Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА КАРМАНА

Михайловский Е.И., Миронов В.В., Кузнецова Ю.Л.

При известной функции Грина предложен алгоритм приведения краевых задач с нелинейностью типа Ка́рмана к соответствующей системе алгебраических уравнений. Алгоритм реализован на примере шарнирно опертой открытой цилиндрической оболочки.

1. Итерационный метод вычисления вторых производных от функций прогиба и напряжений

1.1. Трансформирование краевой задачи в систему интегральных уравнений

Рассмотрим прямоугольную в плане цилиндрическую пластину (рис.1). Уравнения равновесия такой пластины по теории К.Маргера имеют вид [1]

$$D\tilde{\Delta}^2 w + R\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} = R^4 q_n + \tilde{\Lambda}(\Psi, w),$$

$$EhR\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \tilde{\Delta}^2\Psi = \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(w, w). \tag{1.1}$$

Здесь w, Ψ – искомые прогиб и функция напряжений, q_n – нормальная удельная нагрузка в пересчете на срединную поверхность; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; h, R – толщина пластины и радиус срединной поверхности, E, ν – модуль Юнга, коэффициент Пуассона материала пластины;

$$\tilde{\Lambda}(\Psi, w) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\varphi} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2},$$

$$\tilde{\Delta}^2(\,) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2(\,).$$

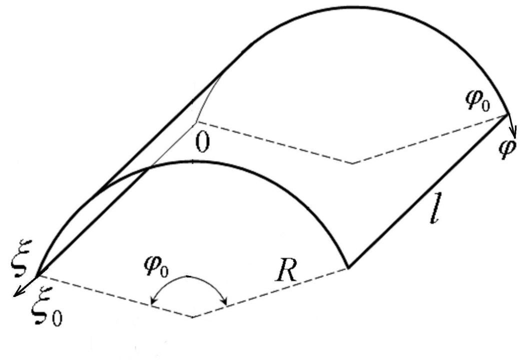


Рис.1. К расчету цилиндрической панели.

Имея в виду использование в дальнейшем квадратурной формулы Гаусса–Лежандра, произведем в уравнениях (1.1) замену переменных по формулам

$$x = \frac{2\xi}{\xi_\circ} - 1, y = \frac{2\varphi}{\varphi_\circ} - 1, \tag{1.2}$$

в соответствии с которыми $-1 \le x, y \le +1$.

Внешнюю нагрузку задаем формулой

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{Q_0}{4\varepsilon^2}, \ (x,y) \in \Omega_\varepsilon \\ 0, \ (x,y) \notin \Omega_\varepsilon \end{cases}, \tag{1.3}$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \{(x,y) : |x| \le \varepsilon, |y| \le \varepsilon\}.$$

В координатах x, y система уравнений (1.1) принимает вид

$$\Delta^2 w = \frac{R^4}{16D} q_n - \frac{R}{4D\xi_\circ^2}\Psi_{xx} + \frac{1}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\Lambda(\Psi, w),$$

$$\Delta^2\Psi = \frac{EhR}{4\xi_\circ^2} w_{xx} - \frac{Eh}{2\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\Lambda(w,w). \tag{1.4}$$

где

$$\Lambda(\Psi, w) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\Delta^2(\,) = \left(\frac{\partial^2}{\xi_\circ^2\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\varphi_\circ^2\partial y^2}\right)^2(\,), \quad \Psi_{xx} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \tag{1.4$'$}$$

При формулировании граничных условий будем предполагать, что пластина является шарнирно опертой и нерастяжимой по всему граничному контуру. Считаем также, что края пластины свободны от тангенциальной нагрузки. С использованием полудеформационного варианта граничных величин [1]

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} B_n^* & F_t^* & Q_{\nu n} & M_{\nu\nu} \\ \hline æ_{tn}^* & -\varepsilon_{tt}^* & w & \vartheta_\nu \end{array}\right| \tag{1.5}$$

рассматриваемые краевые условия можно записать в виде следующих равенств:

$$w = 0, \quad M_{\nu\nu} = 0, \quad B_n^* = R\Psi = 0, \quad \varepsilon_{tt}^* = 0. \tag{1.6}$$

