*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.8. 2008*

УДК 519.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕРИЙ В ТРОИЧНОЙ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ [1]

С.В. Балакин [2]

Рассматривается троичная марковская последовательность и функционалы на ней, связанные с числом событий и числом серий из этих событий. Находятся производящие функции для совместных распределений данных характеристик. Вычисляются средние, дисперсии и ковариации.

Введение

Троичные марковские цепи являются важным частным случаем в теории марковских последовательностей и выделяются в большинстве работ, посвященных конечным марковским цепям [1]-[4]. Особый интерес представляют совместные распределения различных характеристик серий в марковской последовательности и первые моменты этих распределений.

В статье описываются такие характеристики марковской цепи, как число событий определенного вида и число серий из этих событий. Для них найдены производящие функции, а также точные формулы для первых моментов.

1. Обозначения

1.1. Рассмотрим троичную однородную марковскую последовательность ξ случайных переменных $\xi(n)$, $n \geqslant 0$ с множеством значений $C = \{1, 0, -1\}$, начальным вектором P и переходной матрицей Q:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00422).

[2]Институт математики им. Л.С. Соболева СО РАН, balakin@ngs.ru

$$P = (a_1, a_0, a_{-1}) = (a, 1-a-b, b),$$
$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{10} & q_{1,-1} \\ q_{01} & q_{00} & q_{0,-1} \\ q_{-11} & q_{-10} & q_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p-s & s \\ q & 1-q-t & t \\ u & 1-u-r & r \end{pmatrix},$$
$$a_i = Pr\{\xi(0) = i\}, \quad i \in C, \quad q_{\alpha\beta} = Pr\{\xi(n+1) = \beta \mid \xi(n) = \alpha\}, \quad n \geq 0.$$

По умолчанию будем предполагать, что $0 < a_i, q_{\alpha\beta} < 1$.

1.2. Введем дополнительные обозначения:

$$k = p + r - q - t = \mathrm{tr}Q - 1 \quad d = p(r-t) + q(s-r) + u(t-s) = \det Q.$$

Так как $0 < q_{\alpha\beta} < 1$, то $-1 < d < 1$.

Используя эргодическую теорему и решая систему линейных уравнений с тремя неизвестными, получаем выражения для предельных (финальных) вероятностей $b_i = \lim\limits_{n\to\infty} Pr\{\xi(n) = i\}$ $(i \in C)$ (см. [4]):

$$b_1 = \frac{q(1-r) + tu}{1-k+d}, \qquad b_0 = \frac{(1-p)(1-r-u) + u(1-p-s)}{1-k+d},$$
$$b_{-1} = \frac{t(1-p) + qs}{1-k+d}.$$

Собственные числа матрицы Q имеют вид:

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(k \pm \sqrt{k^2 - 4d}\right).$$

Очевидно, что

$$\lambda_- + \lambda_+ = k, \qquad \lambda_- \cdot \lambda_+ = d, \qquad (1-\lambda_-)(1-\lambda_+) = 1 - k + d. \tag{1}$$

Таким образом, условия $0 < q_{\alpha\beta} < 1$ $(\alpha, \beta \in C)$ являются достаточными для эргодичности цепи, поэтому всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, подразумевается выполнение этих условий. Кроме того, потребуем выполнения условия $k^2 - 4d \neq 0$ (то есть $\lambda_+ \neq \lambda_-$). Случай $k^2 - 4d = 0$, а также равенство нулю элементов $q_{\alpha\beta}$ будут подробно рассмотрены позже.

Для упрощения дальнейших выкладок введем еще обозначения

$$\gamma_i = Pr\{\xi(1) = i\} = a_1 q_{1i} + a_0 q_{0i} + a_{-1} q_{-1i} \qquad (i \in C),$$
$$\Lambda(n) = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

и отметим равенства

$$d \cdot \Lambda(n) = k \cdot \Lambda(n+1) - \Lambda(n+2), \qquad n \geqslant 0; \tag{2}$$

$$\frac{1}{1 - kz + dz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(n+1) z^n, \qquad 0 < |z| < 1. \tag{3}$$

Замечание. В отличие от $\lambda_\pm$ значение $\Lambda(n)$ при любых $q_{\alpha\beta} \in [0,1]$ будет являться действительным числом. Более того, если $q_{\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$, то и $\Lambda(n) \in \mathbb{Q}$.

