

УДК 539.371

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В.Н. Тарасов, Д.В. Холмогоров

В работе рассматривается задача устойчивости цилиндрической оболочки, нагруженной внешним нормальным давлением или подвергающейся осевому сжатию. При численном исследовании задачи перемещения аппроксимируются сплайнами. В отличие от традиционных тригонометрических рядов применение сплайнов позволяет рассматривать реальные граничные условия, в частности, допускается перемещение торцов оболочки как жесткого целого.

1. Постановка задачи

Пусть R - радиус оболочки, L - длина, h - толщина. Выберем координаты (x, y) , откладываемые соответственно вдоль образующей и по дуге. Введем центральный угол ϑ так, что $y = R\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ и безразмерную координату $\xi = x/R$. Тогда положение точки срединной поверхности оболочки определяется координатами (ξ, ϑ) . Перемещения точек вдоль оси x обозначим через u , перемещения по касательной к координатной линии y - через v , а перемещения по нормали к срединной поверхности обозначим через w (прогиб). Прогиб считается положительным, если он направлен к центру кривизны.

Выражения для деформаций в срединной поверхности и параметров изменения кривизны через перемещения возьмем в виде:

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{w}{R}, \quad \gamma = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi}; \quad (1)$$
$$\varkappa_{\xi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \varkappa_{\vartheta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}$$

$$\varkappa = -\frac{1}{2R^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \vartheta}. \quad (2)$$

Тогда полная потенциальная энергия деформации оболочки может быть вычислена по формуле

$$U = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \frac{EhR}{2(1-\mu^2)} \left[\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\vartheta^2 + 2\mu\varepsilon_\xi\varepsilon_\vartheta + \frac{1-\mu}{2}\gamma^2 \right] d\xi d\vartheta + \\ + \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \frac{Eh^3R}{24(1-\mu^2)} \left[\varkappa_\xi^2 + \varkappa_\vartheta^2 + 2\mu\varkappa_\xi\varkappa_\vartheta + 2(1-\mu)\varkappa^2 \right] d\xi d\vartheta. \quad (3)$$

Если оболочка подвергается сжатию вдоль образующей усилиями p , то работа внешних сил определяется выражением

$$A = \frac{phR}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} d\xi d\vartheta. \quad (4)$$

Здесь $\ell = L/R$, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

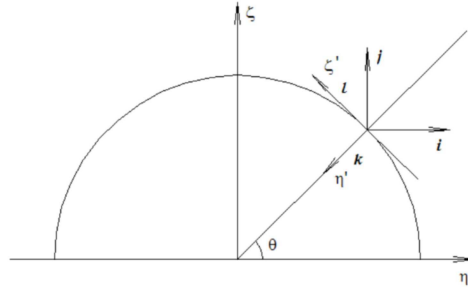


Рис. 1

Предположим теперь, что торцы оболочки могут перемещаться как жесткое целое. Для того, чтобы исключить перемещение всей оболочки как жесткого целого, будем считать, что на правом краю оболочки (при $\xi = \ell$) выполнены условия жесткой заделки ($0 \leq \vartheta \leq 2\pi$)

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \quad (5)$$

либо условия шарнирного опирания

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (6)$$

Пусть теперь (ξ, η, ζ) – неподвижная система координат (рис. 1) и срединная поверхность оболочки до деформации описывается уравнениями ($0 \leq \xi \leq \ell$)

$$\zeta = R \sin \vartheta, \quad \eta = R \cos \vartheta. \quad (7)$$

Предположим, что левый край оболочки (при $\xi = 0$) может смещаться вдоль образующей (на величину u_0) и в плоскости поперечного сечения (η, ζ) как жесткое целое. Будем считать, что направления осей выбраны так, что смещение края в плоскости (η, ζ) происходит в направлении оси ζ , что соответствует граничным условиям

$$u(0, \vartheta) = u_0, \quad (8)$$

$$v(0, \vartheta) = b \sin \vartheta, \quad w(0, \vartheta) = b \cos \vartheta, \quad (9)$$

где b – некоторая постоянная величина.