При этом условия $(1.6)_2$ можно раскрыть так:

$$M_{11} = -4D\left(\frac{\partial^2 w}{\xi_\circ^2 \partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\varphi_\circ^2 \partial y^2}\right) \text{при } x = \pm 1,$$

$$M_{22} = -4D\left(\frac{\partial^2 w}{\varphi_\circ^2 \partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\xi_\circ^2 \partial x^2}\right) \text{при } y = \pm 1. \tag{1.7}$$

Учитывая, что в силу условия $(1.6)_1$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } x = \pm 1, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } y = \pm 1,$$

из (1.7) получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = \pm 1, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = \pm 1. \tag{1.8}$$

И наконец, условие $(1.6)_4$ в координатах x, y имеет вид [1]

$$\underline{x = \pm 1}: \ \varepsilon_{tt}^* = e_{22} = \frac{1}{EhR^2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\xi_\circ^2 \partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \Psi}{\varphi_\circ^2 \partial y^2}\right) -$$

$$-\frac{w}{R} - \frac{1}{2R^2\varphi_\circ^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0;$$

$$\underline{y = \pm 1}: \ \varepsilon_{tt}^* = e_{11} = \frac{1}{EhR^2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\varphi_\circ^2 \partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 \Psi}{\xi_\circ^2 \partial x^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2R^2\xi_\circ^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Отсюда, с учетом условия $(1.6)_1$, (1.8), $(1.6)_3$, (1.9), будем иметь

$$\underline{x=\pm 1}: \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \quad \Psi=0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}=0,$$

$$\underline{y=\pm 1}: \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \quad \Psi=0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0. \tag{1.10}$$

Учитывая, что левые части уравнений (1.4) записаны с использованием одного и того же оператора $(1.4')_2$ и принимая во внимание одинаковый вид граничных условий для w, Ψ, для обращения операторов левых частей этих уравненний можно использовать единую функцию Грина

$$\Delta^2 G(x,y;\alpha,\beta)=\delta(x-\alpha)\delta(y-\beta); \qquad (1.11)_1$$

$$G=0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=\pm 1,$$

$$G=0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=\pm 1. \qquad (1.11)_2$$

Граничные условия задачи (1.11) будут выполнены, если функцию Грина искать в виде ряда

$$G(x,y;\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1,3,..}\sum G_{ij}\cos\frac{i\pi x}{2}\cos\frac{j\pi y}{2}. \tag{1.12}$$

Соответственно правую часть уравнения $(1.11)_1$ представим в виде формального (расходящегося) ряда

$$\delta(x-\alpha)\delta(y-\beta)=\sum_{i,j=1,3,..}\sum \delta_{ij}\cos\frac{i\pi x}{2}\cos\frac{j\pi y}{2}. \tag{1.13}$$

Умножив обе части равенства (1.13) на $\cos\dfrac{m\pi x}{2}\cos\dfrac{n\pi y}{2}$ и выполнив интегрирование по области Ω_1, получим

$$\delta_{mn}=\cos\frac{m\pi\alpha}{2}\cos\frac{n\pi\beta}{2}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (1.13), а затем, полученный ряд и ряд (1.12) – в уравнение $(1.11)_1$, после несложных преобразований придем к формуле

$$G(x,y;\alpha,\beta)=\frac{16}{\pi^4}\sum_{i,j=1,3,..}\sum \frac{\cos\frac{i\pi\alpha}{2}\cos\frac{j\pi\beta}{2}\cos\frac{i\pi x}{2}\cos\frac{j\pi y}{2}}{\left(\frac{i^2}{\xi_\circ^2}+\frac{j^2}{\varphi_\circ^2}\right)^2}. \tag{1.14}$$

Используя функцию Грина (1.14) краевые задачи (1.4), (1.10) можно привести к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$w(x,y) = \frac{R^4}{16D}\int_{\Omega_1} G(x,y;\alpha,\beta)q_n(\alpha,\beta)d\alpha d\beta -$$

$$-\frac{R}{4D\xi_\circ^2}\int_{\Omega_1} G(x,y;\alpha,\beta)\Psi_{xx}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta +$$

$$+\frac{1}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\int_{\Omega_1} G(x,y;\alpha,\beta)[\Psi_{xx}w_{yy} - 2\Psi_{xy}w_{xy} + \Psi_{yy}w_{xx}](\alpha,\beta)d\alpha d\beta,$$

$$\Psi(x,y) = \frac{EhR}{4\xi_\circ^2}\int_{\Omega_1} G(x,y;\alpha,\beta)w_{xx}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta -$$

$$-\frac{Eh}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2}\int_{\Omega_1} G(x,y;\alpha,\beta)[w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2](\alpha,\beta)d\alpha d\beta. \qquad (1.15)$$