1.3. Будем рассматривать случайные величины $x_i(n)$ и $y_i(n)$, равные соответственно числу i-событий и числу i-серий последовательности ξ на отрезке $[0,n]$. Они задаются следующим образом:

$$x_i(n) = \mathrm{ind}\{\xi(0) = i\} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}\{\xi(j) = i\},$$

$$y_i(n) = \mathrm{ind}\{\xi(0) = i\} + \sum_{j=1}^{n} ind\{\xi(j-1) \neq i\}\mathrm{ind}\{\xi(j) = i\}.$$

Последовательности $x_i(n), n \geqslant 0$ и $y_i(n), n \geqslant 0$ в общем случае немарковские.

Замечание. Нас главным образом будут интересовать 1-события и 1-серии, результаты для аналогичных 0- и (-1)-характеристик получаются по симметрии. Например, чтобы из 1-серии получить (-1)-серии, необходимо произвести "замену": $p \leftrightarrow r$, $u \leftrightarrow s$, $q \leftrightarrow t$, $b_1 \leftrightarrow b_{-1}$, $a_1 \leftrightarrow a_{-1}$.

2. Распределение $\xi(n)$

2.1. Используя жорданово разложение матрицы Q и находя ее n-ю степень, получаем распределение вектора

$$P_n = P \cdot Q^n = (Pr\{\xi(n) = 1\}, Pr\{\xi(n) = 0\}, Pr\{\xi(n) = -1\}).$$

Оно имеет вид:

$$Pr\{\xi(n) = i\} = b_i + (\gamma_i - a_i k - b_i(1-k))\,\Lambda(n) + (a_i - b_i)\Lambda(n+1) \quad (i \in C). \tag{4}$$

Математическое ожидание $\mathbb{E}\xi(n)$, очевидно, равно

$$\mathbb{E}\xi(n) = Pr\{\xi(n) = 1\} - Pr\{\xi(n) = -1\}.$$

Также заметим, что

$$\mathbb{E}\xi^2(n) = Pr\{\xi(n) = 1\} + Pr\{\xi(n) = -1\}.$$

2.2. Нетрудно вычислить ковариацию и коэффициент корреляции для случайных переменных $\xi(i)$, $\xi(j)$, $(i \leqslant j)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\xi(i)\xi(j)\right) = \Pr\{\xi(i) = \xi(j) = 1\} + \Pr\{\xi(i) = \xi(j) = -1\} - \\
&\qquad - \Pr\{\xi(i) = 1, \xi(j) = -1\} - \Pr\{\xi(i) = -1, \xi(j) = 1\} = \\
&= (b_1 - b_{-1})(1 - (1-k)\Lambda(j-i) - \Lambda(j-i+1))\mathbb{E}\xi(i) + ((p-s)Pr\{\xi(i) = 1\} + \\
&\qquad + (r-u)Pr\{\xi(i) = -1\})\Lambda(j-i) + (1-k)\Lambda(j-i+1)\mathbb{E}\xi^2(i), \\
&\mathbb{V}\left(\xi(j)\right) = \mathbb{E}\xi^2(j) - (\mathbb{E}\xi(j))^2.
\end{aligned}$$

Отсюда получаются выражения для ковариации $\operatorname{Cov}\left(\xi(j), \xi(k)\right)$ и коэффициента корреляции $K\left(\xi(j), \xi(k)\right)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(\xi(j), \xi(k)\right) &= \mathbb{E}\left(\xi(i)\xi(j)\right) - \mathbb{E}\left(\xi(i)\right)\mathbb{E}\left(\xi(j)\right), \\
K\left(\xi(j), \xi(k)\right) &= \frac{\operatorname{Cov}\left(\xi(j), \xi(k)\right)}{\sqrt{\mathbb{V}\left(\xi(i)\right)\mathbb{V}\left(\xi(j)\right)}}.
\end{aligned}$$