При повороте левого края оболочки вокруг оси оболочки на угол φ точка срединной поверхности с координатами (7) переходит в точку с координатами

$$\zeta_1 = R \sin(\vartheta + \varphi), \quad \eta_1 = R \cos(\vartheta + \varphi).$$

Откуда, учитывая, что связи между ортами i, j и ортами k, l (рис. 1) имеют вид

$$\begin{cases} k = -j \sin \vartheta - i \cos \vartheta, \\ l = j \cos \vartheta - i \sin \vartheta; \end{cases} \quad \begin{cases} i = -k \cos \vartheta - l \sin \vartheta, \\ j = -k \sin \vartheta + l \cos \vartheta; \end{cases} \quad (10)$$

получаем

$$v(0, \vartheta) = R \sin \varphi, \quad w(0, \vartheta) = R(1 - \cos \varphi). \quad (11)$$

Задачу об устойчивости круговой цилиндрической оболочки, подвергающейся сжатию вдоль образующей усилиями p , равномерно распределенными вдоль торцевых кромок, сформулируем следующим образом: требуется найти минимальное значение нагрузки p , при котором существует нетривиальное решение вариационной проблемы

$$U - A \rightarrow \min. \quad (12)$$

Предполагается, что функции $u(\xi, \vartheta)$, $v(\xi, \vartheta)$, $w(\xi, \vartheta)$ при $\xi = \ell$ удовлетворяют граничным условиям (5) или (6), при $\xi = 0$ – граничным условиям перемещения края как жесткого целого

$$u(0, \vartheta) = u_0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \left(\text{или } \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \right),$$

$$v(0, \vartheta) = b \sin \vartheta + R \sin \varphi, \quad w(0, \vartheta) = b \cos \vartheta + R(1 - \cos \varphi), \quad (13)$$

и выполняются условия периодичности ($0 \leq \xi \leq \ell$)

$$\frac{\partial^s u(\xi, 0)}{\partial \vartheta^s} = \frac{\partial^s u(\xi, 2\pi)}{\partial \vartheta^s}, \quad \frac{\partial^s v(\xi, 0)}{\partial \vartheta^s} = \frac{\partial^s v(\xi, 2\pi)}{\partial \vartheta^s},$$

$$\frac{\partial^s w(\xi, 0)}{\partial \vartheta^s} = \frac{\partial^s w(\xi, 2\pi)}{\partial \vartheta^s}, \quad s = 0..2. \quad (14)$$

Следует отметить, что уравнения Эйлера для функционала (12) в точности совпадают с разрешающей системой уравнений в перемещениях для цилиндрической оболочки, приведенной в [1](см. (13.11)).

2. Сплайн аппроксимация

Функции u , v , w будем искать в виде

$$u(\xi, \vartheta) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} u_{ij} B_i(\xi) \tilde{B}_j(\vartheta),$$

$$v(\xi, \vartheta) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} v_{ij} B_i(\xi) \tilde{B}_j(\vartheta),$$

$$w(\xi, \vartheta) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} w_{ij} B_i(\xi) \tilde{B}_j(\vartheta), \quad (15)$$

где $B_i(\xi)$, $\tilde{B}_j(\vartheta)$ являются кубическими В-сплайнами. Свойства и способы построения В-сплайнов рассматриваются в [2].

Для построения сплайнов $B_i(\xi)$ на отрезке $[0, \ell]$ введем равномерную сетку

$$\xi_i = i \cdot h_\xi, \quad h_\xi = \frac{\ell}{n}, \quad i = 0..n,$$

и определим функции

$$B(\xi) = \frac{1}{8h_\xi^4} \left(\frac{1}{6}\xi_+^3 - \frac{2}{3}(\xi - \xi_1)_+^3 + (\xi - \xi_2)_+^3 - \frac{2}{3}(\xi - \xi_3)_+^3 + \frac{1}{6}(\xi - \xi_4)_+^3 \right),$$

$$B^*(\xi) = b_0\xi_+^3 + b_1(\xi - \xi_1)_+^3 + b_2(\xi - \xi_2)_+^3 + b_3(\xi - \xi_3)_+^3, \quad \xi_+ = \max\{0, \xi\}.$$

