Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЖЕСТКОГИБКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ЖУРАВСКОГО

Е.И. Михайловский

Строится нелинейная теория жесткогибких оболочек, учитывающая изменение толщины по схеме, предложенной К.Ф. Черных [1]. Однако в отличие от теории, построенной в работе [1], принимаются во внимание вариации параметров, характеризующих изменение толщины оболочки. С тем, чтобы иметь возможность оценить погрешность, связанную с невыполнением граничных условий на лицевых поверхностях оболочки при учете поперечных сдвигов по модели С.П. Тимошенко [2], наряду с последней рассматривается модель Д.И. Журавского и её вариант. Дается обобщение на теорию оболочек типа Журавского быстрого алгортма [3] (т. н. $\mathfrak{M}$-алгоритма) уточнения линейных или частично линеаризированных кирхгофовских вариантов теории оболочек за счет учета трансверсальных деформаций. В качестве примера выполнено уточнение с примененнием $\mathfrak{M}$-алгоритма уравнений теории пологих оболочек Маргера [4].

Используемые обозначения совпадают в основном с принятыми в монографии [5].

0. Введение

В работе [1] предложена нелинейная теория оболочек, ориентированная на расчет тонкостенных изделий из резиноподобных материалов. В этой теории сохранены все гипотезы Кирхгофа за исключением допущения о продольной недеформируемости нормального элемента, в связи с чем будем её называть *квазикирхгофовской.* Таким образом, квазикирхгофовская теория учитывает изменение толщины оболочки, что для резиноподобных материалов может составлять "разы".

Исторически сложилось так, что расчет тонкостных изделий из резиноподобных материалов находился как бы в стороне от магистрального направления развития теории оболочек, в которой под последними, как правило, подразумевались оболочки из твердых материалов. Ярким подтверждением этому служит энциклопедическое издание [6], в котором на 2229 страницах не нашлось места для оболочек из резиноподобных материалов. Гавная особенность названных материалов. заключается в том,что они допускают большие упругие деформации, а изделия из таких материалов предназначены именно для работы в области больших деформаций.

Основное геометрическое допущение, принятое при рассмотрении квазикирхгофовской теории оболочек, заключается в том, что радиус-вектор материальной точки исходной конфигурации

$$\mathring{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha) + \xi\mathring{\mathbf{n}}(\alpha) \tag{0.1}$$

(где $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ – гауссовы координаты срединной поверхности оболочки, ξ – трансверсальная координата материальной точки: $\xi \in$ $\in [-1/2\mathring{h},\ 1/2\mathring{h}]$; нуликами здесь и ниже помечаются величины, относящиеся к исходной конфигурации)
в результате деформации оболочки переходит в следующий ("c" – Chernykh):

$$\overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha) + \mathbf{u}(\alpha) + \lambda_\xi(\alpha)(\xi + 1/2\xi^2 æ_\xi(\alpha))\mathbf{n}(\alpha) \tag{0.2}$$

На основе аппроксимации (0.2) имеем

$$\overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, 1/2\mathring{h}) - \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, -1/2\mathring{h}) = \lambda_\xi \mathring{h}\mathbf{n}. \tag{0.3}$$

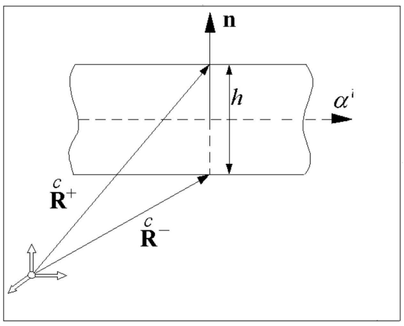

Рис. 0.1.

С другой стороны, в соответствии с рис. 0.1 можно записать

$$\overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, 1/2\mathring{h}) - \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha, -1/2\mathring{h}) = h\mathbf{n}. \tag{0.4}$$

Сравнивая соотношения (0.3) и (0.4), убеждаемся, что

$$\lambda_\xi = h/\mathring{h}, \tag{0.5}$$

т. е. λ_ξ является кратностью изменения толщины оболочки в результате её деформирования.

Нетрудно сообразить, что $æ_\xi$ характеризует неравномерность поперечного растяжения (сжатия) оболочки по её толщине. В соответствии со сложившейся терминологией (см., например, [7]) величины $\lambda_\xi, æ_\xi$ будем называть *параметрами поперечного обжатия*. Принципиальное отличие параметров $\lambda_\xi, æ_\xi$ от компонент вектора перемещения, точки срединной поверхности

$$\mathbf{u} = u_\nu \mathring{\mathbf{r}}^\nu + w\mathring{\mathbf{n}} = u^\mu \mathring{\mathbf{r}}_\mu + w\mathring{\mathbf{n}}$$

заключается в том, что последние имеют независимые вариации, через которые могут быть выражены вариации параметров поперечного обжатия, т.е.

$$\delta\lambda_\xi = f_1(\delta u_1, \delta u_2, \delta w), \quad \delta æ_\xi = f_2(\delta u_1, \delta u_2, \delta w). \tag{0.7}$$

Это связано с тем, что параметры $\lambda_\xi, æ_\xi$ определяются из некоторых дополнительных условий (см. ниже) и тем самым не влияют на число и порядок дифференциальных уравнений.

Попытки уточнить теорию оболочек за счет отказа от геометрических гипотез Кирхгофа предпринимались неоднократно разными авторами. При этом большинство работ основано на учете поперечных сдвигов по модели Тимошенко [8], отсюда – теории типа Тимошенко. Для учета поперечных сдвигов по названной модели можно воспользоваться линейной аппроксимацией тангенциальных перемещений по толщине оболочки

$$u_i^\xi(\alpha, \xi) = u_i(\alpha) + \xi v_i(\alpha), \quad i = 1, 2. \tag{0.8$_1$}$$

В наиболее часто цитируемых работах [9, 10] принят линейный закон изменения по толщине и для нормального перемещения (прогиба)

$$w^\xi(\alpha, \xi) = w(\alpha) + \xi\lambda_\xi(\alpha). \tag{0.8$_2$}$$

Тем самым делается попытка учесть кроме поперечных сдвигов и поперечное обжатие, так как независимыми считаются все шесть вариаций:

$$\delta u_i, \quad \delta w, \quad \delta v_i, \quad \delta\lambda_\xi, \quad i = 1, 2. \tag{0.9}$$

При этом даже при отсутствии поперечных сдвигов вариационный вывод уравнений равновесия приводит к дополнительному по сравнению с квазикирхгофовской теорией уравнению в виде приравненного к нулю множителя при $\delta\lambda_\xi$ и, как следствие,– к повышению порядка системы уравнений.

Что касается учета поперечного обжатия с использованием допущения $(0.8)_2$, то, как позже признал К.З. Галимов в обзорной статье [11], этот подход оказался несостоятельным из-за того, что при малых тангенциальных поворотах (вокруг нормали) он приводит к неотрицательному изменению толщины ($\lambda_\xi \geq 1$). В результате сказанного автор работ [10, 11] пришел к выводу, что для адекватного учета поперечного обжатия функция $w^{\xi}(\alpha, \xi)$ должна аппроксимироваться, как минимум, квадратичной параболой. Именно такой закон изменения $w^{\xi}(\alpha, \xi)$ следует из допущения (0.2), принятого в работе [1], а еще раньше применительно к линейной теории оболочек использовался П. Нагди [12].