Систему (1.15) можно решать итерационными методами с использованием конечно-разностной аппроксимации производных и формул численного интегрирования. Учитывая, что вблизи криволинейных кромок реализуется краевой эффект, и что при малых значениях ε в центральной части пластины напряженное состояние имеет большой показатель изменяемости [2], решение задач с применением формул численного дифференцирования требует использования густой равномерной сетки, что неизбежно связано с увеличением погрешности. Однако, в силу того, что в правых частях уравнений (1.15) фигурируют лишь вторые производные от искомых функций, эти интегро-дифференциальные уравнения можно трансформировать в интегральные. Действительно, дифференцируя дважды каждое из уравнений соответственно по „xx“, „xy“, „yy“, получим

$$w_{xx} = \frac{R^4}{16D}\int_{\Omega} G_{xx}q d\alpha d\beta - \frac{R}{4D\xi_\circ^2}\int_{\Omega} G_{xx}\Psi_{xx}d\alpha d\beta +$$

$$+\frac{1}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\int_{\Omega} G_{xx}[\Psi_{xx}w_{yy} - 2\Psi_{xy}w_{xy} + \Psi_{yy}w_{xx}]d\alpha d\beta,$$

$$w_{xy} = \frac{R^4}{16D}\int_{\Omega} G_{xy}q d\alpha d\beta - \frac{R}{4D\xi_\circ^2}\int_{\Omega} G_{xy}\Psi_{xx}d\alpha d\beta +$$

$$+\frac{1}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\int_{\Omega} G_{xy}[\Psi_{xx}w_{yy} - 2\Psi_{xy}w_{xy} + \Psi_{yy}w_{xx}]d\alpha d\beta,$$

$$w_{yy} = \frac{R^4}{16D}\int_{\Omega} G_{yy}q d\alpha d\beta - \frac{R}{4D\xi_\circ^2}\int_{\Omega} G_{yy}\Psi_{xx}d\alpha d\beta +$$

$$+\frac{1}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\int_\Omega G_{yy}[\Psi_{xx}w_{yy}-2\Psi_{xy}w_{xy}+\Psi_{yy}w_{xx}]d\alpha d\beta,$$

$$\Psi_{xx}=\frac{EhR}{4\xi_\circ^2}\int_\Omega G_{xx}q d\alpha d\beta-\frac{Eh}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2}\int_\Omega G_{xx}[w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2]d\alpha d\beta,$$

$$\Psi_{xy}=\frac{EhR}{4\xi_\circ^2}\int_\Omega G_{xy}q d\alpha d\beta-\frac{Eh}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2}\int_\Omega G_{xy}[w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2]d\alpha d\beta,$$

$$\Psi_{yy}=\frac{EhR}{4\xi_\circ^2}\int_\Omega G_{yy}q d\alpha d\beta-\frac{Eh}{2\xi_\circ^2\varphi_\circ^2}\int_\Omega G_{yy}[w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2]d\alpha d\beta. \qquad (1.16)$$

1.2. Переход к системе алгебраических уравнений

Для вычисления интегралов в правой части, за исключением интегралов вида

$$\int_\Omega G_{uv}q d\alpha\, d\beta \triangleq w_{uv}^q(x,y),$$

(под uv следует понимать „xx“, „xy“ или „yy“, впредь для сокращения записи будем использовать цифровые обозначения: $u=x\Rightarrow u=1$, $u=y\Rightarrow u=2$, $v=x\Rightarrow v=1$, $v=y\Rightarrow v=2$) полученной системы (1.16), воспользуемся квадратурной формулой Гаусса-Лежандра [3]

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)dxdy=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}A_{\nu n}B_{\mu m}f(x_{\nu n},y_{\mu m}), \qquad (2.1)$$

где $-1\le x_{1n}\le x_{2n}\le\ldots\le x_{nn}\le 1$, $-1\le y_{1m}\le y_{2m}\le\ldots\le y_{mm}\le 1$ – корни полиномов Лежандра $L_n(x)$, $L_m(y)$ (узлы квадратурной формулы Гаусса-Лежандра)

$$A_{\nu n}=\frac{2(1-x_{\nu n}^2)}{n^2(L_{n-1}(x_{\nu n}))^2},\quad B_{\mu m}=\frac{2(1-y_{\mu m}^2)}{m^2(L_{m-1}(x_{\mu m}))^2}$$

– коэффициенты квадратурной формулы Гаусса-Лежандра.

