Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008

УДК 517.987

ЗАМЕЧАНИЕ О ВНЕШНИХ МЕРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ МЕРОЙ

А.Г. Порошкин, Л.А. Попова

Доказывается, что внешние меры, порожденные абстрактной мерой в смысле Халмоша, Вулиха, Порошкина непрерывны снизу и что внешняя мера Лебега в $\boldsymbol{R}$ не является непрерывной ни сверху, ни непрерывной сбоку на $\varnothing$ (исчерпывающей).

При изучении функций множеств или функций на решетках с нулем важную роль играют различные свойства непрерывности, и в учебном процессе полезно иметь некоторый запас примеров функций, обладающих или не обладающих свойством непрерывности в том или ином смысле. В заметке показывается, что внешние меры, порожденные мерой в смысле работ [1,2,3], являются непрерывными снизу. В то же время внешняя мера Лебега в $\boldsymbol{R}$ не является ни (условно) непрерывной сверху, ни непрерывной сбоку в нуле (на $\varnothing$).

I. Напомним сначала определения непрерывности функций, принятые в теории функций множества. Пусть $\mathcal{R}$ – сигма-кольцо подмножеств множества T (или счетно-полная решетка с нулем), $f : \mathcal{R} \to \overline{R^+}$.

Функция f называется:

а) *непрерывной снизу,* если из $E_n \in \mathcal{R}$ и $E_n \uparrow E(= \bigcup\limits_n E_n)$ следует $\lim fE_n = fE$;

б) *условно непрерывной сверху,* если из $E_n \in \mathcal{R}, fE_1 < +\infty$ и $E_n \downarrow E(= \bigcap\limits_n E_n)$ следует $\lim fE_n = fE$;

в) *непрерывной сбоку (на $\varnothing$)* или *исчерпывающей* (*exhaustive*), если $\lim fE_n = 0$ для любой дизъюнктной последовательности (E_n), обладающей свойством: имеется $E \in \mathcal{R}$ с $fE < +\infty$ такое, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$.

Как известно, конечная мера на σ-кольце обладает всеми указанными свойствами. С внешними мерами дело обстоит иначе.

II. Пусть m - мера на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^T$. В [1] внешняя мера m^*, порожденная m, определена по формуле

$$m^*E = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} mE_i : E_i \in \mathcal{P}, E \subset \bigcup E_i\}.$$

Здесь множество E обязательно принадлежит наследственному σ-кольцу $\boldsymbol{H}$ множеств, счетно покрываемых множествами из $\mathcal{P}$. Порожденная (по Каратеодори) внешней мерой m^* мера μ определена также на некотором σ-кольце $\mathcal{R} \subset \boldsymbol{H}$.

Внешнюю меру Халмоша далее называем *h-внешней мерой.*

Поскольку во многих случаях важно иметь порожденную меру на σ-алгебре, для этого случая полезно и внешнюю меру m^* задавать на классе 2^T всех подмножеств множества T. Б.З. Вулихом [2] эта задача решена следующим образом. Для $E \subset T$ полагается

$$m^*E = \begin{cases} \inf\{\sum mE_i : E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{P}\}, \text{ если } E \in \boldsymbol{H} \\ +\infty (= \inf \varnothing), \text{ если } E \notin \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Внешнюю меру Вулиха будем называть *v-внешней мерой.*

Наконец, в [3] внешняя мера определяется на $\boldsymbol{H}$ так же как у Халмоша, а для $E \notin \boldsymbol{H}$ полагается $m^*E = \sup m^*A$, где $E \supset A \in \boldsymbol{H}$. Эту внешнюю меру назовем *p-внешней мерой.*

В двух последних случаях m^* определена на 2^T и порождает меру (по Каратеодори) на некоторых σ-алгебрах. Вообще говоря, эти меры оказываются различными.

