Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В.Н. Тарасов, В.Ю. Андрюкова

Рассматривается задача об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего нормального давления. Для вычисления работы внешних сил используется точная формула.

В работе применяется вариационный подход, для конечномерной аппроксимации перемещений используются кубические сплайны. Исследуется влияние нелинейных слагаемых на величину критической силы.

1. Постановка задачи

Предположим, что оболочка вращения, срединную поверхность которой обозначим через S, в результате деформации приобрела форму $\tilde{S}$. Обозначим через g_{ij}, h_{ij}, $\tilde{g_{ij}}$, $\tilde{h_{ij}}$, $i,j = 1,2$ коэффициенты первой и второй квадратичных форм недеформированной и деформированной поверхности соответственно.

Предполагается, что деформация является осесимметричной. Согласно [2] энергию деформации, связанную с переходом из состояния S в состояние $\tilde{S}$, можно вычислить по формуле:

$$U_s = \int\int \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) ds, \qquad (1)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) \qquad (2)$$

© Тарасов В.Н., Андрюкова В.Ю., 2008.

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ε_1 и ε_2 – экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{2}(\tilde{g_{ij}} - g_{ij})du_i du_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i du_j} \tag{3}$$

κ_1 и κ_2 – экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{2}(\tilde{h_{ij}} - h_{ij})du_i du_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i du_j} \tag{4}$$

Введем декартовы координаты (x, y, z), которые связаны со сферическими формулами

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\lambda, \\ y = \rho\cos\theta \sin\lambda, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \lambda \le 2\pi. \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

В результате осесимметричной деформации поверхность $\tilde{S}$ представляет собой поверхность вращения вокруг оси z некоторой кривой κ, задаваемой уравнениями $x = \varphi(\theta)$, $z = \psi(\theta)$, а уравнения поверхности вращения будут иметь вид

$$\begin{cases} x = \varphi(\theta)\cos\lambda, \\ y = \varphi(\theta)\sin\lambda, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \lambda \le 2\pi. \\ z = \psi(\theta). \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $w(\theta)$ и $v(\theta)$ нормальное и касательное перемещения точек сферы. Декартовы координаты точек сферы будут определяться уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(\theta) = (R + w)\sin\theta - v\cos\theta, \\ z = \psi(\theta) = (R + w)\cos\theta + v\sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае первая и вторая квадратичная формы поверхности будут иметь вид [1]

$$\begin{cases} I = \left(\varphi'^2 + \psi'^2\right) d\theta^2 + \varphi^2 d\lambda^2, \\ II = \left(\frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\right) d\theta^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} d\lambda^2. \end{cases} \tag{7}$$

Используя формулы (3), (4), (6), (7), можно получить нелинейные выражения для деформаций ε_1, ε_2 и кривизн κ_1, κ_2 [2]. Разложив в ряд Тейлора и удерживая квадратичные слагаемые, получаем

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\varepsilon_1 = \dfrac{1}{R}\left(w + v^{'}\right) + \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{1}{2}v^2 - w^{'}v + \dfrac{1}{2}w^{'2}\right), \\
\varepsilon_2 = \dfrac{1}{R}\left(w + vctg\theta\right), \\
\kappa_1 = \dfrac{1}{R^2}\left(-w - 2v^{'} + w^{''}\right) + \dfrac{1}{R^3}\left(\dfrac{1}{2}v^2 + 2w^{'}v + v^{''}v - \dfrac{3}{2}w^{'2} - v^{''}w^{'}\right), \\
\kappa_2 = \dfrac{1}{R^2}\left(w + w^{'}\operatorname{ctg}\theta - 2v\operatorname{ctg}\theta\right) - \dfrac{v^2 + w^{'}v}{\sin^2\theta R^3} - \dfrac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R^3}\left(\dfrac{3}{2}v^2 - 2w^{'}v\right) - \\
-\dfrac{w^{'2}}{2R^3} + \dfrac{ctg\theta}{R^3}\left(vv^{'} - vw^{'}\right).
\end{array}
\right.
\tag{8}
$$

