Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 519.652

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ, ИХ ЖЕСТКОСТЬ И ИЗБЫТОЧНОСТЬ

А.М. Дурягин

Доказано, что вещественные гармонические фреймы обладают максимальной избыточностью, т.е. при удалении любых $m-n$ векторов, оставшиеся n векторов образуют фрейм в $\mathbb{R}^n$ (в общем случае не жёсткий). Предложен быстрый алгоритм разложения по вещественному гармоническому фрейму.

1. Вещественные гармонические фреймы.

Рассмотрим систему из m векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$:
при n четном

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{n}}\Big(\cos\frac{k\pi}{m}, \cos\frac{3k\pi}{m}, \ldots, \cos\frac{(n-1)k\pi}{m},$$
$$\sin\frac{k\pi}{m}, \sin\frac{3k\pi}{m}, \ldots, \sin\frac{(n-1)k\pi}{m}\Big)^T,$$

$k \in 0 : m-1$;

при n нечетном

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{n}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\frac{2k\pi}{m}, \cos\frac{4k\pi}{m}, \ldots, \cos\frac{(n-1)k\pi}{m},$$
$$\sin\frac{2k\pi}{m}, \sin\frac{4k\pi}{m}, \ldots, \sin\frac{(n-1)k\pi}{m}\Big)^T,$$

$k \in 0 : m-1$.

В дальнейшем будем предполагать, что $m > n$.

Систему векторов $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ обладает свойством: $\|\varphi_k\| = 1, \quad k \in 0 : m-1$.

Систему $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ будем называть *вещественным гармоническим фреймом.*

2. Быстрый алгоритм вычисления фреймовых коэффициентов

Вычисление скалярного произведения $a_k = \langle x, \varphi_k \rangle, \quad k \in 0 : m-1$, требует mn умножений и столько же сложений. Естественно допустить, что избыточность $m-n$ не превосходит n, т.е. $m-n \le n$, отсюда $n \ge \frac{1}{2}m$. Поэтому "лобовое" вычисление коэффициентов a_k требует не менее m^2 операций. Попытаемся вычислить коэффициенты a_k иначе.

1) При n четном: Пусть $x = (x(0), \dots, x(n-1)) \in \mathbb{R}^n, n = 2\nu$. Тогда фреймовые коэффициенты можно вычислить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \langle x, \varphi_k \rangle = \sqrt{\tfrac{2}{n}} \textstyle\sum_{j=0}^{\nu-1} \left[x(j) \cos \frac{(2j+1)k\pi}{m} + x(\nu+j) \sin \frac{(2j+1)k\pi}{m} \right] = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2n}} \textstyle\sum_{j=0}^{\nu-1} \Big[x(j) \Big(\omega_{2m}^{(2j+1)k} + \omega_{2m}^{-(2j+1)k} \Big) + x(\nu+j) \frac{1}{i} \left(\omega_{2m}^{(2j+1)k} - \omega_{2m}^{-(2j+1)k} \right) \Big] = \\
&= \tfrac{\omega_{2m}^{k}}{\sqrt{2n}} \textstyle\sum_{j=0}^{\nu-1} (x(j) - ix(\nu+j)) \omega_m^{jk} + \frac{\omega_{2m}^{-k}}{\sqrt{2n}} \sum_{j=0}^{\nu-1} (x(j) + ix(\nu+j)) \omega_m^{-jk}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $\omega_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$.

Введем сигнал $y \in \mathbb{C}^m$:

$$
y(j) = \begin{cases} x(j) + ix(\nu+j), & j \in 0 : \nu-1; \\ 0, & j \in \nu : m-1. \end{cases}
$$

Вне основного периода сигнал $y(j)$ определяется по периодичности с периодом m. Вычислим ДПФ от сигнала $y : Y(k) = \mathcal{F}_m(y)(k)$. В силу (1)

$$
a_k = \frac{\omega_{2m}^{k}}{\sqrt{2n}} \overline{Y(k)} + \frac{\omega_{2m}^{-k}}{\sqrt{2n}} Y(k) = \mathrm{Re} \left\{ \sqrt{\frac{2}{n}} \omega_{2m}^{-k} Y(k) \right\}.
$$

Количество операций для вычисления ДПФ можно оценить как $O(m \log_2 m)$, а значит и вычисление коэффициентов a_k имеет сложность $O(m \log_2 m)$.

