Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 517.98+517.11

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА В РАМКАХ АКСИОМАТИКИ ДЛЯ ГИПЕРНАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Е. В. Праздникова

В работе излагается формализованная теория для нестандартной теории чисел, формализованная теория для гиперрациональных чисел. Моделированы основные теоремы классического дифференциального исчисления.

1. Введение.

Теорема компактности гласит, что если имеется некоторая теория, то она имеет модель тогда и только тогда, когда каждая ее конечная подтеория имеет модель. Чаще всего этот факт применяется для обоснования существования неархимедова расширения поля вещественных чисел и развития анализа в духе Лейбница. В настоящее время имеется много работ, посвященных применению методов нестандартного анализа к построению анализа вещественных функций (см., например, [3]-[5] и ссылки там). В большинстве работ применяется построение нестандартного расширения с помощью ультрапроизведения, либо идеи Нельсона [8] о консервативном расширении теории множеств Цермело-Френкеля путем добавления некоторых специфических аксиом, гарантирующих существование бесконечно малых. Пусть FP – теория упорядоченных полей в языке $\mathcal{L}\,(=,\leq;+,\cdot;0,1)$ и $\mathcal{L}'$ – расширение этого языка путем добавления нового константного символа w. Теория FP' получается из FP путем добавления бесконечного списка аксиом $\{n<w\,:\,n$ – натуральное число$\}$. Так как, очевидно, всякая конечная подтеория FP' содержит лишь конечное множество "новых" аксиом, моделью этой подтеории может служить множество $\mathbb{R}$, в котором имя константы w есть наибольшее натуральное число, являющееся номером

"новой"аксиомы. Таким образом, существует модель для теории FP', являющаяся элементарным расширением $\mathbb{R}$ и обозначаемая $^*\mathbb{R}$. Ясно, что имя w в модели $^*\mathbb{R}$ есть бесконечно большое число и, следовательно, в поле $^*\mathbb{R}$ имеются бесконечно малые числа. Более того, имеет место принцип переноса, согласно которому всякое утверждение о поле $\mathbb{R}$, выразимое в языке $\mathcal{L}$ истинно тогда и только тогда, когда соответствующее ему утверждение в языке $\mathcal{L}'$ истинно в поле $^*\mathbb{R}$.

Таким образом, пара $\mathbb{R}, ^*\mathbb{R}$ дает возможность развивать анализ в духе "основоположников"и, тем самым реабилитирует теорию бесконечно малых Лейбница. Но понятие вещественного числа в теории FP неаксиоматизируемо, ибо принцип Архимеда невыразим в логике первого порядка — это и есть следствие теоремы компактности и существования $^*\mathbb{R}$. С другой стороны, само понятие вещественного числа базируется на понятии дедекиндова сечения в области рациональных чисел (или идее пополнения $\mathbb{Q}$ как метрического пространства). То есть вещественное число мы должны понимать как набор его рациональных приближений, как это делается в конструктивном анализе А. А. Маркова [9]. Аналогично обстоит дело и в представлении вещественных чисел и в электронно–вычислительных машинах, точность которых предполагает задание вещественного числа его рациональным приближением.

Идеальной ситуацией является задание "абсолютной"точности, при которой приближение отличается от истинного (абсолютного) значения на бесконечно малое количество. В этом аспекте возможно рассмотрение в качестве модели теории FP множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и его нестандартного расширения $^*\mathbb{Q}$, содержащее бесконечно малые числа. Доказательство существования такого поля аналогично приведенному для пары $\mathbb{R}$, $^*\mathbb{R}$. Однако само построение поля $\mathbb{Q}$ осуществляется на основе кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ путем построения поля отношений, а само кольцо $\mathbb{Z}$ строится, исходя из множества натуральных чисел. Таким образом, вещественные числа ведут естественное происхождение из натуральных. Сами же натуральные числа могут быть получены либо в теории множеств как конечные ординалы, либо построены аксиоматически на основе аксиом Пеано.

Одним из применений варианта теоремы компактности является теорема Левенгейма–Скулема–Тарского о том, что всякая теория, имеющая бесконечные модели, имеет модель любой наперед заданной мощности. Тем самым, теория Пеано имеет так называемые нестандартные модели, в которых имеются числа, строго большие любого натурального числа. Отсюда один шаг до построения на аксиоматической основе теории так называемых гиперрациональных чисел, которые призваны моделировать вещественные числа "со сколь угодно большой точностью". Это обусловлено тем, что, рассматривая поле $^*\mathbb{Q}$ мы можем доказать, что $\mathbb{R}$ получается как факторкольцо кольца конечных чисел из $^*\mathbb{Q}$ по отношению бесконечной близости (см., например, [4]). Иными словами, для каждого вещественного числа существует гиперрациональное, бесконечно близкое к нему. Такое число определено неоднозначно, однако дает возможность судить о вычисляемом вещественном числе.

В настоящей работе мы предлагаем моделировать вещественные числа на основе понятия гиперрационального числа. Мы рассмотрим построение формализованной теории гиперрациональных чисел на основе консервативного расширения арифметики. В качестве приложений мы приводим ряд результатов о функциях, моделирующих вещественные функции.

2. Гиперарифметика

Рассмотрим язык $\mathcal{L}\,(=;+,\cdot,S;0)$ и формализованную теорию в нем:

1. $$\forall x\forall y\,(S(x)=S(y)\supset x=y)\,;$$

2. $$\forall x\neg(S(x)=0);$$

3. $$\forall x(x+0=x),\ \forall x\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))\,;$$

4. $$\forall x(x\cdot 0=0),\ \forall x\forall y\,(x\cdot S(y)=x\cdot y+x)\,;$$

5. схема аксиом индукции(для любой формулы A)со свободной переменной x
$$A(0)\&(\forall x(A(x)\supset A(S(x)))\supset\forall xA(x)).$$

Эта теория, которую мы будем обозначать AP, называется формальной арифметикой или арифметикой Пеано.

Кроме того, мы принимаем аксиомы равенства и аксиомы согласования с равенством:

1. $\forall x(x=x)$;

2. $\forall x\forall y(x=y\supset y=x)$;

3. $\forall x \forall y \forall z (x = y \& y = z \supset x = z)$;

4. $\forall x \forall y \, (x = y \supset S(x) = S(y))$;

5. $\forall x \forall y \forall x' \forall y' \, (x = x' \& y = y' \supset x + y = x' + y')$;

6. $\forall x \forall y \forall x' \forall y' \, (x = x' \& y = y' \supset x + y = x' \cdot y')$;

Понятие терма, формулы, высказываний заимствованы из [10].