Тогда

$$B_i(\xi) = B(\xi - (i-3)h_\xi), \quad i = 3..n-1;$$

$$B_0(\xi) = B^*(\xi) + 1, \quad \text{при } b_0 = -\frac{1}{6h_\xi^3}, \quad b_1 = \frac{1}{2h_\xi^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{2h_\xi^3}, \quad b_3 = \frac{1}{6h_\xi^3};$$

$$\begin{aligned}
B_1(\xi) &= B^*(\xi) + \xi, \text{ при } b_0 = -\frac{1}{3h_\xi^2}, b_1 = \frac{5}{6h_\xi^2}, b_2 = -\frac{2}{3h_\xi^2}, b_3 = \frac{1}{6h_\xi^2}; \\
B_2(\xi) &= B^*(\xi) + \frac{1}{2}\xi^2, \text{ при } b_0 = -\frac{11}{36h_\xi}, b_1 = \frac{1}{2h_\xi}, b_2 = -\frac{1}{4h_\xi}, b_3 = \frac{1}{18h_\xi}; \\
B_{n+2-i}(\xi) &= B_i(\ell - \xi), \quad i = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Сплайны $\tilde{B}_j(\vartheta)$ строятся аналогично, только при этом используется равномерная сетка на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\vartheta_j = j \cdot h_\vartheta, \quad h_\vartheta = \frac{2\pi}{m}, \quad j = 0..m.$$

Нетрудно убедиться, что построенные таким образом сплайны $B_i(\xi)$ и $\tilde{B}_j(\vartheta)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
B_0(0) &= 1, \quad B_i(0) = 0, \quad \forall i = 1..n+2; \\
B_{n+2}(\ell) &= 1, \quad B_i(\ell) = 0, \quad \forall i = 0..n+1; \\
\frac{\partial B_1(0)}{\partial \xi} &= 1, \quad \frac{\partial B_i(0)}{\partial \xi} = 0, \quad \forall i = 0, 2..n+2; \\
\frac{\partial B_{n+1}(\ell)}{\partial \xi} &= 1, \quad \frac{\partial B_i(\ell)}{\partial \xi} = 0, \quad \forall i = 0..n, n+2; \\
\frac{\partial^2 B_2(0)}{\partial \xi^2} &= 1, \quad \frac{\partial^2 B_i(0)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \forall i = 0, 1, 3..n+2; \\
\frac{\partial^2 B_n(\ell)}{\partial \xi^2} &= 1, \quad \frac{\partial^2 B_i(\ell)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \forall i = 0..n-1, n+1, n+2; \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_0(0) &= 1, \quad \tilde{B}_j(0) = 0, \quad \forall j = 1..m+2; \\
\tilde{B}_{m+2}(2\pi) &= 1, \quad \tilde{B}_j(2\pi) = 0, \quad \forall j = 0..m+1; \\
\frac{\partial \tilde{B}_1(0)}{\partial \vartheta} &= 1, \quad \frac{\partial \tilde{B}_j(0)}{\partial \vartheta} = 0, \quad \forall j = 0, 2..m+2; \\
\frac{\partial \tilde{B}_{m+1}(2\pi)}{\partial \vartheta} &= 1, \quad \frac{\partial \tilde{B}_j(2\pi)}{\partial \vartheta} = 0, \quad \forall j = 0..m, m+2; \\
\frac{\partial^2 \tilde{B}_2(0)}{\partial \vartheta^2} &= 1, \quad \frac{\partial^2 \tilde{B}_j(0)}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad \forall j = 0, 1, 3..m+2; \\
\frac{\partial^2 \tilde{B}_m(2\pi)}{\partial \vartheta^2} &= 1, \quad \frac{\partial^2 \tilde{B}_j(2\pi)}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad \forall j = 0..m-1, m+1, m+2. \tag{17}
\end{aligned}$$

3. Учет условий периодичности и граничных условий для сплайнов

Условия периодичности (14) для функций (15) будут выполнены, если положить

$$\begin{aligned} u_{i,m+2} &= u_{i,0}, \quad u_{i,m+1} = -u_{i,1}, \quad u_{i,m} = u_{i,2}, \\ v_{i,m+2} &= v_{i,0}, \quad v_{i,m+1} = -v_{i,1}, \quad v_{i,m} = v_{i,2}, \\ w_{i,m+2} &= w_{i,0}, \quad w_{i,m+1} = -w_{i,1}, \quad w_{i,m} = w_{i,2}, \quad i = 0..n+2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из граничных условий жесткой заделки (5) следуют равенства

$$u_{n+2,j} = v_{n+2,j} = w_{n+2,j} = w_{n+1,j} = 0, \quad j = 0..m+2. \quad (19)$$