2)При n нечетном: Пусть $x = (x(0), \dots, x(n-1)) \in \mathbb{R}^n, n = 2\nu + 1$. Тогда фреймовые коэффициенты можно вычислить следующим образом:

$$
a_k = \langle x, \varphi_k \rangle = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}} + x(j) \cos \frac{2jk\pi}{m} + x(\nu+j) \sin \frac{2jk\pi}{m} \right] =
$$

$$
= \sqrt{\frac{2}{n}} \left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} x(j) \left[\omega_m^{kj} + \omega_m^{-kj} \right] + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{\nu} x(\nu+j) \left[\omega_m^{kj} - \omega_m^{-kj} \right] \right].
$$

Введем обозначение:

$$H(k) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu} x(j)\left[\omega_m^{kj} + \omega_m^{-kj}\right] + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{\nu} x(\nu+j)\left[\omega_m^{kj} - \omega_m^{-kj}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}(x(j) - ix(\nu+j))\omega_m^{kj} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}(x(j) + ix(\nu+j))\omega_m^{-kj}.$$

Обозначим

$$c(k) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}(x(j) - ix(\nu+j))\omega_m^{kj},$$

$$s(k) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}(x(j) + ix(\nu+j))\omega_m^{-kj}.$$

Лекго видеть что $c(k) = \overline{s(k)}$. Значит $H(k) = \mathrm{Re}\ s(k)$. Введем сигнал $y \in \mathbb{C}^m$:

$$y(j) = \begin{cases} x(j) + ix(\nu+j), & j \in 1:\nu; \\ 0, \quad j = 0, j \in \nu+1:m-1. \end{cases}$$

Вычислим ДПФ от сигнала y : $Y(k) = \mathcal{F}_m(y)(k) = s(k)$. Тогда $H(k) = \mathrm{Re}\, Y(k), \quad k \in 0 : m-1$. Так как вычисление сигнала $H(k)$ займет порядка $O(m \log_2 m)$ операций, то и вычисление $a_k = \sqrt{\frac{2}{n}}\left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}} + H(k)\right], \quad k \in 0 : m-1$, имеет такую же сложность. Тем самым получили быстрый алгоритм вычисления фреймовых коффициентов.

3. Доказательство того, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является жёстким фреймом

Теорема. *Для всех $x \in \mathbb{R}^n$ при любом $j \in 0 : n-1$ справедливо равенство*

$$x(j) = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\langle x, \varphi_k\rangle\, \varphi_k(j). \tag{2}$$

Proof. При n нечетном, $n = 2\nu + 1$ ранее были выписаны коэффициенты $a_k = \langle x, \varphi_k\rangle$:

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{n}}\left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}} + \mathrm{Re}\, Y(k)\right], \quad k \in 0 : m-1,$$

где $Y(k) = \mathcal{F}_m(y)(k)$. По формуле обращения

$$y(j) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} Y(k)\omega_m^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$\overline{y(j)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \overline{Y(k)}\omega_m^{-kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Кроме того, при $j = 0$ получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1} Y(k) = my(0) = 0. \tag{5}$$

Сумму в правой части (2) обозначим $S(j)$. При $j = 0$ имеем

$$S(0) = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sqrt{\frac{2}{n}}\left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}} + \mathrm{Re}\, Y(k)\right]\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В силу (4) получаем

$$S(0) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sqrt{2}\frac{x(0)}{\sqrt{2}} = x(0).$$