Замечание. Заменяя $a_i = \Pr\{\xi(0) = i\}$ на $\Pr\{\xi(m) = i\}$, можно получить из выписанных формул для средних и дисперсий характеристик серий в последовательности $\xi(0), \ldots, \xi(n)$ аналогичные формулы для последовательности $\xi(m), \ldots, \xi(m+n)$. Так как $\Pr\{\xi(m) = i\} \to b_i$ при $m \to \infty$, когда $1 - k + d \neq 0$, то в этом случае, заменяя a_i на b_i, можно получить приближенные формулы при больших значениях m.

3. Производящие функции

3.1. Пусть

$$P_\alpha(i, j, n) = Pr\{x_1(n) = i, y_1(n) = j, \xi(n) = \alpha\}.$$

Тогда, используя формулу полной вероятности и марковское свойство, получаем систему уравнений для вероятностей $P_\alpha(i,j,n)$:

$$\begin{cases} P_1(i,j,n) = P_1(i-1,j,n-1)\cdot p + P_0(i-1,j-1,n-1)\cdot q + \\ \qquad\qquad + P_{-1}(i-1,j-1,n-1)\cdot u, \\ P_0(i,j,n) = P_1(i,j,n-1)\cdot(1-p-s) + P_0(i,j,n-1)\cdot(1-q-t) + \\ \qquad\qquad + P_{-1}(i-1,j,n-1)\cdot(1-r-u), \\ P_{-1}(i,j,n) = P_1(i,j,n-1)\cdot s + P_0(i,j,n-1)\cdot t + P_{-1}(i,j,n-1)\cdot r, \end{cases} \tag{5}$$

где $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $1 \leqslant j \leqslant [n/2]+1$. Кроме того (граничные условия):

$$P_1(i,j,0) = \begin{cases} a_1, & i=j=1, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$P_\alpha(i,j,0) = \begin{cases} a_\alpha, & i=j=0, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \qquad (\alpha \in \{0,-1\});$$

$$P_1(i,0,n) = P_1(0,j,n) = 0.$$

3.2. Рассмотрим производящие функции h_α для вероятностей $P_\alpha(i,j,n)$:

$$h_\alpha(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P_\alpha(i,j,n)x^i y^j z^n, \qquad |x|,|y| \leqslant 1, |z| < 1.$$

Используя систему (5) и граничные условия, получаем:

$$\begin{cases} (1-pxz)h_1 - qxyzh_0 - uxyzh_{-1} = a_1 xy, \\ -z(1-p-s)h_1 + (1-(1-q-t)z)h_0 - (1-r-u)zh_{-1} = a_0, \\ -szh_1 - tzh_0 + (1-rz)h_{-1} = a_{-1}. \end{cases} \tag{6}$$

Решая эту систему, находим:

$$h_1(x,y,z) = \frac{(a_1 + G_1 z + F_1 z^2)\,xy}{1 + H_1(x)z + H_2(x,y)z^2 + H_3(x,y)z^3},$$

$$h_i(x,y,z) = \frac{a_i + (G_i + H_{i,1})\,z - a_i q_{11} xz}{1 + H_1(x)z + H_2(x,y)z^2 + H_3(x,y)z^3} +$$

$$+ \frac{a_1 q_{1i} xyz + q_{11} H_{i,-(1+i)} x(1-y)z^2 + F_i xyz^2}{1 + H_1(x)z + H_2(x,y)z^2 + H_3(x,y)z^3}, \ i = 0,-1, \tag{7}$$

где
$G_i = \gamma_i - a_i(1+k), \quad F_i = a_i k - \gamma_i + b_i(1-k+d),$
$H_{i,j} = a_i q_{jj} - a_j q_{ji} \quad (i,j \in C);$
$H_1(x) = -(q_{00} + q_{-1,-1} + q_{11}x),$
$H_2(x,y) = q_{00}q_{-1,-1} - q_{0,-1}q_{-1,0} + q_{11}(q_{00} + q_{-1,-1})x - (q_{10}q_{01} - q_{1,-1}q_{-1,1})xy,$
$H_3(x,y) = -\left(q_{11}(q_{00}q_{-1,-1} - q_{0,-1}q_{-1,0})(1-y) + dy\right)x.$