Для автора данной работы вывод о неадекватности линейной аппроксимации $(0.8)_2$ очевидно следует из того, что она не позволяет удовлетворить статическим граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки

$$J\sigma^{33}(1/2\mathring{h}) = q_n^{+}, \quad J\sigma^{33}(-1/2\mathring{h}) = q_n^{-}. \qquad (0.10)$$

Как уже отмечалось, К. Ф. Черных разрабатывал квазикирхгофовскую теорию оболочек, исходя из потребностей рассчитывать резинотехнические изделия оболочечного типа. Однако построена эта теория как общая для оболочек из сжимаемых и несжимаемых материалов в силу того, что определяющие уравнения выражены через упругий потенциал с использованием его разложения в ряд по трансверсальной координате. Воспользовавшись, например, упругим потенциалом неогуковского материала (см., например, [5]), можно получить систему нелинейных уравнений механики мягкогибких оболочек, т. е. допускающих конечные перемещения как за счет конечных углов поворта, так и за счет конечных деформаций. Если же взять упругий потенциал теоретического стандартного материала 2-го порядка (см., например, [5]), то можно построить нелинейную теорию жесткогибких оболочек, допускающих конечные перемещения за счет конечных углов поворота при относительно малых деформациях.

Еще одно важное замечание в адрес квазикирхгофовской теории. Линеаризируя уравнения этой теории применительно к тонкой плоской пластине, придем к разрешающему уравнению С. Жермен-Лагранжа, хотя известно, что при учете поперечного обжатия должно получиться названное уравнение с дополнительным нагрузочным слагаемым вида $\alpha h_{\lambda}^{2}\Delta q_n$ (подробнее см. ниже). Отсутствие такого слагаемого связано с неучетом работы внешних сил на перемещениях поперечной деформации и является следствием невариационного вывода уравнений равновесия. В работах [13, 14] показано, что учет зависимых вариаций $\delta\lambda_{\xi}, \delta æ_{\xi}$ снимает это противоречие.

Теперь об учете поперечных сдвигов. Очевидно, что для тонких жесткогибких оболочек поперечные сдвиги малы, и поэтому представляется естественным (во всяком случае, на первом этапе) учитывать их в линейном приближении. Соответствующая теория предложена в работе [15] с использованием аппроксимации

$$\mathbf{R}(\alpha,\xi) = \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) + \xi\psi_\beta(\alpha)\mathbf{r}^\beta = \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) + \xi\psi_\beta(\alpha)\mathring{\mathbf{r}}^\beta. \qquad (0.11)$$

Недостаток этой теории, как и построенной год спустя более общей теории [16], заключается в неадекватном учете поперечного обжатия, т. е. в неучете вариаций $\delta\lambda_\xi, \delta æ_\xi$. Свободная от этого недостатка теория жесткогибких оболочек типа Тимошенко опубликована в монографии [2]. С использованием этой теории на основании численного эксперимента выявлена схема влияния поперечных сдвигов, учитываемых по модели Тимошенко, на напряженное состояние оболочки. Показано [17], что при нагрузках, близких к сосредоточенным, графики изгибающих моментов от изменения кривизны срединой поверхности и от тангенциального изменения поперечных сдвигов находятся в противофазах в области максимальных абсолютных значений тех и других моментов. При этом относительное снижение абсолютной величины моментов кирхгофовской теории может многократно превышать оценку погрешности этой теории, данную в работах [18, 19]. Иными словами, критерий Новожилова-Финкельштейна оценки погрешности гипотез Кирхгофа перестает "работать" при нагрузках, близких к сосредоточенным. Сказанным, в частности, подтверждается вывод, к которому пришел А. Л. Гольденвейзер при асимптотическом построении двумерной теории оболочек [20]: оценка, данная в работе [19], является справедливой для НДС с не слишком большой изменяемостью.

Однако максимальные напряжения от изгиба срединной поверхности реализуются у лицевых поверхностей оболочки, где сдвиговая модель Тимошенко вступает в противоречие с граничными условиями, например, отсутствия тангенциальной поверхностной нагрузки. Это обстоятельство делает целесообразным построение теории оболочек, учитывающей поперечные сдвиги по модели Д. И. Журавского и последующего проведения численных экспериментов, с тем чтобы выявить "цену" названого противоречия.

1. Основные допущения. Соотношения упругости

Рассмотрим изгиб тонкой жесткогибкой оболочки с учетом трансверсальных деформаций. В качестве основного геометрического допущения примем предположение о том, что радиус-вектор оболочки (0.1) в результате деформации последней переходит в следующий (см. (0.2)):

$$\mathbf{R}(\alpha,\xi) = \overset{c}{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) + \varphi(\xi)\psi_\beta(\alpha)\mathbf{r}^\beta. \qquad (1.1)$$

Относительно функции $\varphi(\xi)$, характеризующей закон распределения поперечных сдвигов ψ_i по толщине оболочки, предполагаем, что она удовлетворяет условиям

$$\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi), \quad \varphi'(0) = 1 \qquad (1.2)$$

Конкретно будем рассматривать следующие представления этой функции:

$\varphi_1(\xi) = \xi$ (теория типа Тимошенко);

$\varphi_2(\xi) = \xi - \dfrac{4}{3\mathring{h}^2}\xi^3$ (теория типа Журавского);

$\varphi_3(\xi) = \dfrac{\mathring{h}}{\pi}\sin\dfrac{\pi\xi}{\mathring{h}}$ (вариант теории типа Журавского);

Кроме (1.1) будем использовать допущения:

(α) оболочка является тонкой и остается таковой в процессе деформирования, т.е.

$$\xi\mathring{b}_{ij}/\sqrt{\mathring{a}_{ii}\mathring{a}_{jj}} << 1, \quad \xi b_{ij}/\sqrt{a_{ii}a_{jj}} << 1$$

(a_{ij}, b_{ij} – компоненты метрического тензора и тензора кривизны срединной поверхности);

(β) тангенциальные компоненты тензора Грина-Лагранжа изменяются по толщине оболочки линейно;

(γ) поперечные сдвиги ψ_i, $i = 1, 2$ учитываются по линейной теории;

(δ) локальной изменяемостью функции $\lambda_\xi(\alpha)$ можно пренебрегать.

На основании аппроксимации (1.1) с учетом допущений $(\alpha), (\beta)$ придем к следующим приближенным формулам для компонент метрического тензора актуальной конфигурации оболочки:

$$g_{ij} = \partial_i\mathbf{R}\cdot\partial_j\mathbf{R} = a_{ij} - 2\xi\lambda_\xi b_{ij} + \xi(\nabla_i\psi_j + \nabla_j\psi_i),$$

$$g_{i3} = \varphi'(\xi)\psi_i, \quad g_{33} = \lambda_\xi^2(1 + 2\xi æ_\xi),$$

где $a_{ij} = \partial_i\mathbf{r}\cdot\partial_j\mathbf{r}$, $b_{ij} = \mathbf{n}\cdot\partial_j\partial_i\mathbf{r}$, $\nabla_i\psi_j$–ковариантная производная: $\nabla_i\psi_j = \partial_i\psi_j - \Gamma_{ij}^\alpha\psi_\alpha$.

