Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 519.6

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОЦЕССА[1]

Л.Я. Савельев [2], В.А. Огородников [3], О.В. Сересева [4]

Рассматривается модель случайных блужданий на прямой, описывающая случайный процесс с кусочно-линейными траекториями. Исследуются распределения случайных переменных, образующих этот процесс. Особое внимание уделяется распределению относительного времени ожидания для пуассоновского потока точек. Получены формулы для этих распределений и средних значений рассматриваемых случайных переменных.

1. Введение

При численном моделировании случайных процессов и полей традиционно используют определенный набор преобразований, которые обеспечивают желаемую вероятностную структуру процесса или поля. При моделировании гауссовских процессов и полей дискретного аргумента применяются линейные преобразования систем независимых гауссовских величин, позволяющих, в принципе, строить процессы и поля с произвольной корреляционной структурой [1,4]. Для моделирования гауссовских процессов и полей непрерывного аргумента широко используются приближенные спектральные модели [2,5]. Другой подход к моделированию процессов и полей непрерывного аргумента основан на использовании точечных потоков [2]. Эти модели позволяют

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00422), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7157.2006.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (2006-48).

[2]Новосибирский государственный университет

[3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

[4]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

строить стационарные процессы, однородные и однородные изотропные негауссовские поля с произвольным одномерным распределением и произвольными корреляционными функциями из класса выпуклых. Широкий класс моделей основан на функциональных преобразованиях гауссовских процессов и полей. Эти модели объединяет хорошо известный метод моделирования негауссовских процессов – метод обратных функций распределения [2,5]. На основе этого метода можно строить негауссовские процессы и поля с произвольным одномерным распределением и достаточно широким классом корреляционных функций, в том числе и не принадлежащих классу выпуклых. При этом метод обратных функций распределения может быть успешно использован для моделирования нестационарных процессов и неоднородных полей.

Эти подходы широко используются для построения стохастических моделей реальных процессов и полей, например, метеорологических и океанологических многомерных процессов, экономических и ценовых рядов. В качестве входных характеристик для моделей при таких подходах используются эмпирические корреляционных функций и одномерных распределений. В случае, когда корреляционные связи достаточно слабы, как это, например, наблюдается в ценовых рядах, целесообразно использовать другие подходы, не связанные с использованием корреляционных функций и одномерных распределений. Одним из таких подходов является кусочно-линейная аппроксимация реальных случайных процессов [3]. При таком подходе параметры кусочно-линейных сегментов аппроксимирующей функции оцениваются по данным наблюдений, после чего они моделируются в соответствии с полученными оценками и строится случайная кусочно-линейная функция.

Работа посвящена исследованию некоторых специальных процессов, связанных с таким подходом, в частности, кусочно-линейных процессов на точечных потоках.

2. Модель случайных блужданий

2.1. Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$ имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

и функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} .$$

Среднее и дисперсия равны $1/\lambda$ и $1/\lambda^2$.

Рассмотрим последовательность независимых случайных переменных $X_n,\ n \geq 1$, имеющих одно и то же показательное распределение с параметром λ, и последовательность их сумм

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ \ n \geq 1.$$

Последовательность $\{S_n\}$ описывает случайное блуждание на прямой. Случайная переменная $S_n,\ (n \geq 1)$ имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda,\ n$ [6]. Соответствующая плотность и функция распределения выражаются равенствами

$$g_n(y) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} ,$$

$$G_n(y) = \begin{cases} \Pr(S_n \leq y) = 1 - e^{-\lambda y} \left(\sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda y)^m}{m!} \right), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} .$$

Среднее значение и дисперсия равны n/λ и n/λ^2.