3.3. Из формул (7) получается формула для производящей функции h вероятностей $P(i,j,n) = Pr\{x_1(n) = i, y_1(n) = j\}$. Так как

$$P(i,j,n) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(i,j,n),$$

то суммирование (7) даёт:

$$h(x,y,z) = \frac{1 + (p-a-k)z - (1-a)pxz}{1 + H_1(x)z + H_2(x,y)z^2 + H_3(x,y)z^3} +$$
$$+ \frac{a(1-p)xyz + p(H_{0,-1} + H_{-1,0})x(1-y)z^2 + dxyz^2}{1 + H_1(x)z + H_2(x,y)z^2 + H_3(x,y)z^3}. \tag{8}$$

3.4. Используя равенство (8), легко найти производящие функции для маргинальных распределений числа 1-событий и 1-серий соответственно:

$$f(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} Pr\{x_1(n) = i\}x^i z^n, \quad g(y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Pr\{y_1(n) = j\}y^j z^n.$$

Имеем:

$$f(x,z) = h(x,1,z) = \frac{1 + (p-a-k)z + (a(1-p) - (1-a)p)xz + dxz^2}{1 + H_1(x)z + H_2(x,1)z^2 - dxz^3},$$
$$(9)$$
$$g(y,z) = h(1,y,z) = \frac{1 - kz - a(1-p)(1-y)z}{1 - (k+1)z + H_2(1,y)z^2 + H_3(1,y)z^3} +$$
$$+ \frac{p(H_{0,-1} + H_{-1,0})(1-y)z^2 + dyz^2}{1 - (k+1)z + H_2(1,y)z^2 + H_3(1,y)z^3}. \tag{10}$$

4. Среднее число a-событий

Дифференцируя $f(x,z)$ в равенстве (9) по x и разлагая в ряд по степеням z, получаем (используются равенства (1)–(3)):

$$f'_x(1,z) = \frac{a_1 + (\gamma_1 - a_1(1+k))z + (-\gamma_1 + (a_1 - b_1)k + b_1(1+d))z^2}{(1-kz+dz^2)(1-z)^2} =$$
$$= \big(a_1 + (\gamma_1 - a_1(1+k))z + (-\gamma_1 + (a_1-b_1)k + b_1(1+d))z^2\big) \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda(j+1)z^j = \big(a_1 + (\gamma_1 - a_1(1+k))z +$$
$$+ (-\gamma_1 + (a_1-b_1)k + b_1(1+d))z^2\big) \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(n-i+1)\Lambda(i+1)z^n =$$
$$= \frac{a_1 + (\gamma_1 - a_1(1+k))z + (-\gamma_1 + (a_1-b_1)k + b_1(1+d))z^2}{(1-k+d)^2} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty}(2d - k + (1-k+d)(n+1) + d(d-1)\Lambda(n+1) +$$
$$+ (k-2d)\Lambda(n+2))z^n = a_1 + (a_1+\gamma_1)z + \frac{1}{(1-k+d)^2}\times$$
$$\times \sum_{n=2}^{\infty}\Big(b_1(1-k+d)^2(n+1) + (1-k+d)\Big(\gamma_1 + (a_1-b_1)(1-k) -$$
$$- b_1 - ((\gamma_1 - a_1k - b_1(1-k))(1-k) - (a_1-b_1)d)\Lambda(n+1) -$$
$$- (\gamma_1 + (a_1-b_1)(1-k) - b_1)\Lambda(n+2)\Big)\Big)z^n,$$

откуда получаем среднее значение $\mathbb{E}(x_1(n))$ случайной величины $x_1(n)$:

$$\mathbb{E}x_1(n) = b_1(n+1) + \frac{1}{1-k+d}\Big(\gamma_1 + (a_1-b_1)(1-k) - b_1 -$$
$$-\big((\gamma_1 - a_1k - b_1(1-k))(1-k) - (a_1-b_1)d\big)\Lambda(n+1) -$$
$$-\big(\gamma_1 + (a_1-b_1)(1-k) - b_1\big)\Lambda(n+2)\Big). \tag{11}$$