Принимая во внимание соответствующие соотношения для исходной конфигурации

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{a}_{ij} - 2\xi\mathring{b}_{ij}, \quad \mathring{g}_{i3} = 0, \quad \mathring{g}_{33} = 1,$$

получим следующие формулы для компонент тензора Грина-Лагранжа:

$$\gamma^{\xi}_{ij} = \tfrac{1}{2}(g_{ij} - \mathring{g}_{ij}) = \gamma_{ij} + \xi(æ_{ij} + \mu_{ij}), \quad i,j = 1,2;$$

$$\gamma^{\xi}_{i3} = \tfrac{1}{2}\,\varphi'(\xi)\psi_i, \quad \gamma^{\xi}_{33} = \tfrac{1}{2}(\lambda^2_{\xi} - 1) + \xi\lambda^2_{\xi}æ_{\xi}, \tag{1.3}$$

где

$$\gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(a_{ij} - \mathring{a}_{ij}), \ æ_{ij} = -\lambda_{\xi} b_{ij} + \mathring{b}_{ij},$$

$$\mu_{ij} = \tfrac{1}{2}(\nabla_i\psi_j + \nabla_j\psi_i) \approx \tfrac{1}{2}(\mathring{\nabla}_j\psi_i + \mathring{\nabla}_i\psi_j). \tag{1.3$'$}$$

□ Для описания напряженно-деформированного состояния жесткогибкой оболочки в условиях геометрической нелинейности обычно используют упругий закон для теоретического стандартного материала 2-го порядка (STM-2), несправедливо, по мнению автора, называя его законом Гука [9, 10]. С позиции тензорной алгебры упругий закон для STM-2 предполагает подобие девиаторов 1-го и 2-го уровней соосных тензоров Пиолы-Кирхгофа ($\mathring{\mathbf{\Pi}}$) и Грина-Лагранжа ($\mathring{\mathbf{\Gamma}}$) [5]

$$\mathring{\mathbf{\Pi}}_i = 2\mu\mathring{\mathbf{\Gamma}}_i, \quad i = 1,2 \tag{1.4}$$

и имеет вид

$$\mathring{\mathbf{\Pi}} = 2\mu\mathring{\mathbf{\Gamma}} + \lambda I_{\mathring{\Gamma}}\mathbf{1}, \tag{1.5}$$

где упругие константы $\lambda, \ \mu$ связаны с первыми инвариантами тензоров $\mathring{\mathbf{\Pi}}, \mathring{\mathbf{\Gamma}}$ и вторыми инвариантами их девиаторов $\mathring{\mathbf{\Pi}}_i, \mathring{\mathbf{\Gamma}}_i$ формулами

$$\lambda = \frac{1}{3}\Big(\frac{I_{\mathring{\Pi}}}{I_{\mathring{\Gamma}}} - \frac{II_{\mathring{\Pi}_i}}{II_{\mathring{\Gamma}_i}}\Big), \quad \mu = \frac{1}{2}\frac{II_{\mathring{\Pi}_i}}{II_{\mathring{\Gamma}_i}} \tag{1.6}$$

Напомним, что закон Гука имеет вид

$$\mathbf{\Sigma} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda I_E\mathbf{1},$$

где $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{E}$ – тензоры номинальных [21] (обобщенных [22]) напряжений и малых деформаций Коши. Учитывая, что

$$\lim_{\mathring{\mathbf{\Gamma}}\to\mathbf{E}} \mathring{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Sigma},$$

параметры $\lambda, \ \mu$ (см. (1.6)) являются упругими константами Ламе, связанными с модулем Юнга (E) и коэффициентом Пуассона (ν) формулами

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \ . \ \blacksquare$$

В условиях принятых выше допущений и обозначений упругий закон для оболочки, условно изготовленной из стандартного материала 2-го порядка, можно записать в виде [21]

$$
\begin{gathered}
J\sigma^{ij} = (\lambda \mathring{a}^{ij}\mathring{a}^{\alpha\beta} + 2\mu \mathring{a}^{i\alpha}\mathring{a}^{j\beta})\gamma^{\xi}_{\alpha\beta} + \lambda \mathring{a}^{ij}\gamma^{\xi}_{33}, \\
J\sigma^{33} = \lambda \mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma^{\xi}_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu)\gamma^{\xi}_{33}, \\
J\sigma^{i3} = \mu\varphi^{'}(\xi)\mathring{a}^{i\beta}\psi_{\beta}, \quad J = dV/d\mathring{V}.
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Параметры $\lambda_\xi, æ_\xi$ определяем из граничных условий (0.10). После несложных преобразований получим

$$
\begin{gathered}
\lambda_\xi^2 = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\,\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \underline{\frac{2m_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}}} \quad , \\
\lambda_\xi^2 æ_\xi = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\,\mathring{a}^{\alpha\beta}(æ_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta}) + \underline{\frac{q_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}}} \quad ,
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

где

$$
q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = \tfrac{1}{2}\mathring{h}(q_n^+ + q_n^-). \tag{1.8$'$}
$$

Исключив параметры λ_ξ, $æ_\xi$ из соотношений $(1.3)_3$ и $(1.7)_2$, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\gamma^{\xi}_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\,\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma^{\xi}_{\alpha\beta} + \underline{\frac{m_n + \xi q_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}}}, \\
J\sigma^{33} = \underline{\frac{1}{\mathring{h}}(m_n + \xi q_n)}.
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

Усилия и моменты вводим следующим образом:

$$
\begin{gathered}
S^{ij} = \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (J\sigma^{ij} - \underline{\frac{\nu}{1-\nu} J\sigma^{33}\mathring{a}^{ij}}\,)\, d\xi, \\
M^{ij} = \lambda_\xi \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (J\sigma^{ij} - \underline{\frac{\nu}{1-\nu} J\sigma^{33}\mathring{a}^{ij}}\,)\, \xi d\xi, \\
T^{i}_{\cdot n} = \lambda_\xi \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} J\sigma^{i3}\, d\xi.
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

(Заметим, что при использовании статической гипотезы Кирхгофа в "жесткой форме"

$$J\sigma^{33} \approx J\sigma^{33}_{\circ} + \xi J\sigma^{33}_{1} = 0$$

для определения параметров поперечного обжатия λ_ξ, $æ_\xi$, как это сделано, например, в работе [1], подчеркнутые в формулах (1.8)–(1.10) слагаемые исчезают.)

На основании соотношений (1.7), (1.9), (1.10) определяющие уравнения упругости для жестогибкой оболочки можно записать в виде

$$S^{ij} = c_\circ A^{ij,\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}, \quad M^{ij} = \overset{w}{M}{}^{ij} + \overset{\psi}{M}{}^{ij},$$
$$\overset{w}{M}{}^{ij} = \lambda_\xi d_\circ A^{ij,\alpha\beta} æ_{\alpha\beta}, \quad \overset{\psi}{M}{}^{ij} = d_\circ A^{ij,\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta},$$
$$T^{i}_{\cdot n} = 2\mu\varphi(\mathring{h}/2)\psi^i, \tag{1.11}$$

или (обратные соотношения)

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E\mathring{h}} A_{ij,\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad æ_{ij} = \frac{1}{Eh\mathring{h}^2} A_{ij,\alpha\beta} \overset{w}{M}{}^{\alpha\beta},$$
$$\mu_{ij} = \frac{12}{E\mathring{h}^3} A_{ij,\alpha\beta} \overset{\psi}{M}{}^{\alpha\beta}, \quad \psi^i = \frac{1+\nu}{E\varphi(\mathring{h}/2)} T^{i}_{\cdot n}, \tag{1.11$'$}$$

где

$$A^{ij,\alpha\beta} = \mathring{a}^{i\alpha}\mathring{a}^{j\beta} + \nu\mathring{c}^{i\alpha}\mathring{c}^{j\beta}, \quad A_{ij,\alpha\beta} = \mathring{a}_{i\alpha}\mathring{a}_{j\beta} + \nu\mathring{c}_{i\alpha}\mathring{c}_{j\beta};$$