2.2. Пусть $t > 0$ и

$$\nu(t) = Min\{n \geq 1 : S_n \geq t\} \in [0, \infty).$$

Если $S_n > t$ для всех $n \geq 1$, то $\nu(t) = \infty$. Так как $S_{\nu(t)-1} < t \leq S_{\nu(t)}$, то

$$\Pr\{\nu(t) = n\} = G_{n-1}(t) - G_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t},\ \ 0 < n < \infty.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{\nu(t) = n\} = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1$$

и поэтому $\Pr\{\nu(t) = \infty\} = 0$. Для среднего значения $E\nu(t)$ случайной переменной $\nu(t)$ верны равенства

$$E\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} = 1 + \lambda t.$$

Переменная $\nu(t)$выражает номер $n = \nu(t)$ интервала длины X_n, которому принадлежит точка t (накрывающего точку t).

2.3. Рассмотрим случайную переменную

$$X(t) = X_{\nu(t)} = S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1}.$$

Она описывает длину интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$, накрывающего t, и имеет плотность [6]

$$f_t(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & 0 < x \le t \\ \lambda(1+\lambda t) e^{-\lambda x}, & x > t \end{cases} .$$

Заметим, что $f_t(x) \neq f(x)$. Это неравенство может приводить к парадоксальным выводам [6]. Рассмотрим также случайную переменную

$$W(t) = S_{\nu(t)} - t.$$

Она описывает расстояние от точки t до конца $S_{\nu(t)}$накрывающего ее интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$ и имеет то же самое экспоненциальное распределение, что и случайные переменные X_n [6]

$$\Pr\{W(t) \le x\} = \Pr\{X_n \le x\} = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} .$$

Случайная величина

$$Z(t) = t - S_{\nu(t)-1} = S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1} - (S_{\nu(t)} - t) = X(t) - W(t),$$

описывает расстояние до точки t от начала $S_{\nu(t)-1}$ накрывающего ее интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$ и имеет функцию распределения

$$H_0(t,x) = \Pr\{Z(t) \le x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \le x < t \\ 1, & x \ge t \end{cases} .$$

Заметим, что $H_0(t,x) \to F(x)$ при $t \to \infty$.

2.4. Расмотрим случайные переменные

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{Z(t)}{X(t)} = \frac{t-S_{\nu(t)-1}}{X_{\nu(t)}}, & X(t) \neq 0 \\ 1, & X(t) = 0 \end{cases}$$

$$R(t) = \begin{cases} \frac{W(t)}{X(t)} = \frac{S_{\nu(t)}-t}{X_{\nu(t)}}, & X(t) \neq 0 \\ 1, & X(t) = 0 \end{cases} .$$

Они описывают соответственно относительные длины левой $[S_{\nu(t)-1}, t]$ и правой $[t, S_{\nu(t)}]$ частей интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$ при рассматриваемом случайном блуждании. Так как

$$\Pr\{X(t) = 0\} = \Pr\{X_{\nu(t)} = 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{X_n = 0\} = 0,$$

то $\Pr\{Q(t) = 1\} = \Pr\{R(t) = 1\} = 0$. Заметим, что $Q(t) + R(t) = 1$ и поэтому достаточно рассматривать переменную $Q(t)$. Нужно найти ее функцию распределения, плотность, среднее значение и дисперсию.

2.5. Найдем функцию распределения и плотность

$$H(t, u) = \Pr\{Q(t) \leq u\}$$

случайной переменной $Q(t)$. Заметим, что $(t > 0, 0 < u \leq 1)$,

$$Q(t) \leq u \Leftrightarrow \frac{t - S_{\nu(t)-1}}{X_{\nu(t)}} \leq u \Leftrightarrow \frac{t - S_{\nu(t)-1}}{u} \leq X_{\nu(t)}.$$

Пусть $\nu(t) = 1$. Тогда $S_{\nu(t)-1} = S_0 = 0,\ X_{\nu(t)} = X_1$ и

$$\Pr\{\nu(t) = 1,\ Q(t) \leq u\} = \Pr\left\{\tfrac{t}{u} \leq X_1\right\} = 1 - \Pr\left\{X_1 < \tfrac{t}{u}\right\} =$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t/u}) = e^{-\lambda t/u}$$