Используя замечание пункта 1.3, имеем окончательно:

$$\mathbb{E}x_i(n) = b_i(n+1) + \frac{1}{1-k+d}\Big(\gamma_i + (a_i-b_i)(1-k) - b_i -$$
$$-\big((\gamma_i - a_ik - b_i(1-k))(1-k) - (a_i-b_i)d\big)\Lambda(n+1) -$$

$$-\big(\gamma_i + (a_i - b_i)(1-k) - b_i\big)\Lambda(n+2)\Big). \qquad (12)$$

В стационарном случае ($a_i = \gamma_i = b_i$):

$$\mathbb{E}x_i(n) = a_i(n+1).$$

5. Среднее число a-серий

Дифференцируя $g(y,z)$ в равенстве (10) по y и разлагая в ряд по степеням z, получаем (используются равенства (1)):

$$g'_y(1,z) = \frac{1}{(1-kz+dz^2)(1-z)^2} \cdot \big(a_1 + (\gamma_1 - a_1(1+p+k))z +$$
$$+(b_1(1-k+d)+a(k+p(1+k))-(1+p)\gamma_1)z^2 - p(-\gamma_1+(a_1-b_1)k+b_1(1+d))z^3\big) =$$
$$= \frac{1}{(1-k+d)^2}\big(a_1+(\gamma_1-a_1(1+p+k))z+(b_1(1-k+d)+a_1(k+p(1+k))-$$
$$-(1+p)\gamma_1)z^2+p(\gamma_1-(a_1-b_1)k-b_1(1+d))z^3\big)\sum_{n=0}^{\infty}\big(2d-k+(1-k+d)(n+1)+$$
$$+d(d-1)\Lambda(n+1)+(k-2d)\Lambda(n+2)\big)z^n = a_1 + (\gamma_1 + a_1(1-p))z+$$
$$+\left((a_1+\gamma_1)(1-p) - (a_1-b_1)d + (\gamma_1 - b_1)k + b_1\right)z^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\Bigg(b_1(1-p)n+$$
$$+\frac{(1-p)\left(\gamma_1 - a_1 + (a_1-b_1)(2-k)\right)}{1-k+d} - \frac{1}{(1-k+d)^2}\Big(pd(1-d)(\gamma_1-$$
$$-(a_1-b_1)k-b_1(1+d))\Lambda(n-2)+\big(d(1-d)(b_1(1-k+d)+a_1(k+p(1+k))-$$
$$-(1+p)\gamma_1) - p(k-2d)(\gamma_1 - (a_1-b_1)k - b_1(1+d))\big)\Lambda(n-1)+$$
$$+\big(d(d-1)(\gamma_1 - a_1(1+p+k)) + (k-2d)(b_1(1-k+d)+$$
$$+a_1(k+p(1+k)) - (1+p)\gamma_1)\big)\Lambda(n) + \big(a_1 d(d-1)+$$
$$+(k-2d)(\gamma_1 - a_1(1+p+k))\big)\Lambda(n+1) + a_1(k-2d)\Lambda(n+2)\Big)\Bigg),$$

откуда, при помощи (2), получаем среднее значение $\mathbb{E}(y_1(n))$ случайной величины $y_1(n)$:

$$\mathbb{E}y_1(n) = (1-p)b_1 n + b_1 + \frac{1}{1-k+d}\Bigg((1-p)\big(\gamma_1 - a_1 + (a_1-b_1)(2-k)\big)+$$
$$+\big((a_1-\gamma_1)(p(k-1)-d) + (a_1-b_1)(p(k-1)^2 - pd - d(k-2))\big)\Lambda(n)+$$
$$+\big((a_1-\gamma_1)(1-p) + (a_1-b_1)(p(2-k)+d-1)\big)\Lambda(n+1)\Bigg). \qquad (13)$$