Определение 2.1. *Натуральными числами называются термы в теории AP вида $n = SS \ldots S0$, точнее, $1 = S0, 2 = S1 = SS0, \ldots$.*

Определение 2.2. *Введем бинарный предикатный символ $\leq$:*

$$x \leq y \rightleftharpoons \exists z (x + z = y).$$

Тогда имеет место легко доказываемая

Теорема 2.1. *Введенное отношение обладает следующими свойствами:*

1.
$$\forall x (x \leq x);$$

2.
$$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \& y \leq z \supset x \leq z);$$

3.
$$\forall x \forall y (x \leq y \& y \leq x \supset x = y);$$

4.
$$\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x);$$

5.
$$x = y \supset x \leq y \& y \leq x.$$

Определение 2.3.

$$x < y \rightleftharpoons x \leq y \& \neg (x = y).$$

Рассмотрим теперь теорию HAP в языке $\mathcal{L}'$, получающуюся путем добавления новой константы Ω и бесконечного списка аксиом:

$$0 < \Omega, 1 < \Omega, \ldots, n < \Omega, \ldots$$

Определение 2.4. *Теорию HAP назовем гиперарифметикой. Соответствующие числа будем называть гипернатуральными.*

Имеет место теорема, доказательство которой можно найти в [1].

Теорема 2.2. *Теория HAP является консервативным расширением теории AP.*

Таким образом, любое утверждение, выводимое в арифметике, выводимо и в гиперарифметике. Наоборот, всякое утверждение о гипернатуральных числах, содержащее лишь конечное количество аксиом, в которые входит константа Ω, выводимо и в арифметике Пеано.

3. Гиперрациональные числа

Будем рассматривать тройки гипернатуральных чисел. Для них введем специальное обозначение. Точнее, упорядоченная тройка гипернатуральных чисел определяется некоторым предикатом Q, добавленным к теории HAP. Такие тройки будем называть гиперрациональными числами. Неформально, всякая тройка (x, y, z) определяет число $\frac{x-y}{z+1}$.

Формально, упорядоченная тройка есть трехместный предикат вместе с алгорифмом, выделяющим левый, центральный и правый терм. Рассмотрим теперь язык $\mathcal{L}_q$, являющийся расширением языка гиперарифметики путем добавления предиката Q — "быть гиперрациональным числом".

Определение 3.1. *q — есть гиперрациональное число, если*

$$HAP \vdash \exists x \exists y \exists z \left(q = (x, y, z) \& Q(x, y, z)\right).$$

Определение 3.2. *Гиперрациональные числа $p = (x, y, z)$ и $q = (u, v, w)$ равны между собой, если*

$$x(w+1) + v(z+1) = u(z+1) + y(w+1).$$

Записываем это отношение как $p = q$[1]*.*

Теорема 3.1. *Введенный предикат есть предикат равенства. То есть верны аксиомы равенства и согласованности с равенством.*

1. *Рефлексивность равенства $\forall p(p = p)$;*

[1]Новый предикат отличен от имеющегося в языке, но мы сохраняем за ним то же обозначение, что не должно привести к недоразумениям.

2. Симметричность равенства $\forall p \forall q(p = q \supset q = p)$;

3. Транзитивность равенства $\forall p \forall q \forall r(p = q \& q = r \supset p = r)$*;*

4. Согласованность с предикатными символами

$$\forall p_1 \dots p_n \forall q_1 \dots q_n (p_1 = q_1 \& \dots \& p_n = q_n \supset (P(p_1, \dots p_n) \equiv$$

$$\equiv P(q_1, \dots q_n)));$$

5. Согласованность с функциональными символами

$$\forall p_1 \dots p_n \forall q_1 \dots q_n (p_1 = q_1 \& \dots \& p_n = q_n \supset f(p_1, \dots p_n) =$$

$$= f(q_1, \dots q_n)).$$

Доказательство.

1. Рассмотрим $p = (x, y, z)$, тогда верно $x(z + 1) + y(z + 1) = x(z + 1) + y(z + 1)$, поэтому $\forall p(p = p)$. Ч.т.д

2. Рассмотрим $p = (x, y, z)$ и $q = (u, v, w)$. Тогда, если $p = q$, то $x(w + 1) + v(z + 1) = u(z + 1) + y(w + 1)$, отсюда $y(w + 1) + u(z + 1) = v(z + 1) + x(w + 1)$, т.е. $q = p$. Обратно аналогично. Значит $\forall p \forall q(p = q \supset q = p)$. Ч.т.д.

3. Рассмотрим $p = (x, y, z)$, $q = (u, v, w)$ и $r(a, b, c)$. Тогда, если $p = q$ и $q = r$, то $x(w + 1) + v(z + 1) = u(z + 1) + y(w + 1)$ и $u(c + 1) + b(w + 1) = a(w + 1) + v(c + 1)$, отсюда $(w + 1)(x - y) = (z + 1)(u - v)$ и $(w + 1)(b - a) = (c + 1)(v - u)$, выразим $(w + 1)$ и приравняем, получим $(z + 1)(b - a) = (c + 1)(y - x)$, отсюда $x(c + 1) + b(z + 1) = a(z + 1) + y(c + 1)$. Значит $p = r$. Ч.т.д.

4. Согласованность с предикатными символами верна, т.к. верны аксиомы равенства (согласованность с равенством).

5. Согласованность с функциональными символами верна, так как сумма и произведение гиперрациональных чисел определены корректно (см. ниже).

Определение 3.3. *Предикат* N *определяет гипернатуральное число* p *вида* $(x, 0, 0)$*, т.е.* $N(p) \equiv \exists x p = (x, 0, 0)$*. Предикат* Z *выделяет гиперцелое число вида* $(x, y, 0)$*, т.е.* $Z(p) \equiv \exists x \exists y p = (x, y, 0)$*.*

Определение 3.4. *Суммой гиперрациональных чисел $p = (x, y, z)$ и $q = (u, v, w)$ будем называть гиперрациональное число s вида $s = (x(w+1) + u(z+1), y(w+1) + v(z+1), zw + z + w)$.*

Произведением гиперрациональных чисел $p = (x, y, z)$ и $q = (u, v, w)$ будем называть гиперрациональное число r вида $r = (xu + yv, yu + xv, zw + z + w)$.

Теорема 3.2. *Сумма и произведение гиперрациональных чисел определены корректно: если $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$, то $p_1+p_2 = q_1+q_2$ и $p_1 \cdot p_2 = q_1 \cdot q_2$.*

Доказательство.

Рассмотрим $p_1 = (a, b, c)$, $p_2 = (x, y, z)$, $q_1 = (d, e, f)$, $q_2 = (u, v, w)$, причем
$p_1 = q_1 \Leftrightarrow a(f + 1) + e(c + 1) = d(c + 1) + b(f + 1)$ обозначим за (1) и
$p_2 = q_2 \Leftrightarrow x(w + 1) + v(z + 1) = y(w + 1) + u(z + 1)$ обозначим за (2).
Тогда
$p_1 + p_2 = (a(z + 1) + x(c + 1), b(z + 1) + y(c + 1), cz + c = z)$,
а $q_1 + q_2 = (d(w + 1) + u(f + 1), e(w + 1) + v(f + 1), fw + f + w)$, тогда
$-(q_1 + q_2) = (e(w + 1) + v(f + 1), d(w + 1) + u(f + 1), fw + f + w)$.
$p_1 + p_2 + (-(q_1 + q_2)) = (\alpha, \beta, \gamma)$,
где $\alpha = (a(z+1)+x(c+1))(f+1)(w+1)+(e(w+1)+v(f+1))(c+1)(z+1)$,
$\beta = (b(z+1)+y(c+1))(f+1)(w+1)+(d(w+1)+u(f+1))(c+1)(z+1)$,
$\gamma = (cz + c + z)(fw + f + w) + (cz + c + z) + (fw + f + w)$.