III. Исследуем на непрерывность снизу h-внешнюю меру.

Если $m^*E < +\infty$, то для каждого натурального числа n найдется счетное покрытие $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i^n \supset E, A_i^n \in \mathcal{P}$, такое, что $m^*E \le \mu B_n \le \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu A_i^n < m^*E + \frac{1}{n}$. Следовательно измеримое множество $C = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} B_n$ удовлетворяет условиям $E \subset C$ и $m^*E = mC$, причем каждое измеримое подмножество $D \subset C \setminus E$ оказывается множеством нулевой меры: $\mu D = 0$.

Множество C со свойствами $E \subset C, m^*E = \mu C$ и для любого измеримого подмножества $D \subset C \setminus E$ имеем $\mu D = 0$, называется *измеримой оболочкой множества E*. Понятно, что измеримая оболочка множества E определяется однозначно (с точностью до множества меры нуль).

Теорема 1. *$h-$внешняя мера непрерывна снизу.*

Доказательство. Пусть $E_n \in \boldsymbol{H}, m^*E_n < +\infty\ \forall n$ и $E_n \uparrow E$. Поскольку $\boldsymbol{H}$ есть $\sigma-$кольцо, то $E \in \boldsymbol{H}$. Из монотонности внешней меры следует $\lim m^*E_n \leq mE$. Далее для каждого E_n найдем измеримую оболочку $C_n \supset E_n$ и положим $\breve{C}_n = \bigcap\limits_{i=n}^{+\infty} C_i$. $\breve{C}_n$ также есть измеримая оболочка множества E_n, причем $\breve{C}_n \uparrow C = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \breve{C}_n$ и в силу непрерывности меры снизу имеем $\mu C = \lim \mu\breve{C}_n = \lim m^*E_n$. Поскольку $E \subset C$ и $m^*E \leq \mu C$, то вместе с предыдущим равенством это дает $m^*E \leq \lim m^*E_n$. Таким образом, в этом случае имеем $m^*E = \lim m^*E_n$.

Если же некоторое $m^*E_n = +\infty$, то тогда и $m^*E = +\infty = \lim m^*E_n$.•

Замечание. Множество C есть измеримая оболочка множества E. Действительно, если $D \subset C \setminus E$, то $D_n = D \bigcap C_n \subset C_n \setminus E$, так что $\mu D_n = 0$. Так как $D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} D_n$, то $\mu D \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu D_n = 0$. Таким образом, каждое множество E, имеющее $\sigma-$конечную внешнюю меру (то есть такое, что имеется последовательность множеств E_n, $m^*E_n < +\infty$, для которой $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} E_n = E$), обладает измеримой оболочкой.

Вообще говоря, неизвестно, обладает ли множество не $\sigma-$конечной внешней меры измеримой оболочкой, даже в случае, когда внешняя мера порождена конечной мерой, заданной на полукольце. Обратимся к следующему примеру.

Пример. Пусть $T = [0,1) \times [0,1), \mathcal{P}$ -полукольцо ячеек вида $\triangle = [a,b) \times \{c\}$, где $c \in [0,1)$ и $m\triangle = b - a$. Тогда m - конечная мера на $\mathcal{P}$. Рассмотрим треугольное множество $E = \{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq x\}$. Оно не является множеством, счетно-покрываемым ячейками из $\mathcal{P}$, т.е. $E \notin \mathbf{H}$ и $h-$внешняя мера не определена на E, тогда как $v-$внешняя мера и $p-$внешняя мера определены на E и обе равны $+\infty$. Но E не является множеством $\sigma-$конечной внешней меры и неизвестно, обладает ли E измеримой оболочкой. (Авторам неизвестно, является ли множество E измеримым относительно двух последних внешних мер.)