Пусть $j \in 1:\nu$. Тогда

$$\varphi_k(j) = \sqrt{\frac{2}{n}}\cos\frac{2jk\pi}{m},$$

$$S(j) = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sqrt{\frac{2}{n}}\left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}} + \mathrm{Re}\, Y(k)\right]\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}\left[\omega_m^{kj} + \omega_m^{-kj}\right] =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{Re}\, Y(k)\left[\omega_m^{kj} + \omega_m^{-kj}\right].$$

Представим $\mathrm{Re}\, Y(k) = \frac{1}{2}\left(Y(k) + \overline{Y(k)}\right)$ и воспользуемся (3), (4). Получим $S(j) = \frac{1}{2}\left[y(j) + y(-j) + \overline{y(j)} + \overline{y(-j)}\right]$. При $j \in 1:\nu$ будет: $y(-j) = y(m-j) = 0$, так как $m - j > \nu$. Поэтому $S(j) = \frac{1}{2}\left[y(j) + \overline{y(j)}\right] = \frac{1}{2}\left[x(j) + ix(\nu+j) + x(j) - ix(\nu+j)\right] = x(j)$.

Покажем, что $S(\nu+j)=x(\nu+j)$ при $j\in 1:\nu$. Имеем

$$\varphi_k(\nu+j)=\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\frac{2jk\pi}{m},\quad j\in 1:\nu,\quad k\in 0:m-1,$$

$$S(\nu+j)=\frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sqrt{\frac{2}{n}}\left[\frac{x(0)}{\sqrt{2}}+\operatorname{Re}Y(k)\right]\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{n}}\left[\omega_m^{kj}-\omega_m^{-kj}\right]=$$

$$=\frac{1}{mi}\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{Re}Y(k)\left[\omega_m^{kj}-\omega_m^{-kj}\right].$$

Представим $\operatorname{Re}Y(k)=\frac{1}{2}\Big(Y(k)+\overline{Y(k)}\Big)$ и воспользуемся (3), (4). Получим $S(j)=\frac{1}{2i}\Big[y(j)+\overline{y(-j)}-y(-j)-\overline{y(j)}\Big]$. При $j\in 1:\nu$ будет: $y(-j)=y(m-j)=0$, так как $m-j>\nu$. Поэтому $S(\nu+j)=\frac{1}{2i}\Big[y(j)-\overline{y(j)}\Big]=\frac{1}{2i}\left[x(j)+ix(\nu+j)-x(j)+ix(\nu+j)\right]=x(\nu+j)$.

Аналогично равенство (2) можно доказать и для n четного.

Теорема доказана.

Таким образом получаем: для любого $x\in\mathbb{R}^n$

$$x=\frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\langle x,\varphi_k\rangle\,\varphi_k.$$

Домножим скалярно на x и домножим на $\frac{m}{n}$, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\langle x,\varphi_k\rangle\right)^2=\frac{m}{n}\|x\|^2$$

для любого $x\in\mathbb{R}^n$. Это исходное определение жёсткого фрейма [3]. Таким образом система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является жёстким фреймом.

4. Пример вещественного гармонического фрейма

Пусть $n=2, m=4$, тогда векторы $\varphi_k, k\in 0:3$, имеют координаты $\varphi_k=(\cos\frac{k\pi}{4},\sin\frac{k\pi}{4}), k\in 0:3$. Т.е. $\varphi_0=(1,0)$, $\varphi_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varphi_2=(0,1)$, $\varphi_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Эта система из четырёх векторов образует жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^2$.

5. Избыточность вещественного гармонического фрейма

Определение. *Избыточностью* фрейма $\Phi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется такое число r, что при удалении любых r элементов фрейм остается фреймом, и существует подсистема из $r+1$ векторов, при удалении которой фрейм перестает быть фреймом.

Используем обозначение $R(\Phi) = r$. Очевидно, что $r \le m-n$. Действительно, если удалить больше, чем $m-n$ векторов, то останется меньше n векторов, а они не образуют фрейм.