Перегруппировывая слагаемые в первом элементе тройки, получаем
$\alpha = (a(f+1)+e(c+1))(z+1)(w+1)+(x(w+1)+v(z+1))(f+1)(c+1) =$ {используя (1) и (2)}
$= (d(c + 1) + b(f + 1))(z + 1)(w + 1) + (y(w + 1) + u(z + 1))(f + 1)(c + 1) =$ {перегруппировываем слагаемые} $= (b(z + 1) + y(c + 1))(f + 1)(w + 1) + (d(w+1)+u(f+1))(c+1)(z+1) = \beta$. Отсюда $p_1+p_2+(-(q_1+q_2)) = (\alpha, \alpha, \gamma) = (0, 0, 0)$, так как $\alpha(0 + 1) + 0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot (0 + 1) + \alpha(0 + 1)$.
Значит $p_1 + p_2 = q_1 + q_2$.

Произведение рассматривается аналогично сложению.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Для любых гиперрациональных чисел верны следующие утверждения:*

1. *Ассоциативность сложения*

$$\forall p \forall q \forall r \left((p + q) + r = p + (q + r)\right),$$

2. Существование нуля

$$\exists 0 \forall p(p+0=p),$$

3. Существование обратного элемента по сложению

$$\forall p \exists -p(p+(-p)=0),$$

4. Коммутативность сложения

$$\forall p \forall q(p+q=q+p),$$

5. Дистрибутивность

$$\forall p \forall q \forall r((p+q)\cdot r=p\cdot r+q\cdot r),$$

6. Ассоциативность умножения

$$\forall p \forall q \forall r((p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)),$$

7. Существование единицы

$$\exists 1 \forall p(p\cdot 1=p),$$

8. Существование обратного элемента по умножению

$$\forall p(p\neq 0)\supset \exists p^{-1}(p\cdot p^{-1}=1),$$

9. Коммутативность умножения

$$\forall p \forall q(p\cdot q=q\cdot p).$$

Доказательство.

1. Рассмотрим $p=(x,y,z)$, $q=(u,v,w)$ и $r=(a,b,c)$, обозначим $(p+q)+r=\alpha$, а $p+(q+r)=\beta$, тогда по определению 3.4

$\alpha=(p+q)+r=(x(w+1)+u(z+1), y(w+1)+v(z+1), zw+w+z)+r=((x(w+1)+u(z+1))(c+1)+a(z+1)(w+1), (y(w+1)+v(z+1))(c+1)+b(z+1)(w+1), zwc+zc+wc+zw+z+w+c))=$
$x(w+1)(c+1)+u(c+1)(z+1)+a(z+1)(w+1), y(w+1)(c+1)+v(c+1)(z+1)+b(z+1)(w+1), zwc+zc+wc+zw+z+w+c).$

$\beta = p+(q+r) = p+(u(c+1)+a(w+1), v(c+1)+b(w+1), wc+w+c)) = (x(w+1)(c+1)+(u(c+1)+a(w+1))(z+1), y(w+1)(c+1)+(v(c+1)+b(w+1))(z+1), zwc+zw+zc+z+wc+w+c) =$
$x(w+1)(c+1)+u(c+1)(z+1)+a(z+1)(w+1), y(w+1)(c+1)+v(c+1)(z+1)+b(z+1)(w+1), zwc+zc+wc+zw+z+w+c).$
По свойствам сложения и умножения гипернатуральных чисел следует, что $\alpha = \beta$. Ч.т.д.

2. Для любого $p = (x, y, z)$ будем искать ноль в виде (α, β, γ). Тогда по определению 3.4
$p + 0 = (x(\gamma+1)+\alpha(z+1), y(\gamma+1)+\beta(z+1), z\gamma+z+\gamma)$ и это должно быть равно $p = (x, y, z)$. Чтобы это было верно, возьмем α, γ любыми, а $\beta = \alpha$. Значит, для любого $p = (x, y, z)$ существует гиперрациональный ноль $0 = (\alpha, \alpha, \gamma) = (0, 0, 0)$, такой что $p + 0 = p$. Ч.т.д.

3. Для любого $p = (x, y, z)$ будем искать противоположный ему элемент $-p$ в виде (α, β, γ). Тогда по определению 3.4
$p + (-p) = (x(\gamma+1)+\alpha(z+1), y(\gamma+1)+\beta(z+1), z\gamma+z+\gamma)$ и это должно быть равно $0 = (a, a, b)$. Чтобы это было верно, возьмем $\alpha = y$, $\beta = x$, $\gamma = z$. Значит, для любого $p = (x, y, z)$ существует обратный по сложению элемент $-p = (y, x, z)$, такой что $p + (-p) = 0$. Ч.т.д.

4. Рассмотрим $p = (x, y, z)$ и $q = (u, v, w)$, $p+q = (x(w+1)+u(z+1), y(w+1)+v(z+1), zw+z+w)$. По свойствам сложения и умножения гипернатуральных чисел следует, что $p+q = (u(z+1)+x(w+1), v(z+1)+y(w+1), zw+z+w) = q+p$. Ч.т.д.

5. Рассмотрим $p = (x, y, z)$, $q = (u, v, w)$ и $r = (a, b, c)$, обозначим $(p+q)\cdot r = \alpha$, а $p\cdot r + q\cdot r = \beta$, тогда по определению 3.4

$\alpha = (p+q)\cdot r = (x(w+1)+u(z+1), y(w+1)+v(z+1), zw+w+z)\cdot r = (ax(w+1)+au(z+1)+by(w+1)+bv(z+1), bx(w+1)+bu(z+1)+ay(w+1)+av(z+1), czw+cz+cw+zw+z+w+c) = ((ax+by)(w+1)+(au+bv)(z+1), (bx+ay)(w+1)+(bu+av)(z+1), czw+cz+cw+zw+z+w+c).$

$\beta = p\cdot r+q\cdot r = (xa+yb, xb+ya, zc+z+c)+(ua+vb, ub+va, wc+w+c) = ((xa+yb)(w+1)(c+1)+(ua+vb)(z+1)(c+1), (xb+ya)(w+1)(c+1)+(ub+va)(z+1)(c+1), (z(c+1)+c)(w(c+1)+c)+z(c+1)+c+w(c+1)+c) =$
$((xa+yb)(w+1)(c+1)+(ua+vb)(z+1)(c+1), (xb+ya)(w+1)(c+1)+$

$(ub + va)(z + 1)(c + 1), (c + 1)(czw + zw + cw + cz + z + w + c) + c) =$
$\{$ так как $\forall x, y, z, c((xc, yc, (z + 1)c) = (x, y, z))$ то $\}$
$= ((xa + yb)(w + 1) + (ua + vb)(z + 1), (xb + ya)(w + 1) + (ub + va)(z + 1), czw + zw + cw + cz + z + w + c)$.
По свойствам сложения и умножения гипернатуральных чисел следует, что $\alpha = \beta$. Ч.т.д.