$\mathring{c}^{ik}$, $\mathring{c}_{ik}$– соответственно контравариантная и ковариантная компоненты дискриминантного тензора поверхности: $\mathring{c}^{ik} = (\mathring{\mathbf{r}}^i \times \mathring{\mathbf{r}}^k)\cdot\mathring{\mathbf{n}}$, $\mathring{c}_{ik} = (\mathring{\mathbf{r}}_i \times \times\mathring{\mathbf{r}}_k)\cdot\mathring{\mathbf{n}}$; $c_\circ, d_\circ$– тангенциальная и изгибная жесткости оболочки:

$$c_\circ = \frac{E\mathring{h}}{(1-\nu^2)}, \quad d_\circ = \frac{E\mathring{h}^3}{12(1-\nu^2)}.$$

2. Вывод уравнений равновесия на основе принципа Лагранжа

Полагая для упрощения записи, что нагрузка на боковую поверхность отсутствует, вариационное уравнение Лагранжа можно записать так:

$$\delta U = A(\delta\mathbf{R}), \tag{2.1}$$

где

$$\delta U = \int_{\mathring{\Omega}} \Big(\int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} \delta\Phi \, d\xi \Big) \, d\mathring{\Omega},$$

$$\delta\Phi = \mathring{\mathbf{\Pi}} : \delta\mathring{\mathbf{\Gamma}} = J\sigma^{\alpha\beta}\delta\gamma^{\xi}_{\alpha\beta} + 2J\sigma^{\alpha 3}\delta\gamma^{\xi}_{\alpha 3} + J\sigma^{33}\delta\gamma^{\xi}_{33};$$

$$A(\delta\mathbf{R}) = \int_{\Omega}(\mathbf{q}^{+}\cdot\delta\mathbf{R}^{+} - \mathbf{q}^{-}\cdot\delta\mathbf{R}^{-})\,d\Omega. \tag{2.2}$$

С использованием формул (1.3), (1.9) и (1.10) получаем

$$\delta U = I_1 + I_2. \tag{2.3}$$

где

$$I_1 = \int_{\mathring{\Omega}}(S^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + \lambda_{\xi}^{-1}M^{\alpha\beta}\delta æ_{\alpha\beta})\,d\mathring{\Omega}; \tag{2.4$_1$}$$

$$I_2 = \int_{\mathring{\Omega}}(M^{\alpha\beta}\delta\mu_{\alpha\beta} + \frac{\mathring{h}}{2\varphi(\mathring{h}/2)k}T^{\alpha}_{\cdot n}\delta\psi_{\alpha})\lambda_{\xi}^{-1}\,d\mathring{\Omega}; \tag{2.4$_2$}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\mathring{h}}\int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}\varphi'^{2}(\xi)d\xi = \begin{cases} 1 & \text{(теория типа Тимошенко)} \\ \dfrac{8}{15} & \text{(теория типа Журавского)} \\ \dfrac{1}{2} & \text{(вариант теории типа Журавского).} \end{cases} \tag{2.4$_3$}$$

Преобразуем интеграл I_1. Прежде всего в силу симметрии S^{ij} имеем

$$S^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}S^{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta} + \mathbf{r}_{\beta}\cdot\delta\mathbf{r}_{\alpha}) = S^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta}. \tag{2.5}$$

Далее на основании соотношений (1.8) справедливы следующие формулы для вариаций параметров поперечного обжатия:

$$\delta\lambda_{\xi} = -\frac{\nu}{1-\nu}\,\mathring{a}^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_{\beta},$$

$$\delta(\lambda_{\xi}æ_{\xi}) = -\frac{\nu}{1-\nu}\,\mathring{a}^{\alpha\beta}(\delta æ_{\alpha\beta} + \delta\mu_{\alpha\beta}). \tag{2.6}$$

Принимая во внимание формулы $(2.6)_1$ и $(1.3)_1$, получаем

$$\delta æ_{\alpha\beta} = -\lambda_{\xi}\underline{\delta b_{\alpha\beta}} + \frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{\nu\mu}b_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_{\mu}. \tag{2.7}$$

Применяя формулы ковариантного дифференцирования базисных векторов, находим

$$\underline{\underline{\nabla_{\alpha}\delta\mathbf{r}_{\beta}}} = \delta(\partial_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\delta\mathbf{r}_{\nu} = \delta(\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\nu}) +$$

$$+\delta(b_{\alpha\beta}\mathbf{n}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\delta\mathbf{r}_{\nu} = \delta(b_{\alpha\beta}\mathbf{n}) + \mathbf{r}_{\nu}\delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta},$$

где Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля 2-го рода для деформированной поверхности: $\Gamma^k_{ij} = \partial_j \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^k$.
На основании этого соотношения имеем

$$\nabla_\alpha(\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r}_\beta) = \delta\mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\nabla_\alpha \delta\mathbf{r}_\beta}} =$$

$$= -b^\nu_\alpha \mathbf{r}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\beta + \underline{\delta b_{\alpha\beta}}. \tag{2.8}$$

Формула (2.7) с учетом соотношения (2.8) принимает вид

$$\delta æ_{\alpha\beta} = -\lambda_\xi \nabla_\alpha(\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r}_\beta) = \lambda_\xi b^\nu_\alpha \mathbf{r}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\beta +$$

$$+ \frac{\nu}{1-\nu} b_{\alpha\beta} \mathring{a}^{\nu\mu} \mathbf{r}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\mu. \tag{2.9}$$

С учетом равенств (2.5) и (2.9) интеграл $(2.4)_1$ приводится к следующему виду:

$$I_1 = \int_{\mathring{\Omega}} [T^{\beta\alpha} \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_\beta - M^{\alpha\beta} \nabla_\alpha(\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r}_\beta)]\, d\mathring{\Omega}, \tag{2.10}$$

где (сравни с формулой (11.36) [21])

$$T^{ij} = S^{ij} - b^j_\alpha M^{i\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_\xi^{-1} \mathring{a}^{ij} b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \neq T^{ji}. \tag{2.10$'$}$$

Ниже будут использоваться формулы интегрирования по частям, связанные как с исходной, так и с актуальной конфигурациями срединной поверхности оболочки [5]

$$\int_{\mathring{\Omega}} u^\beta \partial_\beta v\, d\mathring{\Omega} = -\int_{\Omega(\alpha)} \partial_\beta(\sqrt{\mathring{a}} u^\beta) v\, d\alpha^1 d\alpha^2 + \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\beta u^\beta v\, d\mathring{s}_t; \tag{2.11$_1$}$$

$$\int_{\mathring{\Omega}} t^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta\, d\mathring{\Omega} = \int_{\Omega(\alpha)} \mathcal{A} \nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1} t^{\alpha\beta}) u_\beta\, d\mathring{\Omega} + \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\alpha t^{\alpha\beta} u_\beta\, d\mathring{s}_t. \tag{2.11$_2$}$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{dS}{d\mathring{S}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mathring{a}}}, \quad \mathring{a} = \mathring{a}_1 \mathring{a}_2, \quad a = a_1 a_2 - a_{12}^2. \tag{2.11$'$}$$

Применяя формулы (2.11), получаем

$$I_{11} \triangleq \int_{\mathring{\Omega}} T^{\beta\alpha} \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \delta\mathbf{r}\, d\mathring{\Omega} =$$

$$= -\int_{\Omega(\alpha)} \partial_\beta(\sqrt{\mathring{a}}T^{\beta\alpha}\mathbf{r}_\alpha) \cdot \delta\mathbf{r}\, d\alpha^1 d\alpha^2 + J_1,$$

$$I_{12} \triangleq -\int_{\mathring{\Omega}} M^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta)\, d\mathring{\Omega} =$$

$$= \int_{\Omega(\alpha)} \mathcal{A}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}M^{\alpha\beta})\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta\, d\mathring{\Omega} + J_2. \tag{2.12}$$