Для внешнего нормального давления в соответствии с теоремой Эйлера – Бернулли работа внешних сил равна

$$A = P\Delta V,$$

где ΔV – изменение объема оболочки в результате деформации. Объем оболочки после деформации вычисляется по формуле [3]:

$$\tilde{V} = \frac{\pi}{3}\int_0^{\pi} \Phi_2\left(\theta, w, v, w^{'}, v^{\prime}\right) d\theta, \tag{9}$$

где

$$\Phi_2\left(\theta, w, v, w^{'}, v^{\prime}\right) = w^3 sin\theta + w^2\left(3R - v^{'}\right) sin\theta +$$

$$+w\left(vw^{'} - 2Rv^{'} + v^2 + 3R^2\right) sin\theta + +R\left(v^2 + vw^{'}\right) sin\theta +$$

$$+R^3 sin\theta + \left(wvv^{'} - w^2v - 2Rwv - v^2w^{'} - v^3 + Rvv^{'}\right) cos\theta.$$

В устойчивом положении равновесия полная энергия принимает минимальное значение. Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$J = \int_0^{\pi} \tilde{F}\left(\theta, w, v, w^{'}, v^{'}, w^{''}\right) d\theta \to \min_{w,v}, \tag{10}$$

где $\tilde{F} = \Phi_1 - P\Phi_2$.

2. Численный метод

Введем обозначения $p = w^{'}, r = w^{''}, q = v^{'}, s = v^{''}$ и вектор переменных $\xi = (w, p, r, v, q, s)$.

Внешнее давление, направленное к центру оболочки, будем считать положительным. Под действием внешнего давления оболочка имеет тривиальное положение равновесия, определяемое из уравнения

$$\frac{\partial \tilde{F}\left(\theta, w, 0, 0, 0, 0\right)}{\partial w} = 0, \tag{11}$$

которое обозначим через w_0.

Решение уравнения (11) не зависит от θ. В дальнейшем будем использовать линейные формулы для изменения кривизн κ_1 и κ_2:

$$\begin{cases} \kappa_1 = \dfrac{1}{R^2}\left(w'' - w - 2v'\right), \\ \kappa_2 = \dfrac{1}{R^2}\left(w + \left(w' - 2v'\right) ctg\theta\right). \end{cases} \tag{12}$$

Если для деформаций ε_1, ε_2 ограничиться только линейными слагаемыми, т.е.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{R}\left(w + v'\right), \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{R}\left(w + vctg\theta\right). \end{cases} \tag{13}$$

то w^* вычисляется по формуле

$$w^* = -\frac{6\left(1-\nu\right)PR^4}{12PR^3\nu Eh^3 + 12EhR^2 - 12PR^3} \tag{14}$$

Если же ε_1 вычисляется в соответствии с формулами (8), то

$$w^* = -\frac{12\left(1-\nu^2\right)PR^4}{Eh^3 + 24Eh^2R^2\nu + 24PR^3\left(1-\nu^2\right)} \tag{15}$$

При «разумных» значениях P значения w^*, вычисленные по формулам (14) (15), практически совпадают.

Далее сделаем замену переменных $w = \tilde{w} + w^*$ и в дальнейшем будем опять вместо $\tilde{w}$ писать w.

Обычно считается, что потеря устойчивости оболочки сопровождается появлением вмятины [4] – выпучивания области конечных размеров, поэтому будем считать, что $w = 0$, $v = 0$ при $\theta \geq \beta$, где угол β характеризует размеры вмятины.