Следствие. *Внешняя мера Лебега в $\boldsymbol{R}^m$, а также внешняя мера Лебега - Стилтьеса в $\boldsymbol{R}$ (порожденная непрерывной слева возрастающей функцией g), непрерывны снизу.*

В самом деле, эти внешние меры являются $h-$внешними мерами, порожденными конечными мерами на полукольцах ячеек в $\boldsymbol{R}^m$ в первом случае случае и ячеек в $\boldsymbol{R}$ во втором.

IV. Непрерывность снизу $v-$внешней меры. Поскольку на наследственном σ-кольце $\boldsymbol{H}$ $v-$внешняя мера совпадает с $h-$внешней мерой, то на $\boldsymbol{H}$ $v-$внешняя мера непрерывна снизу. Если $E \notin \boldsymbol{H}$ и $E_n \uparrow E$, то все E_n не могут принадлежать $\boldsymbol{H}$ (иначе $E \in \boldsymbol{H}$), а поэтому найдется $E_{n_0} \notin \boldsymbol{H}$, так что $m^*E_{n_0} = +\infty$. Непрерывность снизу имеется.

V. Непрерывность снизу $p-$внешней меры. В случае, когда $E_n \uparrow E$ и все $E_n \in \boldsymbol{H}$, рассуждения как в пункте IV. Если же $E \notin \boldsymbol{H}$, то выберем произвольно число $\alpha \in [0, m^*E)$ и по определению m^*E (как супремума) найдем $A \in \boldsymbol{H}, A \subset E$, чтобы $\alpha < m^*A$. Тогда $E_n \bigcap A \uparrow A$ и в силу непрерывности m^* на $\boldsymbol{H}$ имеем $\lim m^*(E_n \bigcap A) = m^*A > \alpha$. Тем более $\lim m^*E_n \geq m^*A > \alpha$, откуда, в силу произвольности $\alpha < m^*E$, получаем $\lim m^*E_n = m^*E$.

VI. Вопрос о непрерывности сбоку и сверху разберем для внешней меры Лебега в $\boldsymbol{R}$ (аналогично можно изучить внешнюю меру Лебега в $\boldsymbol{R}^m$). Здесь придется использовать пример неизмеримого множества, построенного в [3-4]. Напомним, как строится это множество.

В множестве [0,1] вводим отношение эквивалентности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда разность $x - y$ рациональна. В фактор множестве $[0,1]/_\sim$ в каждом классе выберем (пользуясь аксиомой выбора) по одному элементу, получим **неизмеримое** множество A. Следовательно, $m^*A > 0$. Если занумеровать элементы множества $[0,1] \bigcap \boldsymbol{Q} = \{r_0 = 0, r_1, r_2, ...\}$ и положить $A_n = r_n + A$, то получим дизъюнктную последовательность (A_n) множеств, охватываемую сегментом [0,2] $(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \subset [0,2])$, для которой $m^*A_n =$ (в силу инвариантности внешней меры Лебега относительно сдвигов, см. [3], с.49)$= m^*A_0 > 0$ и m^* не является непрерывной сбоку. В свою очередь последовательность $B_n = \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$, $n = 0, 1, ...$, удовлетворяет условиям $B_n \downarrow \varnothing$, $m^*B_1 \leq 2$ и $m^*B_n \geq m^*A_n = m^*A_0$ и $m^*B_n \not\to 0$, так что m^* не является условно непрерывной и сверху на $\varnothing$.

Аналогичным методом можно построить неизмеримое по Лебегу множество в $\boldsymbol{R}^m$ и установить, что внешняя мера Лебега не будет непрерывной ни сбоку, ни сверху.

Справедливо следующее более общее утверждение.

Теорема 2. Для любого ограниченного множества $F \subset \boldsymbol{R}$ найдется последовательность ограниченных множеств F_n такая, что $F_n \downarrow F$, однако $\lim m^*F_n > m^*F$.

Доказательство. Пусть $F \subset (a,b)$ - ограниченное множество, A и $A_n, n = 1, 2, ...,$ - построенные выше множества.