Если потребовать выполнения условий шарнирного опирания (6), то

$$u_{n+2,j} = v_{n+2,j} = w_{n+2,j} = w_{n,j} = 0, \quad j = 0..m+2. \quad (20)$$

При $\xi = 0$ должны выполняться условия (13). Учитывая свойства сплайнов (16), из (13) следует, что

$$\begin{aligned} v(0, \vartheta) &= \sum_{j=0}^{m+2} v_{0,j} \tilde{B}_j(\vartheta) = R \sin \varphi + b \sin \vartheta, \\ w(0, \vartheta) &= \sum_{j=0}^{m+2} w_{0,j} \tilde{B}_j(\vartheta) = R(1 - \cos \varphi) + b \cos \vartheta, \\ u(0, \vartheta) &= \sum_{j=0}^{m+2} u_{0,j} \tilde{B}_j(\vartheta) = u_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Считая угол поворота φ малой величиной вместо (21) будем далее использовать условия

$$v(0, \vartheta) = \sum_{j=0}^{m+2} v_{0,j} \tilde{B}_j(\vartheta) \approx R\varphi + b \sin \vartheta, \quad w(0, \vartheta) = \sum_{j=0}^{m+2} w_{0,j} \tilde{B}_j(\vartheta) \approx b \cos \vartheta.$$

$$u(0, \vartheta) = \sum_{j=0}^{m+2} u_{0,j} \tilde{B}_j(\vartheta) = u_0. \quad (22)$$

Потребуем, чтобы условия (22) выполнялись только в точках сетки

$$\vartheta = \vartheta_k = \frac{2\pi k}{m}, \quad k = 0..m-1.$$

Определим квадратную матрицу \tilde{T} порядка m с элементами

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{0,k} &= \tilde{B}_0(\vartheta_k) + \tilde{B}_{m+2}(\vartheta_k), & \tilde{t}_{1,k} &= \tilde{B}_1(\vartheta_k) - \tilde{B}_{m+1}(\vartheta_k), \\ \tilde{t}_{2,k} &= \tilde{B}_0(\vartheta_k) + \tilde{B}_m(\vartheta_k); \\ \tilde{t}_{j,k} &= \tilde{B}_j(\vartheta_k), & j &= 3..m-1, \quad k = 0..m-1.\end{aligned}\quad (23)$$

Найдем решения следующих систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{u}_{0,j}^u \cdot \tilde{t}_{j,k} &= 1, & k &= 0..m-1; & \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{v}_{0,j}^\varphi \cdot \tilde{t}_{j,k} &= R, & k &= 0..m-1; \\ \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{v}_{0,j}^b \cdot \tilde{t}_{j,k} &= \sin \vartheta_k, & k &= 0..m-1; \\ \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{w}_{0,j}^b \cdot \tilde{t}_{j,k} &= \cos \vartheta_k, & k &= 0..m-1.\end{aligned}\quad (24)$$

Используя эти решения $\tilde{u}_{0,j}^u$, $\tilde{v}_{0,j}^\varphi$, $\tilde{v}_{0,j}^b$, $\tilde{w}_{0,j}^b$, $j = 0..m-1$, окончательно имеем

$$\begin{aligned}u_{0,j} &= u_0 \cdot \tilde{u}_{0,j}^u, & v_{0,j} &= \varphi \cdot \tilde{v}_{0,j}^\varphi + b \cdot \tilde{v}_{0,j}^b \\ w_{0,j} &= b \cdot \tilde{w}_{0,j}^b, & j &= 0..m-1.\end{aligned}\quad (25)$$

Таким образом, учет условий периодичности и трех видов граничных условий приводит к соотношениям на коэффициенты сплайнов (18), (19), (20) и (25).