Теорема. *Избыточность вещественного гармонического фрейма равна $m-n$.*

Proof. Удалим $m-n$ векторов, останется n векторов. Значит, нужно доказать, что при выборе любых n векторов из системы $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$ получается фрейм.

Выберем произвольное подмножество $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \{0, 1, \dots, m-1\}$, где $0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_n \le m-1$. Подсистема $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \dots, \varphi_{k_n}\}$ будет фреймом в $\mathbb{R}^n$, если только она линейно независима, а это будет только если определитель, составленный из векторов $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \dots, \varphi_{k_n}\}$, отличен от нуля. Для того чтобы показать, что определитель отличен от нуля, проделаем ряд элементарных операций над матрицей, составленной из векторов $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \dots, \varphi_{k_n}\}$. Мы не будем учитывать множитель $\sqrt{\frac{2}{n}}$, так как он не влияет на то, будет ли определитель равен нулю или нет.

1) При n четном: перед тем как проделывать операции, покажем, как выглядит j-ая строка матрицы после применения формул Эйлера $\left(\cos\frac{k\pi}{m} = \frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{k} + \omega_{2m}^{-k}\right); \sin\frac{k\pi}{m} = \frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{k} - \omega_{2m}^{-k}\right)\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{k_j} + \omega_{2m}^{-k_j}\right), \frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{3k_j} + \omega_{2m}^{-3k_j}\right), \dots, \frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{(n-1)k_j} + \omega_{2m}^{-(n-1)k_j}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{k_j} - \omega_{2m}^{-k_j}\right), \frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{3k_j} - \omega_{2m}^{-3k_j}\right), \dots, \frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{(n-1)k_j} - \omega_{2m}^{-(n-1)k_j}\right)\right).$$

Умножим последние $\frac{n}{2}$ столбца на i; добавим последние $\frac{n}{2}$ столбца к соответствующим первым $\frac{n}{2}$ столбцам; добавим первые $\frac{n}{2}$ столбца, умноженные на $-\frac{1}{2}$, к соответствующим последним $\frac{n}{2}$ столбцам; и умножим последние $\frac{n}{2}$ столбца на -2.

В результате последовательности таких действий j-ая строка матрицы будет иметь вид:

$$\left(\omega_{2m}^{k_j}, \omega_{2m}^{3k_j}, \dots, \omega_{2m}^{(n-1)k_j}, \omega_{2m}^{-k_j}, \omega_{2m}^{-3k_j}, \dots, \omega_{2m}^{-(n-1)k_j}\right).$$

Вынесение за скобки $\omega_{2m}^{-(n-1)k_j}$ из строки j дает:

$$\left(\omega_{2m}^{nk_j}, \omega_{2m}^{(n+2)k_j}, \ldots, \omega_{2m}^{2(n-1)k_j}, \omega_{2m}^{(n-2)k_j}, \omega_{2m}^{(n-4)k_j}, \ldots, \omega_{2m}^{0k_j}\right).$$

После переупорядочивания колонок матрицы, получаем матрицу Вандермонда:

$$F = \begin{bmatrix} \omega_{2m}^{0}, \omega_{2m}^{2\cdot k_1}, \omega_{2m}^{2\cdot k_1\cdot 2}, \ldots, \omega_{2m}^{2\cdot k_1\cdot(n-1)} \\ \omega_{2m}^{0}, \omega_{2m}^{2\cdot k_2}, \omega_{2m}^{2\cdot k_2\cdot 2}, \ldots, \omega_{2m}^{2\cdot k_2\cdot(n-1)} \\ \cdots \\ \omega_{2m}^{0}, \omega_{2m}^{2\cdot k_n}, \omega_{2m}^{2\cdot k_n\cdot 2}, \ldots, \omega_{2m}^{2\cdot k_n\cdot(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, \omega_{m}^{k_1}, \omega_{m}^{2\cdot k_1}, \ldots, \omega_{m}^{(n-1)\cdot k_1} \\ 1, \omega_{m}^{k_2}, \omega_{m}^{2\cdot k_2}, \ldots, \omega_{m}^{(n-1)\cdot k_2} \\ \cdots \\ 1, \omega_{m}^{k_n}, \omega_{m}^{2\cdot k_n}, \ldots, \omega_{m}^{(n-1)\cdot k_n} \end{bmatrix}.$$