Используя замечание пункта 1.3, имеем окончательно:

$$\mathbb{E}y_i(n) = (1-q_{ii})b_i n + b_i + \frac{1}{1-k+d}\Big((1-q_{ii})\big(\gamma_i - a_i + (a_i-b_i)(2-k)\big)+$$
$$+\big((a_i-\gamma_i)(q_{ii}(k-1)-d) + (a_i-b_i)(q_{ii}(k-1)^2 - q_{ii}d - d(k-2))\big)\Lambda(n)+$$
$$+\big((a_i-\gamma_i)(1-q_{ii}) + (a_i-b_i)(q_{ii}(2-k)+d-1)\big)\Lambda(n+1)\Big). \qquad (14)$$

В стационарном случае ($a_i = \gamma_i = b_i$):

$$\mathbb{E}y_i(n) = a_i((1-q_{ii})n+1).$$

6. Вторые моменты числа a-событий и a-серий

6.1. Последовательно дифференцируя равенства (9), (10) и (8), разлагая вторые производные при $x=1$ и $y=1$ в ряд по z и используя известные формулы

$$\mathbb{V}(x_1(n)) = f''_{xx}(1)[n] + f'_x(1)[n] - \left(f'_x(1)[n]\right)^2,$$
$$\mathbb{V}(y_1(n)) = g''_{yy}(1)[n] + g'_y(1)[n] - \left(g'_y(1)[n]\right)^2,$$
$$\mathrm{Cov}(x_1(n), y_1(n)) = h''_{xy}(1,1) - f'_x(1)[n]f'_y(1)[n]$$

(здесь $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^n$, то есть $f[n]$ - коэффициент при n-ой степени z разложения в степенной ряд по z), после некоторых преобразований получаем выражения для дисперсий, а также ковариации числа единиц $x_1(n)$ и числа серий $y_1(n)$ соответственно:

$$\mathbb{V}(x_1(n)) = \frac{n+1}{1-k+d}\left(X_0 + \frac{2}{k^2-4d}\left(X_1\Lambda(n+1) + X_2\Lambda(n+2)\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{(1-k+d)^2}\Big(X_3 + \frac{1}{k^2-4d}X_4\Lambda(n+1) + X_5\Lambda(n+2)+$$
$$+ X_6\Lambda^2(n+1) + X_7\Lambda(n+1)\Lambda(n+2) + X_8\Lambda^2(n+2)\Big),$$

$$\mathbb{V}(y_1(n)) = \frac{n}{1-k+d}\left(Y_0 + \frac{2}{k^2-4d}\left(Y_1\Lambda(n-1) + Y_2\Lambda(n)\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{(1-k+d)^2}\Big(Y_3 + Y_4\Lambda(n-1) + \frac{1}{k^2-4d}Y_5\Lambda(n)+$$
$$+ Y_6\Lambda^2(n-1) + Y_7\Lambda(n-1)\Lambda(n) + Y_8\Lambda^2(n)\Big) \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\mathrm{Cov}(x_1(n), y_1(n)) = \frac{n}{1-k+d}\left(C_0 + C_1\Lambda(n) + C_2\Lambda(n+1)\right) + \\ + \frac{1}{(1-k+d)^2}\big(C_3 + C_4\Lambda(n) + C_5\Lambda(n+1) + C_6\Lambda^2(n) \\ + C_7\Lambda(n)\Lambda(n+1) + C_8\Lambda^2(n+1)\big).$$

Здесь $X_i, Y_i, C_i (i \in \{0, 1, \dots, 8\})$ — коэффициенты, не зависящие от n. Они имеют достаточно громоздкий вид и здесь не приведены.