Придавая переменным x и y значения в узлах квадратуры $x_i=$ $=x_{in}$ $(i\in 1:n)$, $y_i=y_{jm}$ $(j\in 1:m)$ получим систему из $6mn$ уравнений, относительно $6mn$ неизвестных $w_{uv}(x_i,y_j)$, $\Psi_{uv}(x_i,y_j)$, $(i\in 1:n$, $j\in 1:m$, $u=x,y$, $v=x,y)$

$$w_{uv}(x_i,y_j)=w_{uv}^q(x_i,y_j)-$$

$$-\frac{R^4}{16D\xi_\circ^2}\sum\sum_{i,j=1,3,..} A_{\nu n}B_{\mu m}G_{uv}(x_i,y_j,\alpha_\nu,\beta_\mu)\Psi_{xx}(\alpha_\nu,\beta_\mu)+$$

$$+\frac{1}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2 D}\sum\sum_{i,j=1,3,..} A_{\nu n}B_{\mu m}G_{uv}(x_i,y_j,\alpha_\nu,\beta_\mu)[\Psi_{xx}w_{yy}-2\Psi_{xy}w_{xy}+\Psi_{yy}w_{xx}](\alpha_\nu,\beta_\mu),$$

$$\Psi_{uv}(x_i,y_j)=\frac{EhR}{4\xi_\circ^2}\sum\sum_{i,j=1,3,..} A_{\nu n}B_{\mu m}G_{uv}(x_i,y_j,\alpha_\nu,\beta_\mu)w_{xx}(\alpha_\nu,\beta_\mu)-$$

$$-\frac{Eh}{\xi_\circ^2\varphi_\circ^2}\sum\sum_{i,j=1,3,..} A_{\nu n}B_{\mu m}G_{uv}(x_i,y_j,\alpha_\nu,\beta_\mu)[w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2](\alpha_\nu,\beta_\mu). \qquad (2.2)$$

Значения для коэффициентов $w_{uv}^q(x_i,y_j)$ при заданной нагрузке q считаются известными. В самом деле, учитывая формулу (1.3), имеем

$$w_{uv}^q(x_i,y_j)=\frac{4R^4}{\pi^2 D}\frac{Q_\circ}{4\varepsilon^2}\sum_{k,l=1,3,..}\frac{k^u l^v}{\left(\dfrac{k^2}{\xi_\circ^2}+\dfrac{l^2}{\varphi_\circ^2}\right)^2}\cos(\frac{k\pi x_i}{2}+\frac{u\pi}{2})\cos(\frac{l\pi y_i}{2}+\frac{v\pi}{2})I; \qquad (2.3)$$

$$I=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos(\frac{k\pi\alpha}{2})d\alpha\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos(\frac{l\pi\beta}{2})d\beta=\frac{1}{(\frac{k\pi}{2})}\sin(\frac{k\pi\alpha}{2})\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{(\frac{l\pi}{2})}\sin(\frac{l\pi\beta}{2})\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=$$

$$=4\varepsilon^2\frac{\sin(\frac{k\pi\varepsilon}{2})}{\frac{k\pi\varepsilon}{2}}\frac{\sin(\frac{l\pi\varepsilon}{2})}{\frac{l\pi\varepsilon}{2}}. \qquad (2.4)$$

1.3. Построение итерационной схемы стационарного метода Ричардсона (СМР)

Введем обозначения

$$W=[w_{11}(1,1),..,w_{11}(n,m);w_{12}(1,1),..,w_{12}(n,m);w_{22}(1,1),..,w_{22}(n,m)],$$

$$W^q=[w_{11}^q(1,1),..,w_{11}^q(n,m);w_{12}^q(1,1),..,w_{12}^q(n,m);w_{22}^q(1,1),..,w_{22}^q(n,m)],$$

$$\Psi=[\Psi_{11}(1,1),..,\Psi_{11}(n,m);\Psi_{12}(1,1),..,\Psi_{12}(n,m);\Psi_{22}(1,1),..,\Psi_{22}(n,m)]; \qquad (3.1)$$

$F=F(W,\Psi)$, $G=G(W)$ – нелинейные правые части в системе (2.2)