Определитель данной матрицы отличен от нуля: $\det F \neq 0$,

а значит, система $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ является фреймом.

2)При n нечетном:

j-ая строка до преобразований имеет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{2k_j} + \omega_{2m}^{-2k_j}\right), \frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{4k_j} + \omega_{2m}^{-4k_j}\right), \ldots, \frac{1}{2}\left(\omega_{2m}^{(n-1)k_j} + \omega_{2m}^{-(n-1)k_j}\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{2k_j} - \omega_{2m}^{-2k_j}\right), \frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{4k_j} - \omega_{2m}^{-4k_j}\right), \ldots, \frac{1}{2i}\left(\omega_{2m}^{(n-1)k_j} - \omega_{2m}^{-(n-1)k_j}\right)\right).$$

Проделаем аналогичные 1) пункту действия, но относительно матрицы без первого столбца.

В результате последовательности таких действий j-ая строка матрицы будет иметь вид:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \omega_{2m}^{-2k_j}, \omega_{2m}^{-4k_j}, \ldots, \omega_{2m}^{-(n-1)k_j}, \omega_{2m}^{2k_j}, \omega_{2m}^{4k_j}, \ldots, \omega_{2m}^{(n-1)k_j}\right).$$

Первый столбец домножим на $\sqrt{2}$, запишем 1 как ω_{2m}^{0}.

Далее, аналогично 1), выносим за скобки $\omega_{2m}^{-(n-1)k_j}$ из строки j и меняем местами столбцы, получая матрицу Вандермонда. Полученный определитель отличен от нуля, а значит, система $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ является фреймом.

6. Проиллюстрируем данную теорему конкретным примером при $n = 4, m = 6$. Тогда

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{6}, \cos\frac{3k\pi}{6}, \sin\frac{k\pi}{6}, \sin\frac{3k\pi}{6}\right), \quad k \in 0:5.$$

Пусть были удалены φ_2 и φ_4. Тогда система $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_5\}$ является фреймом.

Покажем, что полученная система не является жёстким фреймом. Если система из n единичных векторов в $\mathbb{R}^n$ является жёстким фреймом, то необходимо она является ортонормированным базисом. В данном случае векторы $\varphi_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)^T$ и $\varphi_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ не ортогональны, значит, система$\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_5\}$ не является жёстким фреймом.

Литература

1. **Goyal V. K., J. Kovačevič, Kelner J. A.** Quantized frame expansions with erasures // *Applied and computational harmonic analysis.* 2001. V. 10. P. 203–233.

2. **Малозёмов В.Н., Машарский С.М.** Основы дискретного гармонического анализа. Часть первая. С.-Петербург. 2003.

3. **Малозёмов В.Н., Певный А.Б.** Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы //Семинар «DHA & CAGD».`http://dha.spb.ru/` Избранные доклады. 28 февраля 2007.

4. **P.G.Casazza, N.Leonhard.** The known equal norm Parseval frames as of 2005 // Preprint. `http://www.math.missouri.edu/ ~pete/`

Summary

Duriagin A.M. Real harmonic frames, toughness and redundancy

It was proved that real harmonic frames possess maximal redundancy, i.e. if any $m - n$ vectors are deleted then remaining n vectors form frame in $\mathbb{R}^n$ (in the general case, it is not tight frame). The fast frame expansion algorithm is offered.

Сыктывкарский университет *Поступила 13.12.2007*