4. Вычисление функционала энергии

Введем множества индексов

$$I = \{0, 1, \dots, n+2\}, \quad J = \{0, 1, \dots, m+2\}, \quad (26)$$

рассмотрим вектор $x \in R^N$, $N = 3(n+3)(m+3)$ и определим его компоненты x_0, x_1, \dots, x_{N-1} по правилу ($i \in I$, $j \in J$)

$$x_k = \begin{cases} u_{ij}, & k = f_u(i, j), \\ v_{ij}, & k = f_v(i, j), \\ w_{ij}, & k = f_w(i, j). \end{cases} \quad (27)$$

Здесь индексные функции $f_u(i, j)$, $f_v(i, j)$, $f_w(i, j)$ определяют номера коэффициентов сплайнов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} в векторе x :

$$\begin{aligned} f_u(i, j) &= i(m+3) + j, \\ f_v(i, j) &= (n+3)(m+3) + i(m+3) + j, \\ f_w(i, j) &= 2(n+3)(m+3) + i(m+3) + j. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя сплайны (15) в функционал (12) и учитывая формулы (1),(2) и (27), вместо функционала получим квадратичную функцию относительно компонент вектора x

$$F(x, p) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} x_i x_j - \frac{ph}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} q_{ij} x_i x_j, \quad (29)$$

где коэффициенты матриц квадратичных форм $A = \{a_{ij}\}$, $Q = \{q_{ij}\}$ вычисляются по следующим формулам ($i_0, k_0 \in I$; $j_0, l_0 \in J$):

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{EhR}{2(1-\mu^2)}, \quad E_2 = \frac{Eh^3R}{24(1-\mu^2)}; \\ a_{ik} &= \frac{2E_1}{R^2} \left[B_{k_0 i_0}^{11} D_{l_0 j_0}^{00} + \frac{1}{2(1-\mu)} B_{k_0 i_0}^{00} D_{l_0 j_0}^{11} \right], \\ i &= f_u(i_0, j_0), \quad k = f_u(k_0, l_0); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{E_1}{R^2} [(1-\mu) B_{i_0 k_0}^{01} D_{j_0 l_0}^{10} + 2\mu B_{k_0 i_0}^{01} D_{l_0 j_0}^{10}], \quad a_{ki} = a_{ik} \\ i &= f_u(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} a_{ik} &= -\frac{2E_1\mu}{R^2} B_{k_0 i_0}^{01} D_{j_0 l_0}^{00}, \quad a_{ki} = a_{ik} \\ i &= f_u(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{2E_1}{R^2} \left[B_{k_0 i_0}^{00} D_{l_0 j_0}^{11} + \frac{1-\mu}{2} B_{k_0 i_0}^{11} D_{l_0 j_0}^{00} \right] + \\ &+ \frac{E_2}{R^4} [2B_{k_0 i_0}^{00} D_{l_0 j_0}^{11} + (1-\mu) B_{k_0 i_0}^{11} D_{l_0 j_0}^{00}], \\ i &= f_v(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
a_{ik} = & -\frac{2E_1}{R^2} B_{k_0 i_0}^{00} D_{j_0 l_0}^{10} + \frac{E_2}{R^4} [2B_{k_0 i_0}^{00} D_{j_0 l_0}^{12} + 2(1-\mu)B_{k_0 i_0}^{11} D_{l_0 j_0}^{10}] + \\
& + \frac{2E_2\mu}{R^4} B_{k_0 i_0}^{20} D_{j_0 l_0}^{10}, \quad a_{ki} = a_{ik} \\
& i = f_v(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0);
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
a_{ik} = & \frac{2E_1}{R^2} B_{k_0 i_0}^{00} D_{j_0 l_0}^{00} + \frac{E_2}{R^4} [2B_{k_0 i_0}^{22} D_{l_0 j_0}^{00} + 2B_{k_0 i_0}^{00} D_{l_0 j_0}^{22}] + \\
& + \frac{4E_2(1-\mu)}{R^4} B_{k_0 i_0}^{11} D_{l_0 j_0}^{11} + \frac{2E_2\mu}{R^4} [B_{k_0 i_0}^{20} D_{l_0 j_0}^{02} + B_{i_0 k_0}^{20} D_{j_0 l_0}^{02}], \\
q_{ik} = & \frac{2}{R} B_{k_0 i_0}^{11} D_{j_0 l_0}^{00}; \\
& i = f_w(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0);
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
q_{ik} = 0, \quad q_{ki} = 0, \quad i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0); \\
q_{ik} = 0, \quad q_{ki} = 0, \quad i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0); \\
q_{ik} = 0, \quad q_{ki} = 0, \quad i = f_v(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0); \\
q_{ik} = 0, \quad i = f_v(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0).
\end{aligned} \tag{36}$$