Система (2.2) приводится с учетом обозначений (3.1) к следующему виду:

$$W=W^q+F(W,\Psi),$$

$$\Psi=\mathbf{0}+G(W). \qquad (3.2)$$

Положив $W_0 = W^q$, $\Psi_0 = \mathbf{0}$ (формулы нулевого приближения), запишем итерационную схему СМР

$$\Psi_{k+1} = (1-\tau)\Psi_k + \tau G(W_k), \quad k = 0, 1, ..$$
$$W_{k+1} = \tau W^q + (1-\tau)W_k + \tau F(W_k, \Psi_{k+1}), \quad k = 0, 1, .. \tag{3.2}$$

2. Численный эксперимент

2.1. Об учете пологости панели

На первом этапе численного эксперимента была проведена серия расчетов по учету влияния пологости цилиндрической панели. Эти результаты могли оказаться полезными при сравнении решений для плоской пластины и панели. В качестве базовых были взяты исходные уравнения в линейной форме

$$\Delta^2 w = \frac{R^4}{D} q - \frac{R}{4D\xi_0^2}\Psi_{xx},$$
$$\Delta^2 \Psi = \frac{EhR}{4\xi_0^2} w_{xx}.$$

Подействовав на первое уравнение оператором Δ_0^2, и произведя вычитание из него второго уравнения, придем к классическому уравнению типа В.З.Власова [4]

$$\Delta^4 w + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{16\xi_0^4 h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{R^4}{16D}\Delta^2 q.$$

Граничные условия остаются прежними (см. форм. (1.10)).

Для решения полученной линейной задачи уместно применить метод двойных тригонометрических рядов, согласно которому, для удовлетворения граничным условиям, необходимо принять следующие представления для прогиба и нагрузки:

$$\begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix} = \sum\sum_{k,m=1,3,..} \begin{pmatrix} w_{km} \\ q_{km} \end{pmatrix} \cos\frac{\pi k x}{2} \cos\frac{\pi m y}{2}$$

Подставив эти представления в последнее уравнение, получим следующую формулу для вычисления коэффициентов Фурье:

$$w_{km} = \frac{\dfrac{R^4}{16D}\left(\dfrac{\pi^2}{2^2}\right)^2\left(\dfrac{k^2}{\xi_0^2} + \dfrac{m^2}{\varphi_0^2}\right)^2}{\left(\dfrac{\pi^2}{2^2}\right)^4\left(\dfrac{k^2}{\xi_0^2} + \dfrac{m^2}{\varphi_0^2}\right)^4 + \underline{\left(\dfrac{\pi^2}{2^2}\right)^2 \dfrac{12(1-\nu^2)}{16\xi_0^4 h^2}\left(\dfrac{\pi^2}{2^2}\right)^2}}.$$

(неучет подчеркнутого слагаемого соответствует решению для задачи об изгибе плоской пластины).

На представленных ниже графиках показана зависимость прогиба панели и соответствующей (в развертке) плоской пластины.

Из приведенных рисунков видно, что рассматриваемые прогибы удовлетворительно согласуются лишь для очень пологих ($\varphi_0 < 0.5 \approx 30°$) и относительно толстостенных ($h/R > 0.1$) панелей.

