \lambda_1. \quad (8)$$

### 4. Результаты

**4.1.** Применим предложенный алгоритм к нахождению критической нагрузки для шарнирно опертого стержня с двумя участками различной жесткости. Пусть при  $x \in [0, \frac{l}{2})$  жесткость стержня равна  $EI$ , а при  $x \in [\frac{l}{2}, l]$  жесткость стержня равна  $4EI$ , где  $l$  — длина стержня и  $k_1 = \frac{c_1}{EI}$ ,  $k_2 = \frac{c_2}{EI}$ . Тогда матрицы операторного уравнения (7),

например, для  $m = 5$ , примут следующий вид:

$$A = \frac{1}{\tau^3} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -10 & 4 \\ 1 & -10 & 21 & -16 \\ 0 & 4 & -16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{4EI\tau} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \tau \begin{pmatrix} k_1 b_1 + k_2(1 - b_1) & & & \\ & k_1 b_2 + k_2(1 - b_2) & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & k_1 b_3 + k_2(1 - b_3) & \\ & & & k_1 b_4 + k_2(1 - b_4) \end{pmatrix}.$$

Приведем результаты расчетов первого собственного числа при  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $l = \pi$ ,  $EI = 1$  в таблице 1.

Таблица 1.

$m$	10	20	40	80
$\lambda_1$	1.504	1.486	1.481	1.479

При  $k_1 = k_2 = 0$  уравнение (2) является линейным и допускает аналитическое решение [2]

$$P_{кр} = \frac{14.6EI}{l^2} = 1.479289281. \quad (9)$$

Далее вычислим значение первого собственного числа уравнения (7) при различных значениях  $k_1$ ,  $k_2$  и при  $l = \pi$  см. Результаты вычислений приведены в таблице 2 и на рис.1–4.

Таблица 2.

$m$	$k_1 = 5, k_2 = 20$	$k_1 = 10, k_2 = 20$	$k_1 = 15, k_2 = 20$	$k_1 = k_2 = 20$
10	6.10373	12.0790	12.4464	12.6645
20	5.94681	11.1330	11.4583	11.6084
40	5.90245	10.8828	11.1977	11.3447
80	5.89193	10.8184	11.1308	11.2767

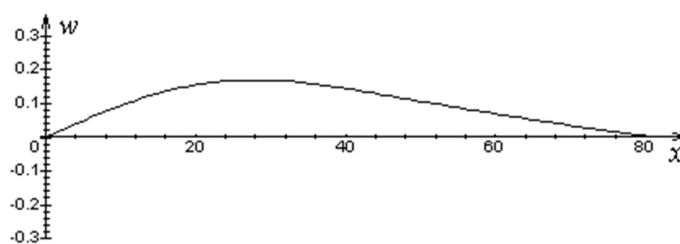


Рис. 1. Прогиб стержня при  $k_1 = 5, k_2 = 20$

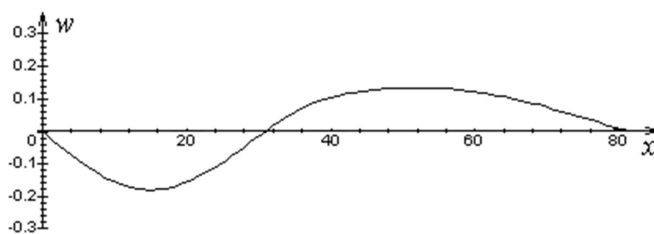


Рис. 2. Прогиб стержня при  $k_1 = 10, k_2 = 20$

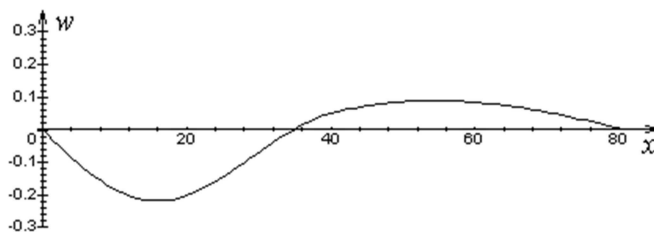
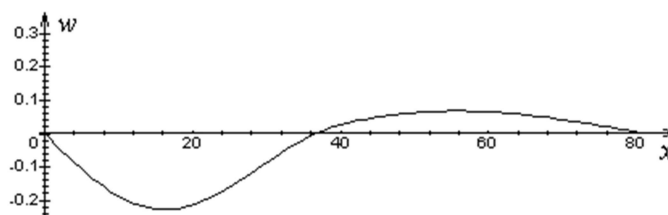


Рис. 3. Прогиб стержня при  $k_1 = 15, k_2 = 20$

Рис. 4. Прогиб стержня при  $k_1 = 20, k_2 = 20$ 

**4.2.** Применим предложенный алгоритм к нахождению критической нагрузки для шарнирно опертого стержня. Стержень симметричен относительно своего среднего сечения. Переменный момент инерции поперечного сечения меняется соответственно от  $x = 0$  к  $x = l$  по закону  $I(x) = \frac{(-0.3x+4)h^3}{12}$ , где  $h$  — толщина стержня.