В приведенных формулах (30)-(35) коэффициенты $B_{k_0 i_0}^{st}$ и $D_{l_0 j_0}^{st}$ представляют собой значения интегралов от сплайнов и их производных ($i_0, k_0 \in I$; $j_0, l_0 \in J$):

$$B_{k_0 i_0}^{st} = \int_0^\ell \left[\frac{d^s B_{k_0}(\xi)}{d\xi^s} \cdot \frac{d^t B_{i_0}(\xi)}{d\xi^t} \right] d\xi, \quad s, t = 0..2; \tag{37}$$

$$D_{l_0 j_0}^{st} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d^s \tilde{B}_{l_0}(\vartheta)}{d\vartheta^s} \cdot \frac{d^t \tilde{B}_{j_0}(\vartheta)}{d\vartheta^t} \right] d\vartheta, \quad s, t = 0..2. \tag{38}$$

5. Преобразование коэффициентов квадратичных форм

Далее для определенности будем считать, что при $\xi = \ell$ должны выполняться граничные условия жесткой заделки (19), а при $\xi = 0$ - условия (25) и

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \text{или} \quad w_{1,j} = 0, \quad j = 0..m + 2. \quad (39)$$

Построим множества индексов, определяющих номера варьируемых коэффициентов сплайнов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} в векторе x (27):

$$I_u = \{1..n + 1\}, \quad J_u = \{0..m - 1\}, \quad I_v = \{1..n + 1\}, \quad J_v = \{0..m - 1\}, \\ I_w = \{2..n\}, \quad J_w = \{0..m - 1\}. \quad (40)$$

Введем матрицу преобразования T размерности N с коэффициентами

$$t_{k,k} = \begin{cases} 1, & k = f_u(i, j), \quad \forall i \in I_u, j \in J_u \\ 1, & k = f_v(i, j), \quad \forall i \in I_v, j \in J_v \\ 1, & k = f_w(i, j), \quad \forall i \in I_w, j \in J_w \end{cases} \quad (41)$$

$$t_{k,l} = \begin{cases} +1, & k = f_u(i, m + 2), \quad l = f_u(i, 0), \quad \forall i \in I_u \\ -1, & k = f_u(i, m + 1), \quad l = f_u(i, 1), \quad \forall i \in I_u \\ +1, & k = f_u(i, m), \quad l = f_u(i, 2), \quad \forall i \in I_u \end{cases} \quad (42)$$

$$t_{k,l} = \begin{cases} +1, & k = f_v(i, m + 2), \quad l = f_v(i, 0), \quad \forall i \in I_v \\ -1, & k = f_v(i, m + 1), \quad l = f_v(i, 1), \quad \forall i \in I_v \\ +1, & k = f_v(i, m), \quad l = f_v(i, 2), \quad \forall i \in I_v \end{cases} \quad (43)$$

$$t_{k,l} = \begin{cases} +1, & k = f_w(i, m + 2), \quad l = f_w(i, 0), \quad \forall i \in I_w \\ -1, & k = f_w(i, m + 1), \quad l = f_w(i, 1), \quad \forall i \in I_w \\ +1, & k = f_w(i, m), \quad l = f_w(i, 2), \quad \forall i \in I_w \end{cases} \quad (44)$$

Здесь формулы (42)-(44) отвечают условиям периодичности (18). Кроме того, все остальные коэффициенты $t_{k,l}$ полагаются равными нулю.

Для учета условий (25) построим вектора x^u , x^b , $x^\varphi \in R^N$ с компонентами вида (остальные компоненты полагаются равными нулю)

$$x_k^u = \tilde{u}_{0,j}^u, \quad k = f_u(0, j), \quad \forall j \in J_u; \quad (45)$$

$$x_k^\varphi = \tilde{v}_{0,j}^\varphi, \quad k = f_v(0, j), \quad \forall j \in J_v; \quad (46)$$

$$x_k^b = \begin{cases} \tilde{v}_{0,j}^b, & k = f_v(0, j), \quad \forall j \in J_v \\ \tilde{w}_{0,j}^b, & k = f_w(0, j), \quad \forall j \in J_w \end{cases} \quad (47)$$