Пусть $\nu(t) = n > 1$. Тогда

$$\Pr\{\nu(t) = n,\ Q(t) \leq u\} =$$

$$= \Pr\left\{(x, y)\ :\ X_n = x,\ S_{n-1} = y,\ 0 < \tfrac{t-y}{u} \leq x\right\} =$$

$$= \int_0^t \int_{(t-y)/u}^{\infty} g_{n-1}(y) f(x) dx dy,$$

$$\Pr\{\nu(t) > 1,\ Q(t) \le u\} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \int_{(t-y)/u}^{\infty} g_{n-1}(y) f(x) dx dy =$$
$$= \int_0^t \left(\left(\sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1(y)} \right) \int_{(t-y)/u}^{\infty} f(x)dx \right) dy.$$

Заметим, что при $y > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1}(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda y)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} = \lambda,$$

$$\Pr\{\nu(t) > 1,\ Q(t) \le u\} = \int_0^t \left(\lambda \int_{(t-y)/u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} dx \right) dy =$$
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-y)/u} dy = u - e^{-\lambda t/u} u.$$

Следовательно

$$H(t,u) = \Pr\{Q(t) \le u\} =$$

$$= \Pr\{\nu(t) = 1,\ Q(t) \le u\} + \Pr\{\nu(t) > 1,\ Q(t) \le u\} =$$

$$= u + (1-u)e^{-\lambda t/u}, \quad 0 < u \le 1.$$

Дифференцируя, находим плотность

$$h(t,u) = 1 - e^{-\lambda t/u} + \lambda \frac{t}{u} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) e^{-\lambda t/u}.$$

2.6. Найдем среднее значение $E(Q(t))$ и дисперсию $V(Q(t))$ случайной переменной $Q(t)$. Интегрируя получаем

$$E(Q(t)) = \int_0^1 uh(t,u)du = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda t(2+\lambda t)\Gamma(0,\lambda t) - (1+\lambda t)e^{-\lambda t} \right)$$

$$V[Q(t)] = \int_0^1 (u - E[Q(t)])^2 h(t,u) du =$$

$$= \tfrac{1}{12}(1 - \lambda t\,(2(6 + \lambda t(9 + 2\lambda t)) +$$

$$+ 3\lambda t(2 + \lambda t)^2 \Gamma(0, \lambda t))\Gamma(0, \lambda t) + (2(1 + 7\lambda t + 2\lambda^2 t^2) +$$

$$+ 6\lambda t(2 + 3\lambda t + \lambda^2 t^2)\Gamma(0, \lambda t) - 3e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)^2)e^{-\lambda t}).$$

Здесь $\Gamma(a,\, z)$ обозначает неполную гамма-функцию:

$$\Gamma(a,\, z) = \int_z^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

3. Модели случайных ломанных

3.1. Рассмотрим кусочно-линейный случайный процесс, принимающий в интервале (S_{n-1}, S_n) следующие значения:

$$Y(t) = (Y_n - Y_{n-1})\tfrac{t - S_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} + Y_{n-1} =$$
$$= \alpha_n \tfrac{t - S_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i, \quad S_{n-1} \le t < S_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $S_0 = 0$; $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\,, n \ge 1$, X_i - независимые случайные величины, имеющие одно и то же показательное распределение с параметром λ, а $Y_0 = \alpha_0$, $Y_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j\,, n \ge 1$, α_j - независимые между собой и от X_i случайные величины равномерно распределенные в интервале $[-a\,; b]\,$, $a, b > 0$. Выражение для $Y(t)$ может быть использовано для численного моделирования процесса, реализации которого представляют собой кусочно-линейные функции.