6.2. Коэффициент корреляции равен

$$\rho(x_1(n)y_1(n)) = \frac{\mathrm{Cov}(x_1(n), y_1(n))}{\sqrt{\mathbb{V}(x_1(n))}\sqrt{\mathbb{V}(y_1(n))}} = K_0 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$K_0 = \Big(1 - k - d + 2p(k-p) - b_1(3 - k - d - 2p(2-k))\Big)\Big((1- \\ -p)\big(1 - k - d + 2p - b_1(3-k-d)\big)\big(1 - k - d + 2(k-p)p- \\ -b_1(3 - k - d - (5 - 3k + d)p)\big)\Big)^{-\frac{1}{2}}.$$

7. Частные случаи

7.1. $k^2 - 4d = 0$**.** В этом случае равенства (4), (12), (14) упрощаются. Так как в данном случае

$$\lambda_+ = \lambda_- = \frac{k}{2},$$

то

$$\Lambda(n) = n \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^{n-1}$$

и равенства (4), (12), (14) принимают вид ($i \in C$):

$$Pr\{\xi(n) = i\} = b_i + (a_i - b_i)\left(\frac{k}{2}\right)^n + n\left(\gamma_i - b_i - (a_i - b_i)\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}\right)^{n-1},$$

$$\mathbb{E}x_i(n) = b_i(n+1) + \frac{4}{(2-k)^2}\big(\gamma_i - b_i + (a_i - b_i)(1-k)\big)\left(1 - \left(\frac{k}{2}\right)^{n+1}\right) - \\ - \frac{n+1}{2-k}\big(2(\gamma_i - b_i) - (a_i - b_i)k\big)\left(\frac{k}{2}\right)^n,$$

$$\mathbb{E}y_i(n) = (1-q_{ii})b_i n + b_i + (a_i - b_i)\left(\frac{k}{2}\right)^n + \frac{4}{(2-k)^2}(1-q_{ii})\big(\gamma_i - a_i +$$
$$+ (a_i - b_i)(2-k)\big)\left(1 - \left(\frac{k}{2}\right)^n\right) -$$
$$- \frac{n}{2(2-k)}(k - 2q_{ii})\big(2(\gamma_i - b_i) - (a_i - b_i)k\big)\left(\frac{k}{2}\right)^n.$$

7.2. $1 - k + d = 0$**.** Так как

$$1 - k + d = q(1-r) + tu + (1-p-s)(1-r) + s(1-r-u) + t(1-p) + qs,$$

и все слагаемые правой части неотрицательны, то в этом случае возможны две группы вариантов:

1) а) $r = 1$, $u = 0$, $t = 0$, $s = 0$; б) $q = 0$, $p = 1$, $s = 0$, $u = 0$; в) $q = 0$, $t = 0$, $1 - r - u = 0$, $1 - p - s = 0$.

2) а) $r = 1$, $u = 0$, $t = 0$, $q = 0$; б) $r = 1$, $u = 0$, $s = 0$, $p = 1$; в) $q = 0$, $t = 0$, $s = 0$, $p = 1$.

Первая группа, очевидно, описывает двоичную цепь Маркова. Действительно, например, в 1а) получаем с вероятностью b вырожденную последовательность, состоящую из (-1)-событий, а с вероятностью $1-b$ получаем двоичную цепь Маркова с множеством состояний $C = \{1, 0\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Двоичные цепи были подробно исследованы в [5]. Вторая группа описывает троичную цепь Маркова, в которой рано или поздно наступает одно из двух поглощающих состояний. Например, для случая 2а) имеем:

$$Pr\{\xi(k) = 1\} = ap^{k-1},$$
$$Pr\{\xi(k) = 0\} = 1 - a - b + a(1-p-s)\frac{1-p^k}{1-p},$$
$$Pr\{\xi(k) = -1\} = b + as\frac{1-p^k}{1-p}.$$

Литература

1. **Карлин С.** Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.

2. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.

3. **Романовский В.И.** Дискретные цепи Маркова. Москва, Гостехиздат, 1949.

4. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.

5. **Савельев Л.Я., Балакин С.В.** Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичной марковской последовательности// *Дискретная математика. 2004. Т. 16. № 3. С. 43–62.*

Summary

Balakin S.V. Runs characteristics in a ternary Markov chain

A ternary Markov chain is considered. There are functionals concerned with a number of events and a number of runs. Probability generating functions for joint distributions of this functionals are obtained. Precise formulas for expectations, variances and covariations are founded.

Институт математики
им. Л.С. Соболева СО РАН
balakin@ngs.ru

Поступила 23.01.2008