Приведем результаты расчетов первого собственного числа при  $c_1 = c_2 = 0, l = 10$  см,  $h = 0.5$  см в таблице 3.

Таблица 3.

$m$	10	20	40	80
$\lambda_1$	107.704	105.796	105.345	105.131

Далее вычислим значение первого собственного числа уравнения (7) при различных значениях  $c_1, c_2$  и при  $l = 10$  см,  $h = 0.5$  см. Результаты вычислений приведем в таблице 4 и на рис.5–8.

Таблица 4.

$m$	$c_1 = 50, c_2 = 200$	$c_1 = 100, c_2 = 200$	$c_1 = 150, c_2 = 200$	$c_1 = c_2 = 200$
10	492.299	662.528	789.602	895.317
20	453.788	591.490	691.761	773.639
40	444.425	574.640	668.533	744.627
80	442.043	570.504	662.791	737.478

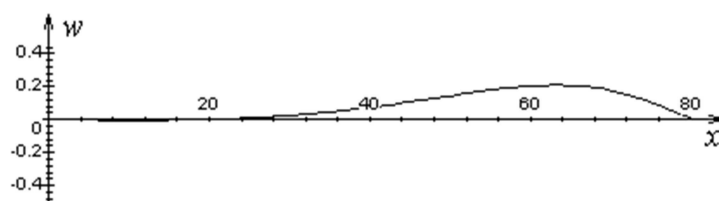


Рис. 5. Прогиб стержня при  $c_1 = 50, c_2 = 200$

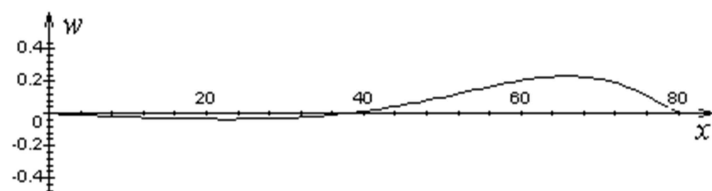


Рис. 6. Прогиб стержня при  $c_1 = 100, c_2 = 200$

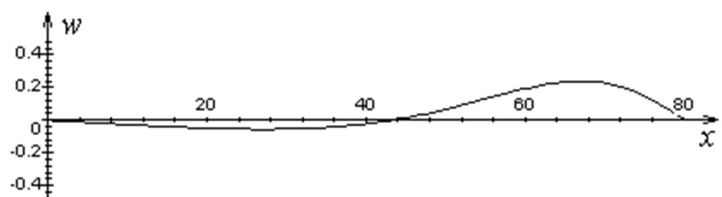
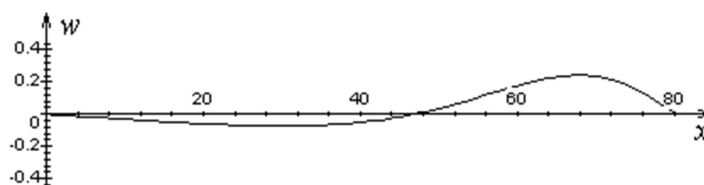


Рис. 7. Прогиб стержня при  $c_1 = 150, c_2 = 200$

Рис. 8. Прогиб стержня при  $c_1 = c_2 = 200$ 

## 5. Выводы

Полученные результаты хорошо согласуются с аналитическими решениями в случае  $c_1 = c_2 = 0$ , а в случае с основаниями различной жесткости при плавном переходе к однородной упругой среде критическая нагрузка также плавно изменяется (см. табл. 2,4), стремясь к соответствующему аналитическому решению, что является косвенным подтверждением сходимости предложенного алгоритма.

## Литература

1. Михайловский Е.И., Тулубенская Е.В. Алгоритм локального перебора вариантов в задаче об устойчивости круглой пластины на границе винклеровских сред // *Механика и процессы управления: Тр. XXXVII Уральского семинара, посвященного 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра "КБ им. академика В.П. Макеева"*. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 109–116.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.
3. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.

## Summary

**Tulubenskaya E.V., Kargin R.V.** The stability of the longitudinally compressed shank with unconstant rigidity at the border of two Winkler's ambiances

The stability of the longitudinally compressed shank with unconstant rigidity at the border of two Winkler's ambiances is investigated. The algorithm is based on the local search variants.