Квадратичную функцию (29), соответствующую функционалу (12), можно представить в виде

$$F(x, p) = (Ax, x) - \frac{ph}{2}(Qx, x). \quad (48)$$

Для учета условий периодичности и граничных условий в (48) выполним подстановку¹

$$x = T\tilde{x} + u_0 \cdot x^u + \varphi \cdot x^\varphi + b \cdot x^b. \quad (49)$$

Получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x}, u_0, \varphi, b, p) &= (T^*AT\tilde{x}, \tilde{x}) + 2u_0 \cdot (T^*Ax^u, \tilde{x}) + u_0^2 \cdot (Ax^u, x^u) + \\ &+ 2\varphi \cdot (T^*Ax^\varphi, \tilde{x}) + \varphi^2 \cdot (Ax^\varphi, x^\varphi) + \\ &+ 2b \cdot (T^*Ax^b, \tilde{x}) + b^2 \cdot (Ax^b, x^b) - \\ &- \frac{ph}{2} \left[(T^*QT\tilde{x}, \tilde{x}) + 2u_0 \cdot (T^*Qx^u, \tilde{x}) + u_0^2 \cdot (Qx^u, x^u) + \right. \\ &+ 2\varphi \cdot (T^*Qx^\varphi, \tilde{x}) + \varphi^2 \cdot (Qx^\varphi, x^\varphi) + \\ &\left. 2b \cdot (T^*Qx^b, \tilde{x}) + b^2 \cdot (Qx^b, x^b) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Заметим, что функция (50) зависит от параметров u_0 , φ , b и только от тех компонент вектора \tilde{x} (в силу определения матрицы преобразования T), которые соответствуют варьируемым коэффициентам сплайнов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} . Если эти коэффициенты обозначить через $z_1, z_2, \dots, z_{\tilde{n}-3}$ и положить

$$z_{\tilde{n}-2} = u_0, \quad z_{\tilde{n}-1} = \varphi, \quad z_{\tilde{n}} = b,$$

то функцию (50) можно представить в виде

$$\tilde{F}(z, p) = \frac{1}{2}(\tilde{A}z, z) - \frac{p}{2}(\tilde{Q}z, z), \quad (51)$$

где \tilde{A} , \tilde{Q} - симметричные матрицы размерности \tilde{n} , причем \tilde{A} является положительно определенной матрицей.

¹Следует отметить, что подстановка $x = T\tilde{x}$ с матрицей T вида (41)-(44) (с учетом формул (40)) позволяет учесть условия периодичности и граничные условия жесткой заделки на обоих краях оболочки

Тогда, вместо вариационной проблемы (12) получаем

$$\tilde{F}(z, p) = \frac{1}{2}(\tilde{A}z, z) - \frac{p}{2}(\tilde{Q}z, z) \rightarrow \min. \quad (52)$$

Откуда приходим к обобщенной задаче на собственные значения для матриц \tilde{A} и \tilde{Q}

$$\tilde{A}z = p \cdot \tilde{Q}z. \quad (53)$$

6. Результаты численных экспериментов

Следуя [1], обозначим через p_0 верхнее критическое значение напряжения, соответствующее точке бифуркации для линейной задачи

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \frac{h}{R}. \quad (54)$$

Область значений L/R , для которых формула (54) считается справедливой, лежит в пределах

$$1.38\sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{L}{R} < 0.57\sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (55)$$

Численный эксперимент проведен для цилиндрической оболочки с параметрами

$$\mu = 0.3, \quad \frac{h}{R} = 0.05, \quad n = 10, \quad m = 10. \quad (56)$$

Указанные здесь значения параметров n и m определяют количество используемых сплайнов в представлениях (15) для перемещений u, v, w .