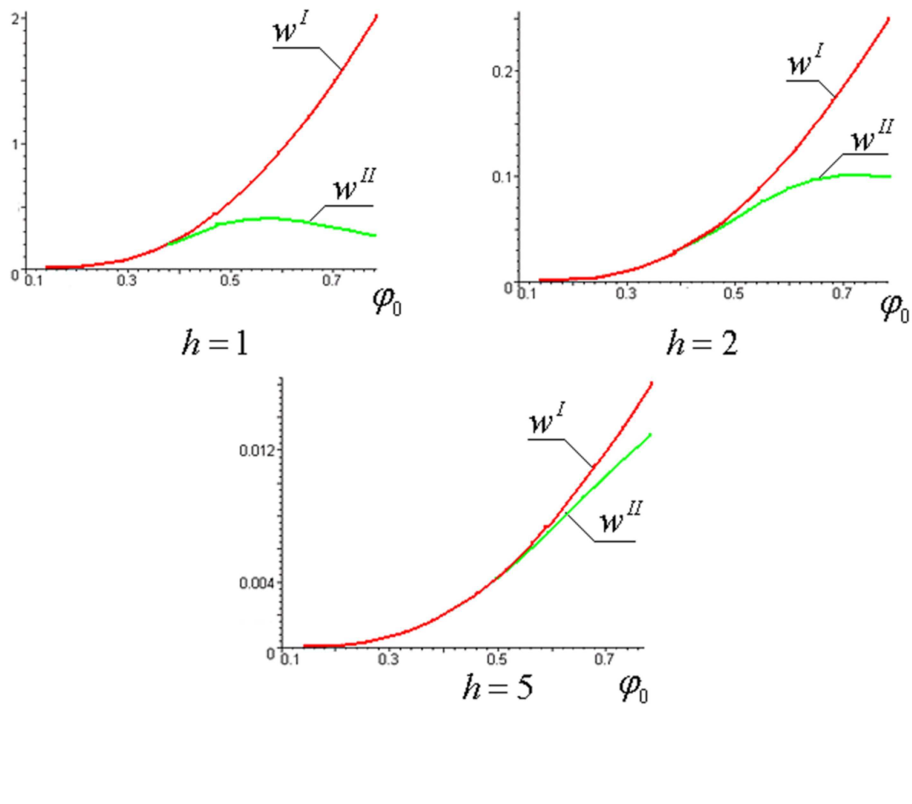


Рис.2. Графики прогиба цилиндрической панели (w^I) и соответствующей плоской пластины (w^{II}) при $l = R = 50$ см, $Q_0 = 10$ кг, $\varepsilon = 1$.

2.2. Об учете краевого эффекта в цилиндрической панели

При нагрузке близкой к равномерной в рассматриваемой цилиндрической панели возникает т.н. простой краевой эффект (ПКЭ). ПКЭ заключается в том, что графики изгибающих моментов вдоль оси x вблизи краев $x = \pm 1$ имеют пики, которые затем быстро затухают. Приведенные графики иллюстрируют ПКЭ.

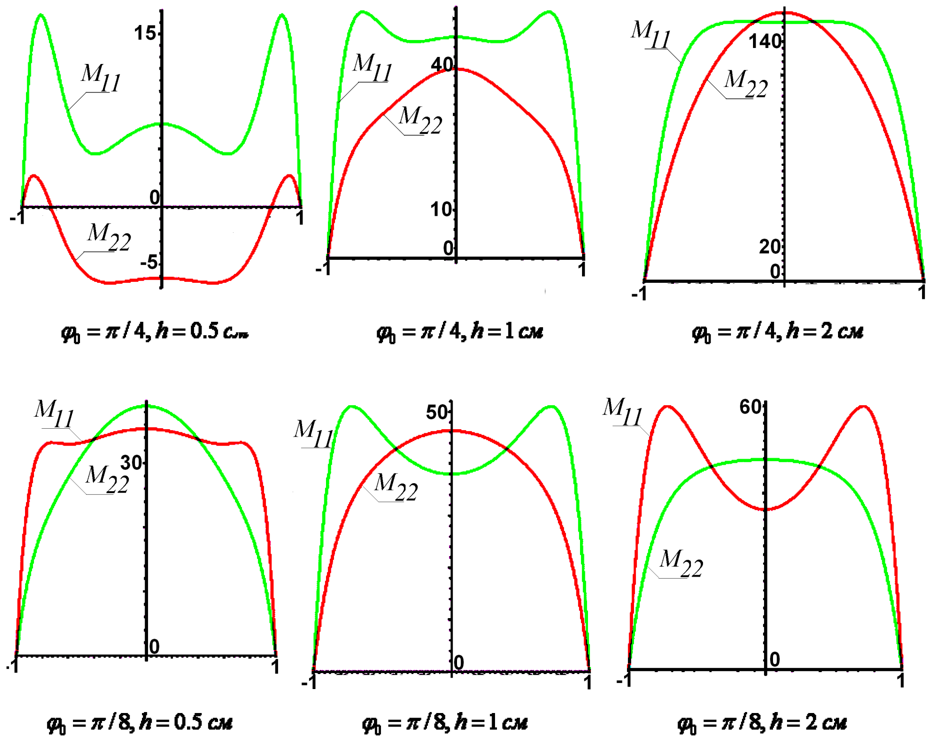


Рис.3а. Графики изгибающих моментов
при $l = R = 50$ см, $Q_0 = 100$ кг, $\varepsilon = 1$.

Из представленных рисунков видно, что ПКЭ имет место как в линейном, так и в нелинейном случаях. При этом ПКЭ более ярко выражен для тонких и пологих оболочек.