6. Доказывается аналогично п 5.

7. Рассмотрим $p = (x, y, z)$, $q = (u, v, w)$ и $r = (a, b, c)$, обозначим $(p \cdot q) \cdot r = \alpha$, а $p \cdot (q \cdot r) = \beta$, тогда по определению 3.4

$\alpha = (p \cdot q) \cdot r = (xu + yv, xv + yu, zw + z + w) \cdot r = (axu + ayv + bxv + byu, bxu + byv + axv + ayu, czw + zc + wc + zw + z + w + c)$.

$\beta = p \cdot (q \cdot r) = p \cdot (ua + vb, ub + va, wc + w + c) = (xua + xvb + yub + yva, yua + yvb + xub + xva, zwc + zw + zc + z + wc + w + c)$.

По свойствам сложения и умножения гипернатуральных чисел следует, что $\alpha = \beta$. Ч.т.д.

8. Для любого $p = (x, y, z)$ будем искать единицу в виде (α, β, γ). Необходимо, чтобы $p \cdot 1 = p$, то есть $p \cdot 1 = (x\alpha + y\beta, x\beta + y\alpha, z\gamma + z + \gamma) = (x, y, z)$. С другой стороны число p соответствует $(x - y)/(z + 1)$, а число (α, β, γ) соответствует $(\alpha - \beta)/(\gamma + 1)$. Тогда нам надо, чтобы $(x - y)/(z + 1) \cdot (\alpha - \beta)/(\gamma + 1) = (x - y)/(z + 1)$. Для этого возьмем $\alpha - \beta = 1 \,\&\, \gamma = 0$. Тогда для любого $p = (x, y, z)$ существует гиперрациональная единица $1 = (\alpha + 1, \alpha, 0) = (1, 0, 0)$, такая что $p \cdot 1 = p$. Ч.т.д.

9. Для любого $p = (x, y, z)$ будем искать обратный по умножению к нему элемент p^{-1} в виде (α, β, γ). Необходимо, чтобы $p \cdot p^{-1} = 1$, то есть $p \cdot p^{-1} = (x\alpha + y\beta, x\beta + y\alpha, z\gamma + z + \gamma) = (1, 0, 0)$. С другой стороны число p соответствует $(x - y)/(z + 1)$, а число (α, β, γ) соответствует $(\alpha - \beta)/(\gamma + 1)$. Тогда нам надо, чтобы $(x - y)/(z + 1) \cdot (\alpha - \beta)/(\gamma + 1) = 1$. Для этого возьмем $\alpha = z \,\&\, \beta = -1 \,\&\, \gamma = x - y - 1$. Это можно сделать, если $p \neq 0$, что эквивалентно тому, что $x \neq y$. Тогда для любого $p = (x, y, z)$ существует обратный по умножению к нему элемент $p^{-1} = (z, -1, x - y - 1)$, такой что $p \cdot p^{-1} = 1$. Ч.т.д.

10. Рассмотрим $p = (x, y, z)$, $q = (u, v, w)$. обозначим $p \cdot q = \alpha$, а

$q \cdot p = \beta$, тогда по определению
$\alpha = p \cdot q = (xu + yv, xv + yu, zw + z + w)$.
$\beta = q \cdot p = (ux + vy, vx + uy, wz + w + z)$.
По свойству коммутативности сложения и умножения гипернатуральных чисел следует, что $\alpha = \beta$. Ч.т.д.

Замечание 3.1. *Теорема 3.3 говорит о том, что гиперрациональные числа образуют поле.*

Теорема 3.4.

$$\forall p \forall q \left(\exists u \exists v (p = (u, 0, 0) \& q = (v, 0, 0) \supset (p = q \equiv u = v))\right).$$

Доказательство.
Рассмотрим $p = (u, 0, 0)$ и $q = (v, 0, 0)$, тогда по определению $p = q$ если $u(0+1)+0(0+1) = v(0+1)+0(0+1) \equiv u = v$, отсюда $p = q \equiv u = v$. Ч.т.д.

Теорема 3.5.

$$\forall p \forall q \left(\exists u \exists v (p = (u, 0, 0) \& q = (v, 0, 0) \supset (p + q = u + v) \& (p \cdot q = u \cdot v))\right).$$

Доказательство.
Рассмотрим $p = (u, 0, 0)$ и $q = (v, 0, 0)$, тогда по определению $p + q = (u(0 + 1) + v(0 + 1), 0(0 + 1) + 0(0 + 1), 0 \cdot 0 + 0 + 0) = (u + v, 0, 0)$. Тогда $N(p + q)$, значит тройка $(u + v, 0, 0)$ соответствует гипернатуральному числу $u + v$. Отсюда можно считать, что $p + q = u + v$.

Рассмотрим произведение $p \cdot q = (u \cdot v + 0 \cdot 0, 0 \cdot u + v \cdot 0, 0 \cdot 0 + 0 + 0) = (u \cdot v, 0, 0)$. Тогда $N(p \cdot q)$, значит тройка $(u \cdot v, 0, 0)$ соответствует гипернатуральному числу $u \cdot v$. Отсюда можно считать, что $p \cdot q = u \cdot v$. Ч.т.д.

Теоремы 3.4 и 3.5 показывают, что операции над гиперрациональными числами являются продолжением соответствующих операций над гипернатуральными числами в HAP. Таким образом, формализованная теория гиперрациональных чисел является расширением HAP.

Теорема 3.6. *Рассмотрим расширение теории AP, которое получается тем же способом, что и теория гиперрациональных чисел. Тогда теория гиперрациональных чисел является консервативным расширением теории рациональных чисел.*

Доказательство легко получается из того факта, что по сравнению с рациональными числами в теории гиперрациональных чисел имеется терм Ω дающий бесконечно большие числа.

Приведенная теорема показывает, что для теорий гиперрациональных и рациональных чисел справедлив принцип переноса.

Таким образом, если мы имеем стандартную рациональную функцию, то она имеет продолжение на гиперрациональные числа, которое обладает теми же свойствами 1го порядка (которые можно выразить в языке теории рациональных чисел).

Определение 3.5. *Гиперрациональное число $p = (x, y, z)$ будем называть положительным (обозначим это отношение как $p > 0$), если*

$$\exists u\,(N(u)\&(u \neq 0)\&x = y + u)\,,$$

и будем называть его отрицательным,если $-p > 0$ (обозначим это как $p < 0$).

Определение 3.6. *Будем говорить, что гиперрациональное число p больше гиперрационального числа q (обозначим это отношение символом $>$), если*

$$p + (-q) > 0,$$

и будем говорить, что гиперрациональное число p меньше гиперрационального числа q, если $q > p$ (обозначим это как $p < q$).