Здесь

$$J_1 = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\alpha T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta \cdot \delta\mathbf{r}\, d\mathring{s}_t,$$

$$J_2 = -\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\alpha M^{\alpha\beta}\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta\, d\mathring{s}_t. \tag{2.12$'$}$$

Далее с помощью формулы $(2.11)_1$ можно убедиться в том, что

$$I_{12} = -\int_{\Omega(\alpha)} \partial_\beta[\sqrt{a}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}M^{\alpha\beta})\mathbf{n}]\cdot\delta\mathbf{r}\, d\alpha^1 d\alpha^2 +$$

$$+ J_2 + J_3, \tag{2.13}$$

где

$$J_3 = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\beta \mathcal{A}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}M^{\alpha\beta})\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\, d\mathring{s}_t. \tag{2.13$'$}$$

Итак, на основании формул (2.10), (2.12), (2.13) первое слагаемое в формуле (2.3) можно представить в виде

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = J_1 + J_2 + J_3 -$$

$$-\int_{\Omega(\alpha)} \partial_\beta[\sqrt{\mathring{a}}T^{\beta\alpha}\mathbf{r}_\alpha + \sqrt{a}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}M^{\alpha\beta})\mathbf{n}]\cdot\delta\mathbf{r}\, d\alpha^1 d\alpha^2. \tag{2.14}$$

Рассмотрим теперь интеграл из $(2.4)_2$. Прежде всего имеем

$$M^{\alpha\beta}\delta\mu_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}M^{\alpha\beta}(\delta\nabla_\alpha\psi_\beta + \delta\nabla_\beta\psi_\alpha) = M^{\alpha\beta}\delta\nabla_\alpha\psi_\beta =$$

$$= M^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\delta\psi_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\delta\psi_\gamma - \psi_\gamma\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) =$$

$$= M^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\delta\psi_\beta - \underline{M^{\alpha\beta}\psi_\gamma\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}\,. \tag{2.15}$$

Подчеркнутым в (2.15) слагаемым пренебрегаем в соответствии с допущением (γ).

С учетом (2.15) преобразуем интеграл, связанный с первым слагаемым в $(2.4)_2$. На основании формулы $(2.11)_2$ получаем

$$\int_{\mathring{\Omega}} \lambda_\xi^{-1} M^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta\psi_\alpha \, d\mathring{\Omega} =$$

$$= -\int_{\mathring{\Omega}} \mathcal{A} \nabla_\beta (\lambda_\xi^{-1} \mathcal{A}^{-1} M^{\alpha\beta}) \delta\psi_\alpha \, d\mathring{\Omega} + K_1.$$

Таким образом, второму слагаемому в формуле (2.3) в соответствии с допущением (δ) можно придать вид

$$I_2 = \int_{\mathring{\Omega}} [-\mathcal{A}\nabla_\beta(\mathcal{A}^{-1}M^{\alpha\beta}) + \frac{\mathring{h}}{2\varphi(\mathring{h}/2)k} T^{\alpha}_{\cdot n}] \delta\psi_\alpha \lambda_\xi^{-1} \, d\mathring{\Omega} + K_1, \tag{2.16}$$

где

$$K_1 = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\alpha M^{\alpha\beta} \delta\psi_\beta \lambda_\xi^{-1} \, d\mathring{s}_t. \tag{2.17}$$

Преобразуем далее правую часть вариационного уравнения (2.1). Вводя обозначения (частично уже использовавшиеся ранее, см. (1.8′))

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- = q^\alpha \mathbf{r}_\alpha + q_n \mathbf{n},$$

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}\mathring{h}(\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^-) = m^\alpha \mathbf{r}_\alpha + m_n \mathbf{n},$$

на основании (1.2) получаем

$$\mathbf{q}^+ \cdot \delta\mathbf{R}^+ - \mathbf{q}^- \cdot \delta\mathbf{R}^- = \mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{r} + {}^1\!/_8 \mathring{h}^2 q_n \delta(\lambda_\xi æ_\xi) +$$

$$+ m_n \delta\lambda_\xi - \lambda_\xi m^\alpha \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha - {}^1\!/_8 \mathring{h}^2 \lambda_\xi æ_\xi q^\alpha \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha +$$

$$+ {}^2\!/_{\mathring{h}}\, \varphi({}^{\mathring{h}}\!/_2) m^\alpha \delta\psi_\alpha + {}^2\!/_{\mathring{h}}\, \varphi({}^{\mathring{h}}\!/_2) \psi^\alpha \mathbf{m} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha. \tag{2.18}$$

Второму слагаемому правой части равенства (2.18) с учетом соотношения $(2.6)_2$, (2.9) можно придать вид

$${}^1\!/_8 \mathring{h}^2 q_n \delta(\lambda_\xi æ_\xi) = h_\lambda^2 q_n \mathring{a}^{\alpha\beta} [\lambda_\xi \nabla_\alpha (\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r}_\beta) -$$

$$- \nabla_\alpha \delta\psi_\beta + \lambda_\xi b_\alpha^\nu \mathbf{r}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\beta - \underline{\frac{\nu}{1-\nu} b_{\alpha\beta} \mathring{a}^{\nu\mu} \mathbf{r}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\mu}], \tag{2.19}$$

где

$$h_\lambda^2 = \frac{\nu \mathring{h}^2}{8(1-\nu)}. \tag{2.19'}$$

Можно убедиться, что подчеркнутые в (2.19) слагаемые в силу допущения (α) малы по сравнению со слагаемым $q_n\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}$ (см. (2.12)) и поэтому ниже не учитываются.

На основании сказанного выражению для работы внешних сил на вариациях отвечающих им перемещений можно придать вид

$$A(\delta\mathbf{R}) = \int_{\Omega(\alpha)} \{\tilde{\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{r} + [h_\lambda^2\nabla_\alpha(\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n) +$$

$$\underline{+{}^2\!/_{\mathring{h}}\,\varphi({}^{\mathring{h}}\!/_2)m^\beta}]\delta\psi_\beta\}\sqrt{a}\,d\alpha^1 d\alpha^2 + \sum_{k=4}^{9} J_k + K_2, \tag{2.20}$$

где

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \frac{\lambda_\xi h_\lambda^2}{\sqrt{a}}\partial_\alpha[\sqrt{a}\nabla_\beta(\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n)\mathbf{n}] + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha(\sqrt{a}m_n\mathring{a}^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta) +$$

$$\underline{+\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\{\sqrt{a}\,[{}^1\!/_8\mathring{h}^2\lambda_\xi æ_\xi q^\alpha\mathbf{n} + \lambda_\xi m^\alpha\mathbf{n} - {}^2\!/_{\mathring{h}}\,\varphi({}^{\mathring{h}}\!/_2)\psi^\alpha\mathbf{m}]\}}; \tag{2.21$_1$}$$

$$J_4 = -h_\lambda^2\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \lambda_\xi\mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha\nabla_\beta(\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n)\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\mathring{s}_t,$$

$$J_5 = h_\lambda^2\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \lambda_\xi\mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}_\beta\,d\mathring{s}_t,$$

$$J_6 = -\frac{\nu}{1-\nu}\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{a}^{\alpha\beta}m_n\mathbf{r}_\beta\cdot\delta\mathbf{r}\,d\mathring{s}_t,$$

$$J_7 = -{}^1\!/_8\mathring{h}^2\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \lambda_\xi æ_\xi\mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha q^\alpha\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\mathring{s}_t,$$

$$J_8 = {}^2\!/_{\mathring{h}}\,\varphi({}^{\mathring{h}}\!/_2)\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha\psi^\alpha\mathbf{m}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\mathring{s}_t,$$

$$J_9 = -\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \lambda_\xi\mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha m^\alpha\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\mathring{s}_t,$$

$$K_2 = -h_\lambda^2\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathcal{A}\mathring{\nu}_\alpha\mathring{a}^{\alpha\beta}q_n\delta\psi_\beta\,d\mathring{s}_t. \tag{2.21$_2$}$$

(Можно показать, что подчеркнутые слагаемые в формулах (2.20), (2.21) малы по сравнению с остальными, и поэтому впредь они учитываться не будут.)