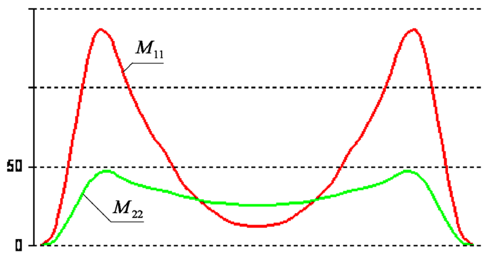
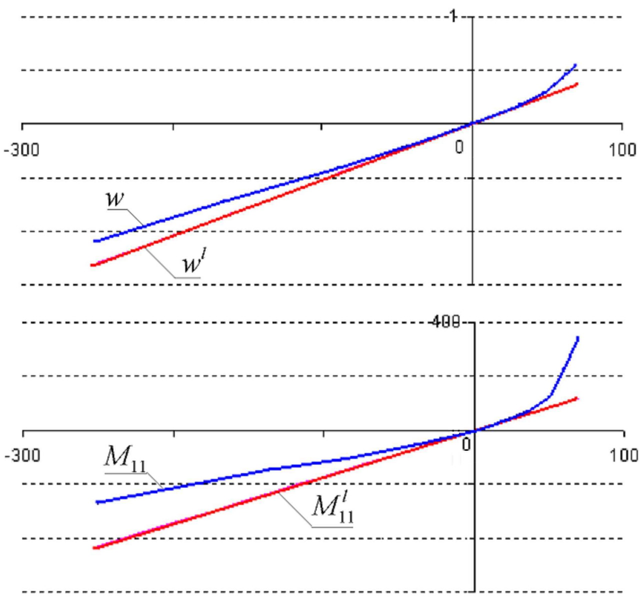


Рис.3б. К оценке ПКЭ по нелинейной теории
(графики изгибающих моментов при $l = R = 50$ см,
$Q_0 = 100$ кг, $\varepsilon = 1$, $\varphi_0 = \pi/8$, $h = 2$ см).

2.3. Об учете нелинейности

С целью определения влияния нелинейности на прогиб и напряжения были проведены численные эксперименты, в которых варьировалась часть параметров. Основной изменяемый параметр – это нагрузка на оболочку Q_0. Изменялись также толщина и угол раствора панели. Некоторые из полученных результатов представлены ниже на графиках.



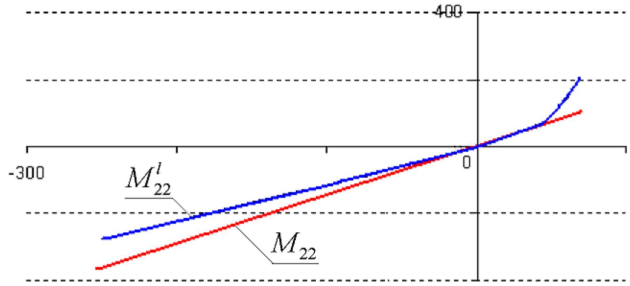


Рис.4а. Графики для прогиба и изгибающих моментов при $l = R = 50$ см, $\varepsilon = 0.5$, $\varphi_0 = \pi/8$, $h = 1$ см.

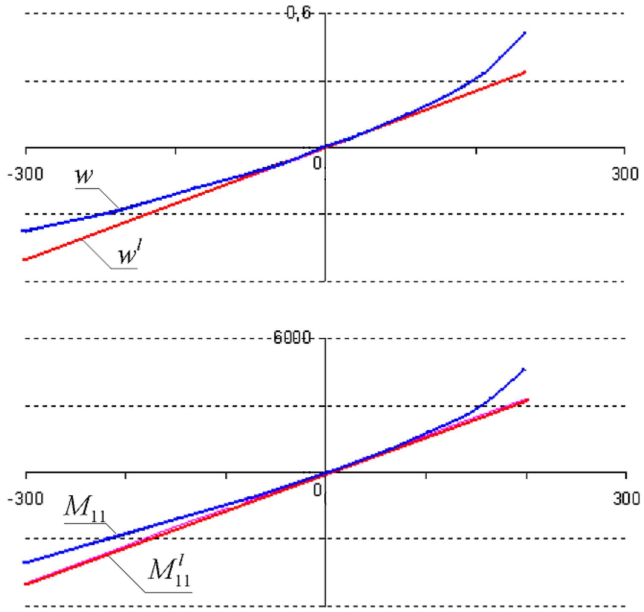


Рис.4б. Графики для прогиба и изгибающего момента M_{11} при $l = R = 50$ см, $\varepsilon = 0.3$, $\varphi_0 = \pi/4$, $h = 3$ см.