Таким образом, функции w и v должны удовлетворять граничным условиям

$$w'(0) = 0, \quad w'''(0) = 0, \quad v(0) = 0 \tag{16}$$

$$w(\beta) = 0, \quad w^{'}(\beta) = 0, \quad v(\beta) = 0 \tag{17}$$

В [3] рассматривается метод определения критической нагрузки, основанный на интегрировании дифференциальных уравнений Эйлера. Там рассматривались только линейные выражения для деформаций и изменений кривизн. В окрестности w^* для квадратичной аппроксимации функционала (10) выполняется условие (11). Поэтому

$$\tilde{F} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2}\xi, \xi\right) = F^*.$$

После этого для функционала

$$J_1 = \int_0^\beta F^* d\theta$$

выписывались уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{d\theta^2}F^*_{w''} - \dfrac{d}{d\theta}F^*_{w'} + F^*_w = 0, \\ -\dfrac{d}{d\theta}F^*_{v'} + F^*_v = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Затем путем численного интегрирования определялись значения параметра P, при котором краевая задача (16) – (18) имеет неединственное решение. Методы численного интегрирования не позволяют найти решение при больших углах β ввиду того, что система дифференциальных уравнений (18) имеет малый параметр при старшей производной. При решении задачи данным методом получаем сильно завышенные значения критических нагрузок, по сравнению с классической формулой

$$P = 1.21E\left(\frac{h}{R}\right)^2. \tag{19}$$

Формула (19) получена на основании теории пологих оболочек, и, разумеется, было бы интересно проверить ее «справедливость», используя более точную теорию. А поскольку система дифференциальных уравнений содержит порядка 50 слагаемых, то вопрос о точности упрощенных теорий представляет определенный интерес.

Перемещения w, v будем аппроксимировать сплайнами

$$w = \sum_{j=0}^{n+2} w_j B_j(\theta), \quad v = \sum_{j=0}^{n+2} v_j B_j(\theta), \tag{20}$$

где

$$\theta \in [0, \beta]\,,\ \ h = \frac{\beta}{n},\ \ \theta_i = ih,\ \ B_i(\theta) = B(\theta - (i-3)h),\ \ i = 3..n-1.$$

$$B(\theta) = \frac{1}{4h^4}\left(\frac{1}{6}\theta_+^3 - \frac{2}{3}\left(\theta - h\right)_+^3 + \left(\theta - 2h\right)_+^3 - \frac{2}{3}\left(\theta - 3h\right)_+^3 + \frac{1}{6}\left(\theta - 4h\right)_+^3\right),$$

$$B_0 = 1 + \frac{1}{h^3}\left(-\frac{1}{6}\theta_+^3 + \frac{1}{2}\left(\theta_+ - h\right)_+^3 - \frac{1}{2}\left(\theta - 2h\right)_+^3 + \frac{1}{6}\left(\theta - 3h\right)_+^3\right),$$

$$B_1 = \theta + \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{3}\theta_+^3 + \frac{5}{6}\left(\theta - h\right)_+^3 - \frac{2}{3}\left(\theta - 2h\right)_+^3 + \frac{1}{6}\left(\theta - 3h\right)_+^3\right),$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{h}\left(-\frac{11}{36}\theta_+^3 + \frac{1}{2}\left(\theta - h\right)_+^3 - \frac{1}{4}\left(\theta - 2h\right)_+^3 + \frac{1}{18}\left(\theta - 3h\right)_+^3\right).$$

$$B_n(\theta) = B_2\left(\beta - \theta\right),\ B_{n+1}(\theta) = B_1\left(\beta - \theta\right),\ B_{n+2}(\theta) = B_0\left(\beta - \theta\right),$$