Определение 3.7. *Будем говорить, что гиперрациональное число p „не меньше“ гиперрационального числа q (обозначим это отношение как $\geq$), если*

$$(p > q) \vee (p = q),$$

и будем говорить, что гиперрациональное число p „не больше“ гиперрационального числа q, если $q \geq p$ (обозначим это как $p \leq q$).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. *Для гиперрациональных чисел верны следующие утверждения:*

1. $\forall p \forall q\,(p > q \& q > r \supset p > r)$,

2. $\forall p \forall q\,(p > q \supset \forall r\,(p + r > q + r))$,

3. $\forall p \forall q\,(p > q \supset \forall r\,(r > 0 \supset p \cdot r > q \cdot r))$,

4. $\forall p \forall q\,(p > q \supset \forall r\,(r < 0 \supset p \cdot r < q \cdot r))$.

Определение 3.8. *Модулем гиперрационального числа p назовем наибольшее из двух чисел p и $-p$.*

Определение 3.9. *Гиперрациональное число p будем называть конечным, если оно не больше (меньше или равно) по модулю некоторого положительного рационального числа. Т.е. p —конечно, если существует рациональное n, такое что $|p| \leq n$.*

Определение 3.10. *Гиперрациональное число p будем называть бесконечно большим, если для всех положительных рациональных n верно $|p| > n$.*

Определение 3.11. *Гиперрациональное число p будем называть бесконечно малым (и обозначать как $p \approx 0$), если $p = 0$ или существует бесконечно большое W такое, что $p = W^{-1}$.*

Замечание 3.2. *Понятия бесконечно малого и бесконечно большого числа, а так же отношение бесконечной близости не выразимы в теории гиперрациональных чисел, так как в языке этой теории нет предиката, выделяющего одно из этих понятий. Понятия, не выразимые в языке теории, называют внешними, в противовес внутренним, выразимых в теории. Таким образом, понятия, связанные с бесконечной малостью являются внешними по отношению к теории гиперрациональных чисел. Рассуждая формально, мы должны рассматривать некоторую метатеорию для теории гиперрациональных чисел, которая содержит предикатный символ для свойства "быть бесконечно малым"(или "бесконечно большим"), или отношения бесконечной близости. Мы, однако, не будем формализовать эту метатеорию, предпочитая ее неформальную форму. Формализация этой метатеории приводит к аналогу теории внешних множеств Нельсона.*

Теорема 3.8. *Для гиперрациональных чисел верны следующие утверждения:*

1. *Сумма бесконечно больших чисел одного знака является бесконечно большим, и произведение бесконечно больших является бесконечно большим.*

2. *Произведение бесконечно большого на конечное дает бесконечно большое.*

3. *Сумма и произведение бесконечно малых является бесконечно малыми.*

4. *Произведение конечного на бесконечно малое дает бесконечно малое.*

5. *Сумма и произведение конечных чисел является конечным числом.*

6. *Отношение конечных чисел конечно, если знаменатель не бесконечно мал.*

Доказательство.

1. 1) Рассмотрим сумму бесконечно больших чисел одного знака. Пусть W_1, W_2 — положительные бесконечно большие числа. По определению для любых положительных рациональных n_1, n_2 $|W_1| = W_1 > n_1$, $|W_2| = W_2 > n_2$. Рассмотрим $|W_1 + W_2| = W_1 + W_2 = |W_1| + |W_2| > n_1 + n_2$, $n_1 + n_2$ обозначим за n_3. Тогда для любого положительного рационального n_3 $|W_1 + W_2| > n_3$, по определению $W_1 + W_2$ — бесконечно большое.

   Пусть W_1, W_2 — отрицательные бесконечно большие числа. По определению для любых положительных рациональных n_1, n_2 $|W_1| = -W_1 > n_1$, $|W_2| = -W_2 > n_2$. Рассмотрим $|W_1 + W_2| = -(W_1 + W_2) = (-W_1) + (-W_2) > n_1 + n_2$, $n_1 + n_2$ обозначим за n_3. Тогда для любого положительного рационального n_3 $|W_1 + W_2| > n_3$, по определению $W_1 + W_2$ — бесконечно большое.

   2) Рассмотрим произведение бесконечно больших чисел. Пусть W_1, W_2 — бесконечно большие числа. По определению для любых положительных рациональных n_1, n_2 $|W_1| > n_1$, $|W_2| > n_2$. Рассмотрим $|W_1 \cdot W_2| = |W_1| \cdot |W_2| > n_1 \cdot n_2$, $n_1 \cdot n_2$ обозначим за n_3. Тогда для любого положительного рационального n_3 $|W_1 \cdot W_2| > n_3$, по определению $W_1 \cdot W_2$ — бесконечно большое.

2. Рассмотрим произведение бесконечно большого W и конечного p. Для любого рационального положительного n по определению бесконечно большого $W > \dfrac{n}{m}$, где m — рациональное число такое, что $|p| \leq m$. Следовательно, $|W \cdot p| = |W| \cdot |p| > n$ для любого рационального положительного n.

   Тогда по определению $W \cdot p$ — бесконечно большое.

   Лемма 3.1. $\varepsilon \approx 0$ *тогда и только тогда, когда для любого положительного рационального числа* r *верно* $|\varepsilon| < r$.

Доказательство очевидно.

3. Пусть ε, δ — бесконечно малые. Тогда по определению существует бесконечно большие W_1, W_2 такие, что $\varepsilon = W_1^{-1}$ или $\varepsilon = 0$ и $\delta = W_2^{-1}$ или $\delta = 0$. Случай, если $\varepsilon = 0$ или $\delta = 0$ тривиален, т.к. $\varepsilon + 0 = 0$, $\varepsilon \cdot 0 = 0$ и $\delta + 0 = 0$, $\delta \cdot 0 = 0$, а ноль — бесконечно мал. Если $\varepsilon \neq 0 \& \delta \neq 0$, то воспользуемся леммой 3.1.
   1) Рассмотрим сумму $\varepsilon + \delta$, $\varepsilon \approx 0$, $\delta \approx 0$, по лемме 3.1. для любых положительных рациональных чисел r и $\tilde{r}$ верно $|\varepsilon| < r$, $\delta < \tilde{r}$, тогда $|\varepsilon + \delta| \leq |\varepsilon| + |\delta| < r + \tilde{r}$, пусть $n = r + \tilde{r}$, тогда для любого положительного рационального n верно $|\varepsilon + \delta| < n$.
   Отсюда по лемме 3.1 . заключаем, что $\varepsilon + \delta$ — бесконечно малое.
   2) Рассмотрим произведение $\varepsilon \cdot \delta$, $\varepsilon \approx 0$, $\delta \approx 0$, по лемме 3.1. для любых положительных рациональных чисел r и $\tilde{r}$ верно $|\varepsilon| < r$, $\delta < \tilde{r}$, тогда $|\varepsilon \cdot \delta| = |\varepsilon| + |\delta| < r \cdot \tilde{r}$, пусть $n = r \cdot \tilde{r}$, тогда для любого положительного рационального n верно $|\varepsilon \cdot \delta| < n$.

   Отсюда по лемме 3.1. заключаем, что $\varepsilon \cdot \delta$ — бесконечно малое.