Графики на рис. 4 представлены для значений нагрузки Q_0, обеспечивающей сходимость итерационного процесса, т.е. при больших (меньших) значениях Q_0 итерационный процесс расходится. При этом, индексом l отмечен график для величины, рассчитанной по линейной теории.

Критерием сходимости служила стабилизация значений функций M_{11}, M_{22} – как наиболее плохо сходящихся из искомых величин.

Вычисления проводились с использованием 20 членов по каждой переменной в рядах для функции Грина и ее производных и при 30 узлах квадратурной формулы Гаусса-Лежандра в каждом направлении на неравномерной сетке. Использовалась итерационная схема стационарного метода Ричардсона, в которой параметр τ каждый раз подбирался так, чтобы обеспечить сходимость итерационного процесса.

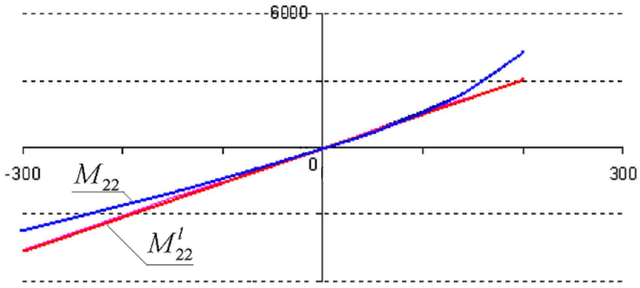


Рис.4в. График изгибающего момента M_{22}
при $l = R = 50$ см, $\varepsilon = 0.3$, $\varphi_0 = \pi/4$, $h = 3$ см.

Как видно из представленных графиков, нелинейность имеет место при широких значениях параметров. При этом она более заметна при малых толщинах, небольших значениях φ_0 и больших значениях нагрузки. Можно отметить также то, что панель лучше воспринимает отрицательные нагрузки. Из графиков также видно, что в области небольших по абсолютной величине нагрузок прогиб и изгибающие моменты изменяются по линейному закону.

Для изображения изгиба цилиндрической панели при различных значениях нагрузки, приведем соответствующие поверхности при $Q_0 = 100$ кг и $Q_0 = -100$ кг.

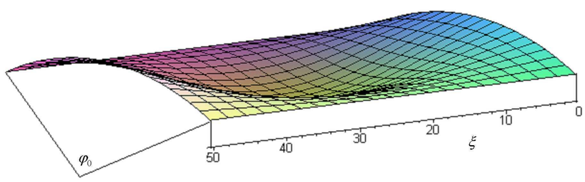


Рис.5а. Поверхность прогиба при
$l = R = 50$ см, $\varepsilon = 0.5$, $\varphi_0 = \pi/4$, $h = 1$ см, $Q_0 = 100$ кг.

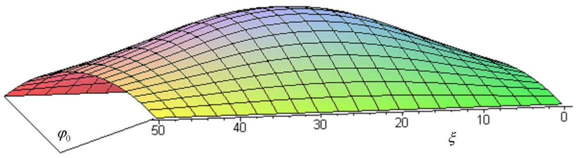


Рис.5б. Поверхность прогиба при
$l = R = 50$ см, $\varepsilon = 0.5$, $\varphi_0 = \pi/4$, $h = 1$ см, $Q_0 = -100$ кг.

Литература

1. **Михайловский Е.И.** Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. 516 с.

2. **Михайловский Е.И., Черных К.Ф.** Развитие механики оболочек в трудах школы академика В.В.Новожилова // Успехи механики. 2003. Т.2. №3. С.87-126.

3. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

4. **Власов В.З.** Избранные труды. Т.1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.

Summary

Mikhailovskii E.I., Mironov V.V., Kuznetsova J.L. About one solution algorithm for solving of nonlinear boundary problem Karman-type.

On the basis of Green's well-known function, an algorithm of edge problems with Kárman-type non-linearity to the corresponding system of algebraic equations. The algorithm is realized on tne examples of simply supported opened cylindrical shell.

Сыктывкарский университет *Поступила 31.10.2007*