Для отношения $h/R = 0.05$ области (55) будет приблизительно соответствовать диапазон

$$0.31 < \frac{L}{R} < 2.55. \quad (57)$$

Расчеты проведены для следующих видов граничных условий:

- а) жесткая заделка на обоих краях оболочки;
- б) при $\xi = \ell$ - жесткая заделка (5), при $\xi = 0$ - поворот и перемещение края как жесткого целого (9)-(11) и дополнительно

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0;$$

- с) шарнирное опирание на обоих краях оболочки;

d) при $\xi = \ell$ - шарнирное опирание (6), при $\xi = 0$ - поворот и перемещение края как жесткого целого (9)-(11) и дополнительно

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0.$$

Обозначим через \tilde{p}_0 безразмерный параметр, соответствующий верхнему значению критической нагрузки (54) и через \tilde{p} - параметр, соответствующий значению нагрузки p (53), полученной численно.

$$\tilde{p}_0 = \frac{p_0 R}{Eh}, \quad \tilde{p} = \frac{pR}{Eh} \quad (58)$$

Таблица 1.

	k	1	2	3	4	5	6	7
	L/R	0.05	0.1	0.2	0.35	1.0	2.0	2.5
(a)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	119.5	29.90	7.57	2.76	1.2	1.05	1.038
(b)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	40.1	17.51	7.57	2.74	1.2	1.05	1.038
(c)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	29.9	7.50	2.01	1.05	1.003	1.004	1.006
(d)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	12.7	7.50	2.00	1.02	1.003	1.004	1.006

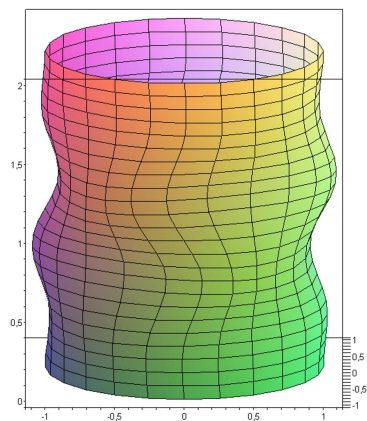
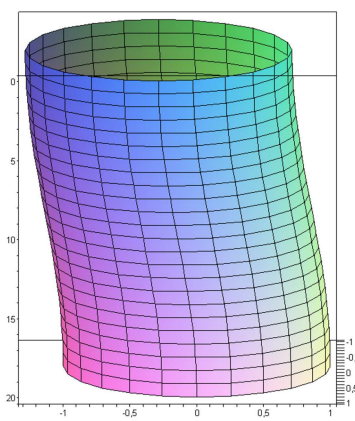
Таблица 2.

	k	8	9	10	11	12	13	14
	L/R	4.5	10.0	15.0	20.0	25.0	50.0	100.0
(a)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	0.989	1.195	1.036	0.964	0.926	0.530	0.209
(b)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	0.989	1.195	1.036	0.798	0.532	0.209	0.155
(c)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	0.988	1.195	1.038	0.970	0.926	0.543	0.214
(d)	\tilde{p}/\tilde{p}_0	0.988	1.195	1.038	0.794	0.530	0.212	0.164

В таблицах 1-2 приводятся результаты расчетов значений критического параметра \tilde{p} в сравнении с \tilde{p}_0 в зависимости от относительной длины оболочки и четырех видов граничных условий.

Варианты $k = 4 - 7$ отвечают случаю оболочек "средней длины", когда отношение L/R находится в диапазоне (57). Варианты $k = 4 - 10$ (b), (d) характеризуются тем, что при $\xi = 0$ перемещений края как жесткого целого не наблюдается, характерная форма выпучивания приведена на рис. 2. Вместе с тем, для более коротких оболочек (варианты $k = 1 - 3$ (b), (d)) наблюдается сжатие оболочки вдоль образующей, а для более длинных (варианты $k = 11 - 14$ (b), (d)) - смещение края $\xi = 0$ как

жесткого целого в плоскости поперечного сечения, характерная форма выпучивания оболочки приведена на рис. 3. Для случаев $k = 13 - 14$ значение критической силы в 2 – 5 раз меньше, чем вычисленное по формуле (54).

Рис. 2. $k = 6$ (b)Рис. 3. $k = 11$ (b)

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн – функций. М.: Москва. 1980. 352 с.

Summary

Kholmogorov D.V., Tarasov V.N. Influence of boundary conditions on the stability of a cylindrical shell

In the work the problem of stability of the cylindrical shell, loaded with external normal pressure or undergoing axial compression, is examined. With a numerical study the tasks of displacement are approximated by splines. In contrast to the traditional trigonometric series the application of splines makes it possible to consider the real boundary condition, in particular, the displacement of the ends of shell as rigid whole is allowed.

Сыктывкарский университет

Поступила 31.09.2007