4. Пусть p — конечное гиперрациональное число, а ε — бесконечно малое. Тогда по определению существует положительное рациональное n, такое что $|p| \leq n$, и существует бесконечно большое W_1, такое что $\varepsilon = W_1^{-1}$ или $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon = 0$, то случай тривиален, так как $p \cdot 0 = 0$, а ноль — бесконечно мал. Если $\varepsilon \neq 0$, то $p \cdot \varepsilon = p \cdot W_1^{-1} \leq |p| \cdot W_1^{-1} \leq n \cdot W_1^{-1} = (n^{-1} \cdot W_1)^{-1}$, так как n — положительное рациональное число, то существует бесконечно большое W_2, такое что $(n^{-1} \cdot W_1) = W_2$, тогда по определению $p \cdot \varepsilon = \gamma$, где γ — бесконечно малое.

5. Пусть p, q — конечные гиперрациональные числа, тогда по определению существуют положительные рациональные n_1, n_2, такие что $|p| \leq n_1$, $|q| \leq n_2$. Рассмотрим модуль суммы $|p+q| \leq |p|+|q| \leq n_1 + n_2 = n_3$, где n_3 — некоторое положительное рациональное число. Тогда по определению $p + q$ конечно.

   Рассмотрим модуль произведения $|p \cdot q| = |p| \cdot |q| \leq n_1 \cdot n_2 = n_3$, где n_3 — некоторое положительное рациональное число. Тогда по определению $p \cdot q$ конечно.

6. Пусть p, q — конечные гиперрациональные числа и $q \not\approx 0$, тогда по определению существуют положительные рациональные n_1, n_2, такие что $|p| \leq n_1$, $|q| \leq n_2$. Рассмотрим модуль четного $|\dfrac{p}{q}| =$

$\dfrac{|p|}{|q|} \le \dfrac{n_1}{n_2} = n_3$, где n_3 — некоторое положительное рациональное число. Тогда по определению $\dfrac{p}{q}$ конечно.

Теорема доказана.

Определение 3.12. *Гиперрациональные числа p и q будем называть “бесконечно близкими“(и обозначать как $p \approx q$), если $p + (-q) \approx 0$.*

Лемма 3.2. *Пусть p — гиперрациональное число, не являющееся бесконечно малым. Тогда для любого бесконечно малого ε $p + \varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $p > 0$.*

Доказательство.

Достаточность. Пусть сначала $\varepsilon > 0$. Тогда, очевидно, что $p + \varepsilon > 0$. Если же $\varepsilon < 0$, то в силу того, что p не является бесконечно малым, $p > -\varepsilon$, то есть $p + \varepsilon > 0$.

Необходимость. Если $\varepsilon > 0$, то $p + \varepsilon > \varepsilon$ и, следовательно, $p > 0$. Если же $\varepsilon < 0$, то $-\varepsilon > 0$. Тогда $p = p + \varepsilon - \varepsilon > 0$.

Лемма 3.2 доказана.

Определение 3.13. *Будем говорить, что гиперрациональное число p „не меньше с точностью до бесконечно малой“ гиперрационального числа q (обозначим это отношение символом $\gtrsim$), если*

$$(p > q) \vee (p \approx q),$$

и будем говорить, что гиперрациональное число p „не больше с точностью до бесконечно малой“ гиперрационального числа q, если $q \gtrsim p$ (обозначим это символом $p \lesssim q$).

Определение 3.14. *Монада числа p — совокупность всех гиперрациональных чисел бесконечно близких к p. Обозначается $\mu(p)$. Будем писать $x \in \mu(p)$, если $x \approx p$.*

Теорема 3.9. *Для любых гиперрациональных чисел p, q и r*

1.

$$(p \approx p);$$

2.

$$(p \approx q \Leftrightarrow q \approx p);$$

3.

$$(p \approx q \& q \approx r \supset p \approx r).$$

Доказательство.

1. Рассмотрим $p = (x, y, z)$, тогда $-p = (y, x, z)$. $p + (-p) = (x(z+1) + y(z+1), y(z+1) + x(z+1), z(z+1)) = (x+y, y+x, z) = (0, 0, 0)$ и, следовательно, бесконечно мало, поэтому $\forall p(p \approx p)$. Ч.т.д.

2. **Лемма 3.3.** $r \approx 0$ *тогда и только тогда, когда* $-r \approx 0$.

   Доказательство.

   $r \approx 0$ т.к. произведение конечного на бесконечно малое дает бесконечно малое, то $(-1) \cdot r \approx 0$. Обратное доказывается аналогично.

   Лемма доказана.

   Обозначим $p + (-q) = r$, домножим обе части на -1, тогда $q + (-p) = -r$. Если $r \approx 0$, то $-r \approx 0$ и наоборот. Отсюда для всех p и q ($p \approx q$ влечет $q \approx p$). Ч.т.д.

3. $p \approx q \,\&\, q \approx r$, тогда $p + (-q) \approx 0$ и $q + (-r) \approx 0$, складывая, получаем (сложим последние два равенства, получим) $p + (-r) \approx 0$ влечет $p \approx r$. Отсюда для всех p и q $(p \approx q \& q \approx r \supset p \approx r)$. Ч.т.д.

Данная теорема показывает, что отношение бесконечной близости является отношением эквивалентности. И следовательно все конечные гиперрациональные числа разбиваются на непересекающиеся монады.

Монада не может содержать более одного рационального числа. Мы рассматриваем конечные гиперрациональные числа и их монады, так как именно их монады дают аналоги вещественных чисел. Некоторые монады содержат рациональное число, а некоторые — нет. Монада, не содержащая рационального числа, по существу определяет иррациональное число с точностью до бесконечно малой. Таким образом, мы имеем вещественные числа с погрешностью: каждое вещественное число определяется с точностью до бесконечно малой.

4. Гиперрациональные функции

Определение 4.1. *P — формула с двумя свободными переменными для гиперрациональных чисел. Если $\forall\alpha\forall\beta\gamma\,(P(\alpha,\beta)\&P(\alpha,\gamma)\supset\beta=\gamma)$, и $\forall\alpha\exists\beta P(\alpha,\beta)$, то говорят, что P определяет гиперрациональную функцию.*

Функции будем обозначать f, g и т.д.

Пусть a, b — гиперрациональные числа, а $\langle a, b\rangle$ — промежуток любого из следующих видов: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$.

Определение 4.2. *Функция f называется равномерно непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$, если для всех p и q из промежутка $\langle a, b\rangle$ из $p\approx q$ следует, что $f(p)\approx f(q)$.*

Определение 4.3. *Пусть P — формула в теории гиперрациональных чисел с единственной свободной переменной. Будем говорить, что $p\in\{x : P(x)\}$, если p — гиперрациональное число и $\vdash P(p)$.*

Приведенное определение позволяет в теории гиперрациональных чисел рассматривать множества, точнее не все, а только внутренние — определимые в этой теории. Отметим, что монады являются внешними множествами.

Определение 4.4. *Пусть μ — некоторая монада*[2]*. Функция f называется непрерывной в монаде μ, если для всех элементов этой монады значения функции бесконечно близки.*

Определение 4.5. *Функция f называется равномерно непрерывной на множестве E, если она непрерывна в монаде каждого элемента множества E.*

Теория равномерно непрерывных функций на промежутках гиперрациональных чисел изложена в [2].