Граничные величины приближенно можно представить в виде таблицы (см. [5], форм. (9.2.79))

$\widetilde{T}_{\nu\nu}$	$\widetilde{T}_{\nu t}$	$\widetilde{T}_{\nu n} - \widetilde{T}_{\nu\nu}\vartheta_\nu - \widetilde{T}_{\nu t}\vartheta_t$
u_ν	u_t	w

$\widetilde{M}_{\nu\nu}$	$\widetilde{M}_{\nu t}$
$\vartheta_\nu + \psi_\nu$	$\vartheta_t + \psi_t$

,

где в отличиие от (9.2.72)[5] следует использовать формулу

$$\widetilde{T}_{\nu n} = \frac{1}{k}\mu\mathring{h}\psi_\nu.$$

3. $\mathfrak{M}$-алгоритм учета трансверсальных деформаций

Приравняв в преобразованном уравнении (2.1) (см. формулы (2.3), (2.14), (2.16), (2.20), $(2.21)_1$) к нулю множители у вариаций $\delta\mathbf{r}$, $\delta\psi_i$, $i = 1, 2$, получим

$$\partial_\alpha[\sqrt{a}(\mathbf{r}_\beta\widetilde{T}^{\alpha\beta} + \mathbf{n}\nabla_\beta\widetilde{M}^{\alpha\beta})] + \sqrt{a}\mathbf{q} = \mathbf{0},$$

$$\widetilde{T}^i_{\cdot n} = \nabla_\beta\widetilde{M}^{\beta i}, \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

где

$$\widetilde{T}^{ij} = \mathcal{A}^{-1}T^{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\,\mathring{a}^{ij}m_n,$$

$$\widetilde{M}^{ij} = \mathcal{A}^{-1}M^{ij} + \lambda_\xi h^2_\lambda\mathring{a}^{ij}q_n,$$

$$\widetilde{T}^i_{\cdot n} = \frac{\mathcal{A}^{-1}\mathring{h}}{{}^2\!/_{\mathring{h}}\,\varphi({}^{\mathring{h}}\!/_2)k}T^i_{\cdot n} = \frac{1}{k}\mu\mathring{h}\mathring{a}^{i\beta}\psi_\beta. \tag{3.2}$$

Первому (векторному) уравнению (3.1) эквивалентна следующая система скалярных уравнений:

$$\partial_\alpha(\sqrt{a}\widetilde{T}^{\alpha i}) + \sqrt{a}\widetilde{T}^{\alpha\beta}\Gamma^i_{\alpha\beta} - \sqrt{a}(\nabla_\beta\widetilde{M}^{\alpha\beta})b^i_\alpha + \sqrt{a}q^i = 0,$$

$$\partial_\alpha(\sqrt{a}\nabla_\beta\widetilde{M}^{\alpha\beta}) + \sqrt{a}\widetilde{T}^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + \sqrt{a}q_n = 0. \tag{3.3}$$

Далее с использованием формул Фосса-Вейля (см., например, [5]) уравнения (3.3) можно представить так:

$$\nabla_\alpha\widetilde{T}^{\alpha i} - b^i_\alpha\nabla_\beta\widetilde{M}^{\beta\alpha} + q^i = 0,$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \widetilde{M}^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \widetilde{T}^{\alpha\beta} + q_n = 0. \tag{3.4}$$

Окончательно с учетом $(3.1)_2$ приходим к следующей форме записи полевых уравнений равновесия:

$$\begin{gathered} \nabla_\alpha \widetilde{T}^{\alpha i} - b^i_\alpha \widetilde{T}^{\alpha}_{\cdot n} + q^i = 0, \\ \nabla_\alpha \widetilde{T}^{\alpha}_{\cdot n} + b_{\alpha\beta} \widetilde{T}^{\alpha\beta} + q_n = 0, \\ \nabla_\alpha \widetilde{M}^{\alpha i} - \widetilde{T}^{i}_{\cdot n} = 0, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5) при отсутствии тильд идентичны по форме записи уравнениям равновесия линейной теории оболочек (6.81) [23] и в этом смысле будем называть их *каноническими*.

Тот факт, что уравнения нелинейной механки жесткогибких оболочек удалось преобразовать к каноническому виду относительно приведенных статических величин (3.2), позволяет сформулировать быстрый алгоритм (ниже для краткости – $\mathfrak{M}$-алгоритм) уточнения различных частично или полностью линеаризированных вариантов *кирхгофовской теории оболочек* за счет учета трансверсальных деформаций.

$\mathfrak{M}$-алгоритм заключается:

• в замене статических величин соответсвующего варианта кирхгофовской теории оболочек $(T^{ij}, M^{ij}, T^{i}_{\cdot n})$ правыми частями формул (3.2);

• в сохранении всех допущений рассматриваемого кирхгофовского варианта теории оболочек, связанных с выражением геометрических пареметров деформированной срединной посверхности (a_{ij}, b_{ij}) через перемещения.

4. Использование $\mathfrak{M}$-алгоритма для уточнения уравнений Маргера

Проиллюстрируем $\mathfrak{M}$-алгоритм на примере уточнения теории пологих оболочек Маргера [4] (см.также [24], уравнения (11.16)) за счет учета поперечных сдвигов и обжатия. Как известно [24], в названной теории кроме допущений, связанных с пологостью оболочки, следуя Ка́рману, учитываются в формулах для тангенциальных компонент тензора Грина-Лагранжа квадратичные слагаемые относительно углов наклона касательных к координатным линиям срединной поверхности. В конечном счете названные формулы имеют вид

$$\gamma^{\xi}_{ij} = \gamma_{ij} + \xi æ_{ij}, \tag{4.1}$$

где

$$\gamma_{ij} = e_{ij} - k_{ij}w + \tfrac{1}{2}w_{,i}w_{,j},\ w_{,i} \triangleq \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$k_{ij} \triangleq \mathring{b}_{ij}/\sqrt{\mathring{a}_{ii}\mathring{a}_{jj}},\ æ_{ij} = -w_{,ij}. \qquad (4.2)$$

За исходные примем уравнения равновесия (1.21), (1.22), (1.24)–(1.26) [25] (обозначения приведены в соответствие с используемыми в данной статье; предполагается, что тангенциальная поверхностная нагрузка отсутствует; учтено дополнительно слагаемое $k_{12}T_{12}$; статические величины сразу помечены тильдами, чтобы не выписывать систему дважды; $T_{ij} \approx S_{ij}$)

$$\widetilde{T}_{i\alpha,\,\alpha} = 0,\ i = 1, 2; \qquad (4.3)_1$$

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta,\,\alpha\beta} + (k_{\alpha\beta} + w_{,\,\alpha\beta})\widetilde{T}_{\alpha\beta} + q_n = 0; \qquad (4.3)_2$$

$$\widetilde{T}_{in} = \widetilde{M}_{i\alpha,\,\alpha},\ i = 1, 2. \qquad (4.3)_3$$