Если $(a,b) \bigcap [0,2] = \varnothing$, то положим $F_n = F \bigcup A_n$. Ясно, что (F_n) - ограниченная последовательность и $F_n \downarrow F$. Поскольку (a,b) - измеримое множество, $F \subset (a,b)$ и $A_n\, d\,(a,b)$,то по условию измеримости $m^*F_n = m^*F + m^*A_n$, откуда $\lim m^*F_n = \lim m^*F + \lim m^*A_n > m^*F$, ибо $\lim m^*A_n > 0$.

Если же $(a,b)\bigcap[0,2] \neq \varnothing$, то множество F может пересекаться с множествами F_n. Чтобы избежать этого, сдвинем отрезок $[0,2]$ и с ним множества A_n, чтобы сдвинутые множества не пересекались с (a,b). Положим, например, $B_n = c + A_n$, где c выбрано так, что $(a,b)\bigcap[c,c+2] = \varnothing$. Тогда $m^*B_n = m^*A_n$. Полагая теперь $F_n = F + B_n$, получим, как выше, $m^*F_n = m^*F + m^*B_n = m^*F + m^*A_n$ и $\lim m^*F_n = \lim m^*F + \lim m^*A_n > m^*F$, несмотря на то, что $F_n \downarrow F$.

VII. Заметим, что различные виды непрерывности оказываются взаимосвязанными, и не только в случае числовых функций. Мы отметим некоторые из них применительно к числовым функциям.

Пусть $\mathcal{R} \subset T$ - кольцо подмножеств T, $\varphi : \mathcal{R} \to \boldsymbol{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$. Введем следующие два условия для φ:

(o_E) если $E_n \downarrow E$, то $\varphi E_n \to \varphi E$ (непрерывность сверху на множестве $E \subset \mathcal{R}$)

(d_E) если последовательность (E_n) удовлетворяет условию $E_n \bigcap E_m = E$ при $n \neq m$, то $\varphi E_n \to \varphi E$.

Справедливы следующие предложения:

1. Если φ непрерывна снизу и на множестве $E \in \mathcal{R}$ удовлетворяет условию (d_E), то она удовлетворяет и условию (o_E) ([5], теорема 1).

2. Если $\mathcal{R}$ - σ-кольцо и φ непрерывна сверху, то она непрерывна сбоку на $\varnothing$ ([6], теорема1).

(Для монотонной на $\mathcal{R}$ функции утверждение 2 очевидно).

VIII. В дипломной работе [7] построен по аналогии с [3] пример неизмеримого множества по Лебегу в $\boldsymbol{R}^2$. С его помощью легко установить отсутствие непрерывности внешней меры в $\boldsymbol{R}$ и сверху, и сбоку.

Литература

1. **Халмош П.** Теория меры. М.: ИЛ, 1953. 291 с.

2. **Вулих Б.З.** Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 350 с.

3. **Порошкин А.Г.** Теория меры и интеграла. М.: КомКнига, 2006. 184 с.

4. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

5. **Порошкин А.Г., Порошкин А.А.** О функциях на решетках. II// *В сб.: Упорядоченные множества и операторные уравнения. Сыктывкар: Сыктывкарский университет, 1982. С. 127-135.*

6. **Порошкин А.Г., Самородницкий А.А.** Непрерывные по монотонным последовательностям функции на решетках// *В сб.: Операторные уравнения и функции множеств. Сыктывкар: Сыктывкарский университет, 1985. С. 107-117.*

7. **Тиунцева Н.Ю.** Примеры неизмеримых множеств. Дипломная работа. *Сыктывкарский университет, 1992. 25 с.*

Summary

Poroshkin A.G., Popova L.A. Remark about the outer measures generated by measures

It is proved that outer measures generated by measures in sense of Halmos, Vulikh, Poroshkin are lower continuous, however the outer measure of Lebesque in $\boldsymbol{R}$ is not continuous from above and not exhaustive.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.02.2008*