Теорема 4.1. *Если функции f и g равномерно непрерывны на промежутке $\langle a, b\rangle$, где a, b — гиперрациональные числа, то на этом промежутке равномерно непрерывны функции h_1 и h_2, определяемые равенствами*

$$h_1(x) = f(x) + g(x) \text{ и } h_2(x) = f(x) - g(x).$$

[2]то есть $\mu = \mu(p)$ для некоторого числа p.

Теорема 4.2. *Если функции f и g равномерно непрерывны на промежутке $\langle a, b\rangle$, где a, b — гиперрациональные числа, и принимают на нем только конечные гиперрациональные значения, то на этом промежутке будет равномерно непрерывна функция h_1, определяемая равенством $h_1(x) = f(x) \times g(x)$, и, если функция g не принимает на $\langle a, b\rangle$ бесконечно малых значений, то функция h_2, определяемая равенством $h_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, будет также равномерно непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$.*

Теорема 4.3. *Если функция f определена и равномерно непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$, где a, b — гиперрациональные числа и функция g определена и равномерно непрерывна на промежутке с гиперрациональными концами, содержащем значения функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$, то функция h, определяемая равенством $h(x) = g(f(x))$, равномерно непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$.*

Теорема 4.4. *Пусть функция f определена и равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, где a, b — рациональные числа и $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует гиперрациональное число c, такое что $a < c < b$ и $f(c) \approx 0$.*

Теорема 4.5. *Пусть функция f определена и равномерно непрерывна на некотором промежутке, задаваемом двумя рациональными числами a и b, такими что, $a < b$, и на его концах принимает неравные значения A и B, такие что $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такое число c, лежащее между a и b, что $f(c) \approx C$.*

Определение 4.6. *Будем говорить, что функция f имеет размытый максимум в точке p на промежутке $\langle a, b\rangle$, если для любой точки q из промежутка $\langle a, b\rangle$ верно $f(q) \lesssim f(p)$. Функция f имеет размытый минимум в точке p на промежутке $\langle a, b\rangle$, если для любой точки q из промежутка $\langle a, b\rangle$ верно $f(q) \gtrsim f(p)$.*

Теорема 4.6 (Вейерштрасса). *Если функция f определена и равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, где a, b — рациональные числа, то она достигает своего размытого максимума и минимума на $[a, b]$. Т.е. найдется число C на отрезке $[a, b]$, такое что $\forall x \in [a, b]\,(f(C) \lesssim f(x))$ и найдется число c из промежутка $[a, b]$, такое что $\forall x \in [a, b]\,(f(c) \gtrsim f(x))$.*

Доказательство этих утверждений имеется в [2].

Определение 4.7. *Функция f дифференцируема в монаде точки c, если для всех $p, q \in \mu(c)$ существует конечное число A, такое что $f(p) - f(q) = A \cdot (p - q) + o(p - q)$, где $o(x) = \varepsilon \cdot x, \varepsilon \approx 0$. Число A назовем производной функции f в $\mu(c)$.*

Пусть A — производная функции f в монаде μ. Тогда $A \approx \dfrac{f(p) - f(q)}{p - q}$. Введем обозначение $\dfrac{Df}{d\mu(c)} \rightleftharpoons \{A + \varepsilon, \, \varepsilon \approx 0\}$ — монада производной функции f в $\mu(c)$, то есть — класс производных. Таким образом, производная функции определяется с точность до бесконечно малой и $f(p) - f(q) = \dfrac{Df}{d\mu(c)} \cdot (p - q) + o(p - q)$. Дальше будем работать не с классом производных $\dfrac{Df}{d\mu(c)}$, а с представителем класса $f'(c)$.

Определение 4.8. *Функция f равномерно дифференцируема на $\langle a, b \rangle$, если она дифференцируема в монаде каждой точки $\langle a, b \rangle$.*

Замечание 4.1. *Согласно данному определению, функция равномерно дифференцируема во всей монаде, то есть бесконечно близким точкам соответствуют бесконечно близкие значения производной. С точки зрения теории вещественных функций это означает непрерывную дифференцируемость.*

Теорема 4.7. *Дифференцируемая функция является равномерно непрерывной, но не обратно.*

Доказательство.

Необходимость:
Пусть функция f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ в монаде точки c $\mu(c)$, тогда $\forall p, q \in \mu(c)$ существует конечное число A, такое что $f(p) - f(q) = A \cdot (p - q) + o(p - q)$, где $o(x) = \varepsilon \cdot x, \varepsilon \approx 0$. Если $p - q \approx 0$, то $f(p) \approx f(q)$. Значит для любых $p \approx q$ $f(p) \approx f(q)$, $f(x)$ равномерно непрерывна на $\langle a, b \rangle$.

Достаточность: Приведем контр-пример. Рассмотрим функцию $f = |p|$. В монаде нуля f не дифференцируема, но f равномерно непрерывна на любом промежутке $\langle a, b \rangle$, содержащем ноль. Ч.т.д.

Теорема 4.8 (Простейшие свойства дифференцируемых функций). *Рассмотрим функции u, v дифференцируемые на гиперрациональных числах в монаде любого числа x_0 $\mu(x_0)$, x_0 из промежутка (a, b) где a, b — гиперрациональные числа.*

1. *Производная постоянной функции равна нулю. Действительно, если* $u = c$, *где* $c = const$ *для всех* x *из* (a, b), *тогда для всех* x_0 *из* (a, b) *для любого* $x \in \mu(x_0)$ *существует* $u'(x) = 0$.

2. *Производная постоянной с точностью до бесконечно малой функции бесконечно мала (почти ноль). Действительно, пусть* $u \approx c$, *где* $c = const$ *для всех* x *из* (a, b). *Тогда для всех* x_0 *из* (a, b) *для любого* $x \in \mu(x_0)$ *существует* $u'(x) \approx 0$.

3. *Производная суммы(разности) функций почти равна сумме (разности) производных функций: для всех* x_0 *из* (a, b) *для любого* $x \in \mu(x_0)$ *существует* $(u \pm v)'(x) \approx u'(x) \pm v'(x)$.

4. *Производная произведения функций почти равна сумме произведения производной*
первой функции на вторую функцию и производной второй функции на первую функцию: для всех x_0 *из* (a, b) *для любого* $x \in \mu(x_0)$ *существует* $(u \cdot v)'(x) \approx u' \cdot v(x) + v' \cdot u(x)$, *в частности* $(c \cdot u)'(x) \approx c \cdot u'(x)$, *где* $c = const$ *в* $\mu(x_0)$.

5. *Производная частного функций: для всех* x_0 *из* (a, b) *и для любого* $x \in \mu(x_0)$, *если* $v(x) \not\approx 0$ *в* $\mu(x_0)$ *существует* $(\frac{u}{v})'(x) \approx \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$, *в частности* $(\frac{c}{v})'(x) \approx \frac{-c \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ *где* $c = const$ *в* $\mu(x_0)$.

Доказательство.