Формулы (3.2) в рамках принятых геометрических допущений имеют вид

$$\widetilde{T}_{ij} = T_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}m_n\delta_{ij},\ \widetilde{T}_{in} = \frac{1}{k}\mu\mathring{h}\psi_i,$$

$$\widetilde{M}_{ij} = \overset{w}{M}_{ij} + \overset{\psi}{M}_{ij} + h_\lambda^2 q_n\delta_{ij}, \qquad (4.4)$$

где (см. форм. (1.11))

$$\overset{w}{M}_{11} = -d_\circ(w_{,11} + \nu w_{,22}),\ \overset{w}{M}_{22} = (1\leftrightarrows 2)\overset{w}{M}_{11},$$

$$\overset{w}{M}_{12} = -(1-\nu)d_\circ w_{,12}; \qquad (4.5)_1$$

$$\overset{\psi}{M}_{11} = d_\circ(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}),\ \overset{\psi}{M}_{22} = (1\leftrightarrows 2)\overset{\psi}{M}_{11},$$

$$\overset{\psi}{M}_{12} = \tfrac{d_\circ}{2(1-\nu)}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}). \qquad (4.5)_2$$

Очевидно, что уравнения $(4.3)_1$ удовлетворяются при

$$\widetilde{T}_{11} = \Psi_{,22},\ \widetilde{T}_{22} = \Psi_{,11},\ \widetilde{T}_{12} = -\Psi_{,12}, \qquad (4.6)$$

т. е.

$$T_{11} = \Psi_{,22} - \frac{\nu}{1-\nu}m_n,\ T_{22} = \Psi_{,11} - \frac{\nu}{1-\nu}m_n,$$

$$T_{12} = -\Psi_{,12}. \qquad (4.7)$$

На основании формул (4.5), (4.6) получаем

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta,\,\alpha\beta} = -d_\circ\Delta^2 w + d_\circ\Delta\psi_{\alpha,\,\alpha} + h_\lambda^2\Delta q_n,$$

$$(k_{\alpha\beta} + w_{,\,\alpha\beta})\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \Delta_B\Psi + \Lambda(\Psi, w), \tag{2.8}$$

где

$$\Lambda(\Psi, w) = \Psi_{,\,11}w_{,\,22} - 2\Psi_{,\,12}w_{,\,12} + \Psi_{,\,22}w_{,\,11}$$

$$\Delta_B(\;) = k_{22}\frac{\partial^2(\;)}{\partial x_1^2} - 2k_{12}\frac{\partial^2(\;)}{\partial x_1 x_2} + k_{11}\frac{\partial^2(\;)}{\partial x_2^2},$$

$$\Delta(\;) = \frac{\partial^2(\;)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\;)}{\partial x_2^2}. \tag{4.9}$$

С учетом равенств (4.8) уравнение $(4.3)_2$ приводится к виду

$$d_\circ\Delta^2 w = q_n + h_\lambda^2\Delta q_n + \Delta_B\Psi + \Lambda(\Psi, w) + d_\circ\Delta\psi_{\alpha,\,\alpha}. \tag{4.10}$$

Принимая во внимание формулу $(4.4)_2$, из уравнений $(4.3)_3$ (после дифференцирования по x_j и свертки $i = j = \beta$) находим

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta,\,\alpha\beta} = \frac{1}{k}\mu\mathring{h}\psi_{\alpha,\,\alpha},$$

или

$$\psi_{\alpha,\,\alpha} = -\frac{k}{\mu\mathring{h}}[q_n + \Delta_B\Psi + \Lambda(\Psi, w)]. \tag{4.11}$$

Исключив теперь с помощью формулы (4.11) дивергенцию вектора поперечных сдвигов $\psi_{\alpha,\,\alpha}$ из уравнения (4.10), получим следующее основное уравнение уточненной теории пологих оболочек типа Маргера:

$$d_\circ\Delta^2 w = q_n - (kh_\psi^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n +$$

$$+(I - kh_\psi^2\Delta)[\Delta_B\Psi + \Lambda(\Psi, w)]. \tag{4.12$_1$}$$

где I – тождественный оператор.

Принимая во внимание вытекающие из (1.11) формулы

$$T_{11} = c_\circ(\gamma_{11} - \nu\gamma_{22}),\; T_{22} = (1\leftrightarrows 2)T_{11},$$

$$T_{12} = (1 - \nu)c_\circ\gamma_{12},$$

а также равенства (4.2) и (4.7), можно записать

$$e_{11} = \frac{1}{E\mathring{h}}(\Psi_{,\,22} - \nu\Psi_{,\,11}) + k_{11}w - \frac{1}{2}w_{,1}^2 - \frac{\nu}{E\mathring{h}}m_n,$$

$$e_{12} = -\frac{1+\nu}{E\mathring{h}}\Psi_{,\,12} + k_{12}w - \frac{1}{2}w_{,\,1}w_{,\,2},\ e_{22} = (1\leftrightarrows 2)e_{11}.$$

Исключив с помощью этих формул компоненты тензора малых деформаций из очевидного тождества

$$e_{11,\,22} + e_{22,\,11} - 2e_{12,\,12} = 0,$$

придем к следующему уравнению:

$$\frac{1}{E\mathring{h}}\Delta^2\Psi = \frac{\nu}{E\mathring{h}}\Delta m_n - \frac{1}{2}\Lambda(w,w) - \Delta_B w - \beta w, \qquad (4.12)_2$$

где

$$\beta = k_{11,\,22} - 2k_{12,\,12} + k_{22,\,11}. \qquad (4.12')$$

И наконец, уравнения (см. $(4.3)_3, (4.4)_2, (4.4)_3$)

$$\frac{1}{k}\mu\mathring{h}\psi_i = \overset{w}{M}_{i\beta,\,\beta} + \overset{\psi}{M}_{i\beta,\,\beta} + h_\lambda^2 q_{n,\,i},\ i = 1,2$$

с использованием соотношений (4.5) приводятся к следующему виду:

$$\Delta\psi_i - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_{i,\,j} - \psi_{j,\,i}) - \frac{1}{kh_\psi^2}\psi_i =$$

$$= (\Delta w - \frac{h_\lambda^2}{d_\circ}q_n)_{,\,i}\ ,\ i \neq j\ \blacksquare \qquad (4.12)_3$$

Преобразуем уравнения (4.12) для случая круговой цилиндрической оболочки рдиуса R. Переходя к безразмерным координатам $\xi = x_1/R$, $\varphi = x_2/R$, получаем (см. форм. (4.2), (4.9), (4.12$'$))

$$k_{22} = -\frac{1}{R},\ \Delta_{B(\ )} = -\frac{1}{R^3}\frac{\partial^2(\ )}{\partial\xi^2},\ k_{11} = k_{12} = 0,\ \beta = 0.$$

С использованием этих соотношений уравнения (4.12) принимают вид

$$d_\circ\Delta^2 w + R\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\Psi - \frac{kh_\psi^2}{R^2}\Delta\Psi) = R^4(q_n - \frac{h_*^2}{R^2}\Delta q_n) + \underline{(I - \frac{kh_\psi^2}{R^2}\Delta)\Lambda(\Psi,w)},$$

$$-E\mathring{h}R\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \Delta^2\Psi = \nu R^2\Delta m_n - \underline{\frac{1}{2}E\mathring{h}\Lambda(w,w)},$$

$$\Delta\psi_1 - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}) - \frac{R^2}{kh_\psi^2}\psi_1 =$$

$$= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta w + \frac{h_\lambda^2 R^2}{d_\circ} q_n),$$

$$\Delta\psi_2 - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}) - \frac{R^2}{kh_\psi^2}\psi_2 =$$

$$= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Delta w + \frac{h_\lambda^2 R^2}{d_\circ} q_n). \tag{4.13}$$