Используя обозначения из пункта 2. представим выражение для $Y(t)$ в виде

$$Y(t) = (Y_{\nu(t)} - Y_{\nu(t)-1})\tfrac{t - S_{\nu(t)-1}}{S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1}} + Y_{\nu(t)-1} =$$
$$= \alpha_{\nu(t)}\, Q(t) + \sum_{i=0}^{\nu(t)-1} \alpha_i, \quad S_{\nu(t)-1} \le t < S_{\nu(t)}.$$

Среднее $E(Y(t))$ и дисперсия $E(Y(t))$ имеют вид

$$E(Y(t)) = \tfrac{b-a}{2}(E(Q(t)) + 1 + t\lambda) =$$

$$= \tfrac{b-a}{4}\left(3 + \lambda t\left((2+\lambda t)\Gamma(0,\lambda t) + 2\right) - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}\right).$$

3.2. Рассмотрим последовательность независимых случайных переменных Z_n, $(n \geq 1)$, имеющих одно и то же распределение и среднее значение $E(Z_n) = b$. Будем предполагать также, что и случайные переменные X_m, Z_n, $(m, n \geq 1)$ независимы. Положим

$$T_0 = 0,\ \ T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i,\ \ (n \geq 1)$$

и рассмотрим случайную переменную

$$L(t) = T_{\nu(t)} - R(t) Z_{\nu(t)}.$$

Она имеет среднее значение

$$m(t) = E(L(t)) = E(T_{\nu(t)}) - E(R(t) Z_{\nu(t)}).$$

Вследствие тождества Вальда и независимости случайных переменных $R(t)$, $Z_{\nu(t)}$ верны равенства

$$m(t) = E(\nu(t))\, b = (1 + t\lambda)\, b - E(R(t))\, b.$$

Так как $0 \leq R(t) \leq 1$, то $0 \leq E(R(t)) \leq 1$. Следовательно

$$bt\lambda \leq m(t) \leq b + bt\lambda.$$

А так как $R(t) = 1 - Q(t)$, то $E(R(t)) = 1 - E(Q(t))$. Подставляя найденное для $E(Q(t))$ значение и используя специальное интегрирование, бесселевы и гипергеометрические функции, получаем формулу для среднего значения $m(t)$ случайной ломанной $L(t)$ в точке t:

$$m(t) = (1 + \lambda t - ((I_0(2t\lambda) - 1)e^{-\lambda t} + \lambda^3 t J(\lambda, t))e^{-\lambda t})b,$$

где

$$J(\lambda, t) = \int_0^t e^{-\lambda s}(t-s) Ei(-\lambda(t-s))\, {}_0F_1(2, \lambda^2 st) ds.$$

Выделяя главный член, получаем еще одну формулу для $m(t)$ случайной ломанной $L(t)$ в точке t:

$$m(t) = b + b\lambda t - \lambda^3 btJ(\lambda, t)e^{-\lambda t} - (I_0(2t\lambda) - 1)be^{-2\lambda t}.$$

Для анализа асимптотического поведения среднего значения можно использовать разложения рассматриваемых специальных функций в степенные ряды [7] . Для вычисления конкретных значений применяется численное интегрирование.

Литература

1. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. М: Наука. Гл. Изд. Физико-математической литературы. 1982.

2. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М: Наука. 1986. [Engl.transl.: Springer-Verlag, 1992].

3. **Novikov A.V., Ogorodnikov V.A.** Stochastic model of price series // *Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Novosibirsk. 2002. P. 243-248.*

4. **Ogorodnikov V.A. and Prigarin S.M.** Numerical modeling of random processes and fields: algorithms and applications // *VSP. Utrecht. The Netherlands. 1996.*

5. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск. ИВМиМГ СО РАН. 2005.

6. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и её приложения. М: Мир Т. 2. 1984.

7. **Watson G.N.** Theory of Bessel functions. Cambridge University Press. 1922.

Summary

Savelev L.J., Ogorodnikov V.A., Sereseva O.V. Stochastic model of piecewise linear process

The stochastic process with piecewise linear trajectories is considered. The process is based on models of stochastic walk on a straight line. The distributions of stochastic variables, forming this process, and, in particular, distribution of relative time expectations for Poisson flow of points are investigated. The appropriate mathematical expressions for these distributions, and also expressions for mean of process as time-varying function are received.

Новосибирский государственный университет
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН

Поступила 20.12.2007