$$\theta_+ = \max\{0, \theta\} = \frac{1}{2}(|\theta| + \theta).$$

Граничные условия (16) – (17) будут выполнены, если положить

$$v_0 = v_{n+2} = 0,\ \ w_1 = 0,\ \ w_{n-1} = 0,\ \ w_{n+2} = 0,$$

а из условия $w^{'''} = 0$ следует равенство

$$w_0 = -\frac{11}{6}h^2 w_2 + \frac{1}{4h}w_3. \tag{21}$$

Введем вектор $z \in R^{2n}$, где

$$z_1 = w_2,\ \ z_2 = w_3,\ \ ...,\ \ z_{n-1} = w_n,$$

$$z_n = v_1,\ \ z_{n+1} = v_2,\ \ ...,\ \ z_{2n} = v_{n+1}. \tag{22}$$

Подставляя (20) (с учетом обозначений (22)) в (10), получаем функцию $f(z; P)$. Необходимое условие экстремума записывается в виде

$$\frac{\partial f\left(z, P\right)}{\partial z} = 0, \tag{23}$$

Пусть P^* - минимальное значение давления, при котором

$$\det\left[\frac{\partial^2 f\left(\theta; P^*\right)}{\partial z^2}\right] = 0. \tag{24}$$

Тогда при $P > P^*$ существует решение уравнений (23) $z(P) \neq 0$ (при $P = P^*$ происходит бифуркация решения уравнения (23)).

3. Результаты численных экспериментов

В таблице 1 P_1 – значение давления P, вычисленное по формуле (19) (теория пологих оболочек), P_2– использовался метод, описанный в предыдущем параграфе, причем для вычисления деформации (ε_1) применялись формулы (8) (нелинейные выражения для изменения деформаций), (для (ε_2) нелинейные слагаемые имеют третий порядок малости), P_3 – применялась линейная теория тонких оболочек.

Из приведенных результатов видно, что применение линейной теории тонких оболочек в задачах устойчивости не всегда является обоснованным. Для точного решения задач устойчивости необходимо использовать, по крайней мере, квадратичные слагаемые в выражениях для деформаций. Необходимость использования нелинейной теории в задачах устойчивости оболочек отмечается также в [5]. Результаты, получаемые с помощью теории пологих оболочек, практически совпадают с результатами, найденными в данной работе, значениями с учетом нелинейных слагаемых в выражениях для деформаций.

Для определения перемещений (закритической деформации) решалась задача минимизации функции $f(z; P)$ методом Монте-Карло. При силах близких к критическим, перемещения растут так быстро, что приближенные формулы для кривизн и деформаций (8) становятся несправедливыми, т.е. после потери устойчивости оболочка фактически теряет свою несущую способность.

Таблица 1.

h/R	0.01	0.025	0.03	0.04	0.05	0.1
P_1	$1.21 \cdot 10^{-2}$	$7.56 \cdot 10^{-2}$	0.11	0.19	0.30	1.21
P_2	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$7.6 \cdot 10^{-2}$	0.11	0.20	0.32	1.30
P_3	1.01	2.36	3.05	4.25	5.3	10.33

В заключение хотелось бы отметить, что интересной является задача расчета оболочек на устойчивость на основании точной теории в других случаях (неосесимметричная деформация сферической оболочки, расчет на устойчивость торообразной оболочки), для того, чтобы убедиться, что столь точное совпадение результатов, полученных на основании теории пологих оболочек, (формула (19) и результаты, приведенные в третьей строке таблицы) не является случайным.

Литература

1. **Погорелов А.В.** Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

2. **Погорелов А.В.** Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, 1966. 296 с.

3. **Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н.** Некоторые задачи устойчивости упругих систем // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 2003. Вып. 5. С. 21-34.*

4. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

5. **Паймушин В.Н.** Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней// *ПММ Т. 71. 2007. Вып.5. С. 880 - 893.*

Summary

Tarasov V.N., Andryukova V.Yu. On stability and supercritical behavior of a spherical shell.

The problem of stability of the spherical shell experiencing external normal pressure is considered. A precise formula is used for the calculation of the work of external forces. In the work a variational approach is applied. Cubic splines are used for the finite-dimensional approximation of displacements. The influence of nonlinear terms on the amount of the critical force is investigated.

Отдел математики КНЦ УРОРАН
Сыктывкарский лесной институт
Поступила 28.03.2008