Здесь

$$\Lambda(\Psi, w) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\varphi} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2},$$

$$\Delta(\,) = \frac{\partial^2(\,)}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2(\,)}{\partial\varphi^2},\ h_*^2 = kh_\psi^2 - h_\lambda^2.$$

Рассмотрим, в частности, уравнения линейной теории цилиндрических оболочек, уточненной путем учета трансверсальных деформаций (т. е. отбросим подчеркнутые в (4.13) слагаемые). На основании первых двух уравнений получим

$$Lw = \frac{R^4}{d_\circ}(\Delta^2 q_n - \frac{h_*^2}{R^2}\Delta^3 q_n) - \frac{\nu R^3}{d_\circ}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\Delta m_n - \frac{kh_\psi^2}{R^2}\Delta^2 m_n),$$

$$L\Psi = 4b^4 R^3 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(q_n - \frac{h_*^2}{R^2}\Delta q_n) + \nu R^2\Delta^3 m_n. \tag{4.14}$$

где

$$L(\,) = \Delta^4(\,) - 2(1+\nu)\frac{\partial^4\Delta(\,)}{\partial\xi^4} + 4b^4\frac{\partial^4(\,)}{\partial\xi^4},$$

$$4b^4 = 12(1-\nu^2)R^2/\mathring{h}^2.$$

Из уравнения $(4.14)_1$ вытекают разрешающие уравнения следующих частных теорий:

i) *линейная кирхгофовская теория* при $h_\psi^2 = h_\lambda^2 = 0,\ m_n = 0,\ \psi_1 = \psi_2 = 0$

$$\Delta^4 w + 4b^4\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} = \frac{R^4}{d_\circ}\Delta^2 q_n; \tag{4.15}$$

ii) *линейная теория типа Тимошенко* ($k = 1$) и типа Журавского ($k = 8/15$, $k = 1/2$) при $h_\lambda^2 = 0, m_n = 0$

$$Lw = \frac{R^4}{d_\circ}(\Delta^2 q_n + \frac{kh_\psi^2}{R^2}\Delta^3 q_n); \tag{4.16}$$

iii) *линейная теория типа Нагди* при $h_\psi^2 = 0,\ \psi_1 = \psi_2 = 0$

$$\Delta^4 w + 4b^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{R^4}{d_\circ}(\Delta^2 q_n - \frac{h_\lambda^2}{R^2}\Delta^3 q_n) -$$

$$-\frac{\nu R^3}{d_\circ}\frac{\partial^2 \Delta m_n}{\partial \xi^2}. \qquad (4.17)$$

Уравнение (4.15) является классическим. Впервые оно получено, видимо, в работе [26]. В статье [27] показано, что прогибы, найденные с использованием уравнения (4.15), хорошо согласуются с получаемыми на основе более точных уравнений В. Флюгге [28] в случае не слишком длинных оболочек ($\ell/R \leq 10$, ℓ – длина оболочки). Для очень длинных оболочек погрешность может достигать 25%.

Что же касается уравнений (4.16), (4.17), то в данном виде (с использованием параметра k) они приводятся впервые.

Литература

1. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория изотропно-упругих тонких оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №2. С. 148-159.*

2. **С.А. Кабриц, Е.И. Михайловский, П.Е. Товстик, К.Ф. Черных, В.А. Шамина** Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.

3. **Mikhailovskii E.I., Yermolenko A.V.** On nonlinear Theory of Rigid-Flexible Shells without the Kirchof Hypotheses / Critical Review of the Theories of Plates and Shells and New Application. Berlin: Springer, 2004.

4. **Marguerre K.** Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung // *Jahrbuch 1939 deutscher Luftfahrtforschung. Bd. 1. Berlin Adlershof* B*ücherei, 1939.*

5. **Михайловский Е.И.** Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. 516 стр.

6. Методы расчета оболочек: В 5 томах. Киев: Наукова думка, 1980-1982.

   Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехова Вал.Н.,Чехов Вик.Н.,

Шнеренко К.И. Теории тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Т. 1. 1980. 635 с.

Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Т. 2. 1980. 367 с.

Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В. Теория упругих-пластических оболочек при неизометрических процессах. Т. 3. 1981. 285 с.

Григренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Т. 4. 1981. 543 с.

Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Т. 5. 1982. 399 с.

7. **Григолюк Э.И., Толкачев В.М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 511 с.

8. **Timoshenko S.P.** On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. 1921. Ser.6.

9. **Айнола Л.Я.** Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т.14. №3. С. 337-344.

10. **Галимов К.З.** Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. Вып.11. С. 97-112.

11. **Галимов К.З.** О некоторых направлениях развития механики деформированного тела в Казани. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. Вып.12. С. 3-26.

12. **Naghdi P.M.** On the theory of thin elastic shells // Quarterly of applied Mathematics. 1957. Vol.14. №4.

13. **Михайловский Е.И., Ермоленко А.В.** Уточнение нелинейной квазикиргофовской теории К.Ф. Черныха // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 1999. Вып. 3. С. 203-222.

14. **Михайловский Е.И.** Игнорирование гипотиз Кирхгофа в нелинейной теории жескогибких оболочек // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела/ Труды научной школы академика В.В. Новожилова. Спб.: СПбГУ, 2000. Вып. 2. С. 131-160.

15. **Михайловский Е.И.** Граничные условия подкрепленного края жесткогибкой оболочки в нелинейной теории типа Тимошенко-Рейсснера // Изв. РАН. МТТ. 1995. №2. С. 109-119.

16. **Кабриц С.А., Черных К.Ф.** Нелинейная теория изотропно упругих тонких оболочек с учетом поперечного сдвига // Изв. РАН. МТТ. 1996. №1. С. 124-136.

17. **Миронов В.В., Михайловский Е.И.** О влиянии поперечных сдвигов на напряженное состояние цилиндрических оболочек при локальных воздействиях // Тр.XXV Российской школы и XXXV Уральского семинара, посвящ. 60-летию Победы.Ч. 1 / Наука и технологии. М.: Изд-во РАН, 2005. С. 231-239.

18. **Новожилов В.В.** О погрешности одной из гипотиз Кирхгофа в теории оболочек// Докл. АН СССР. 1943. Т. 38. №5-6. С. 177-179.

19. **Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М.** О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек.// ПММ. 1943. Т.VII. Вып.5. С. 331-340.

20. **Гольденвейзер А.Л.** Алгоритм асимпотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994.Т. 58. Вып. 6. С. 96-108. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

21. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

22. **Новожилов В.В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1956. 372 с.

23. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

24. **Филин А.П.** Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат. Ленинградское отделение, 1987. 384 с.

25. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

26. **Donnell L.H.** Stability of thin-walled tubes under torsion // NACA. Rept. 1933. №479.

27. **Yuan S.W., Ting L.** On radial deflection of a cylinder subjected to equal and opposite concentrated radial loads // J. of Applied Mechanics. 1957. V.24. №2.

28. **Flügge W.** Stressen in Schells. Berlin-Göttingen-Heldeberg: Springer, 1960.

Summary

Mikhailovskii E.I. A non-linear theory of flexible shells Zhuravsky-type

A non-linear theory of flexible shells has been built, taking into account transversal shears by D. I. Zhuravsky model, By introducing generalized forces and moments the equations are reduced to the kind formally coinciding whith equations in the theory of shells, based on Kirchhoff's hypotheses. This allows to formulate an effective algorithm of accounting transversal deformations in some of Kirchhoff's variations of the theory of shells and planes, The aalgorithm is illustrated by more exact specification of K. Margyerre's non-linear theory of shallow shells.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.08.2007*