1. Пусть функция $u = c$, где $c = const$ для всех x из (a, b), функция u дифференцируема на гиперрациональных числах в монаде любого числа x_0 $\mu(x_0)$, тогда для любых $p, q \in \mu(x_0)$ верно $u(p) - u(q) = u'(x_0) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q)$, $\alpha \approx 0$, $u(p) - u(q) = 0$, тогда (для удобства) положим $u'(x_0) = 0$, $\alpha = 0$ Следовательно, $u' = 0$ ч.т.д

2. Пусть функция $u \approx c$, где $c = const$ для всех x из (a, b), функция u дифференцируема на гиперрациональных числах в монаде любого числа x_0 $\mu(x_0)$, тогда для любых $p, q \in \mu(x_0)$ верно $u(p) - u(q) = u'(x_0) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q)$, $\alpha \approx 0$, $u(p) - u(q) \approx 0$ влечет $u'(x_0) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q) \approx 0$. Домножим обе части равенства на $(p - q)^{-1}, p - q \neq 0$. Тогда получим $u'(x_0) \approx -\alpha \approx 0$, то есть $u' \approx 0$ ч.т.д

3. Пусть для любой точки x_0 для всех x из (a, b) $y(x) = (u \pm v)(x)$, y,u, v — дифференцируемы в $x \in \mu(x_0)$. Для всех $p, q \in \mu(x_0)$ верно $y(p) - y(q) = y'(x_0) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q)$, $\alpha \approx 0$. Подставим $y(x) = (u \pm v)(x)$, тогда $(u \pm v)(p) - (u \pm v)(q) = u(p) \pm v(p) - u(q) \mp v(q) = u(p) - u(q) \pm (v(p) - v(q)) = u'(x_0) \cdot (p-q) \pm v'(x_0) \cdot (p-q) + \varepsilon \cdot (p-q) + \delta \cdot (p-q) = \{\varepsilon, \delta \approx 0\} = (u' \pm v')(x_0) \cdot (p-q) + \alpha \cdot (p-q), \alpha \approx 0$.

   Таким образом, $(u \pm v)' \approx u' \pm v'$ ч.т.д

4. Пусть для любой точки x_0 для всех x из (a, b) $y(x) = (u \cdot v)(x)$, y,u, v — дифференцируемы в $\mu(x_0)$. Для всех $p, q \in \mu(x_0)$ верно $y(p) - y(q) = y'(x_0) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q)$, $\alpha \approx 0$. Подставим $y(x) = (u \cdot v)(x)$, тогда $(u \cdot v)(p) - (u \cdot v)(q) = u(p) \cdot v(p) - u(q) \cdot v(q) = u(p) \cdot v(p) - u(q) \cdot v(q) \pm u(q) \cdot v(p) = (u(p) - u(q)) \cdot v(p) + u(q) \cdot (v(p) - v(q)) = (u'(x_0) \cdot (p - q) + \varepsilon \cdot (p - q)) \cdot v(p) + (v'(x_0) \cdot (p - q) + \delta \cdot (p - q)) \cdot u(q) = u'(x_0) \cdot (p - q) \cdot v(p) + \tilde{\varepsilon} \cdot (p - q) + v'(x_0) \cdot (p - q) \cdot u(q) + \tilde{\delta} \cdot (p - q) = u'(x_0) \cdot (p - q) \cdot v(p) + v'(x_0) \cdot (p - q) \cdot u(q) + \alpha \cdot (p - q) = (u'(x_0) \cdot v(p) + v'(x_0) \cdot u(q)) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q) \approx \{$ так как u, v равномерно непрерывны $p \approx q \approx x_0$ влечет $v(p) \approx v(q) \approx v(x_0)$, $u(p) \approx u(q) \approx u(x_0))\} \approx ((u' \cdot v)(x_0) + (v' \cdot u)(x_0) \cdot (p - q)) + \alpha \cdot (p - q)$

   Следовательно, $(u \cdot v)' \approx u' \cdot v + v' \cdot u$ ч.т.д.

5. Пусть для любой точки x_0 для всех x из (a, b) $v(x) \not\approx 0$ в $\mu(x_0)$ $y(x) = \dfrac{u}{v}(x)$, y,u, v — дифференцируемы в $\mu(x_0)$. Для всех $p, q \in \mu(x_0)$ верно $y(p) - y(q) = y'(x_0) \cdot (p - q) + \alpha \cdot (p - q)$, $\alpha \approx 0$. Подставим $y(x) = \dfrac{u}{v}(x)$, тогда $\dfrac{u}{v}(p) - \dfrac{u}{v}(q) = \dfrac{u(p)}{v(p)} - \dfrac{u(q)}{v(q)} =$
   $$\frac{u(p) \cdot v(q) - u(q) \cdot v(p)}{v(p) \cdot v(q)} = \frac{u(p) \cdot v(q) - u(q) \cdot v(p) \pm u(q) \cdot v(q)}{v(p) \cdot v(q)} =$$
   $$= \frac{(u(p) - u(q)) \cdot v(q) - u(q) \cdot (v(p) - v(q))}{v(p) \cdot v(q)} =$$
   $$= \frac{[u'(x_0) \cdot (p - q) + \varepsilon \cdot (p - q)] \cdot v(q)}{v(p) \cdot v(q)} -$$
   $$- \frac{[v'(x_0) \cdot (p - q) + \delta \cdot (p - q)] \cdot u(q)}{v(p) \cdot v(q)} =$$
   $$\frac{(u'(x_0) \cdot v(q) - v'(x_0) \cdot u(q)) \cdot (p - q) + \gamma \cdot (p - q)}{v(p) \cdot v(q)} \approx$$
   $\{$ так как u, v равномерно непрерывны $p \approx q \approx x_0$ влечет $v(p) \approx v(q) \approx v(x_0)$, $u(p) \approx u(q) \approx u(x_0))\} \approx$

$$\approx \left[\frac{u'(x_0)\cdot v'(x_0) - v'(x_0)\cdot u(x_0)}{v^2(x_0)}\right]\cdot (p-q) + \alpha\cdot(p-q)$$

Теорема доказана.

5. Французские теоремы

В этом параграфе мы приведем теоремы о свойствах равномерно дифференцируемых функциях, являющиеся аналогами классических французских теорем.

Теорема 5.1 (Ферма). *Пусть функция f определена и равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$, где a,b — гиперрациональные числа, дифференцируема в монаде гиперрациональной точки c из (a,b), т.е. существует $\dfrac{Df}{d\mu(c)}$. Пусть, далее, f имеет размытый максимум(или минимум) в точке c.*

Пусть, далее в $\mu(c)$ функция не является строго возрастающей, то есть существует интервал $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ бесконечно малой длины в котором функция имеет наибольшее значение или постоянна.

Тогда для любого представителя класса $f'(c) \in \dfrac{Df}{d\mu(c)}$ верно $f'(c)\approx 0$.

Доказательство.

f имеет размытый максимум в точке c, то для любого $q\in\mu(c)$ $\quad f(q) \lesssim f(c)$. Существует $\dfrac{Df}{d\mu(c)}$, поэтому для любого $q\in\mu(c)$ $\quad f(c)-f(q) = f'(c)\cdot(c-q)+o(c-q)$. Так как $f(c)\gtrsim f(q)$ $f'(c)\cdot(c-q)+o(c-q)\gtrsim 0$. Если $c-q=0$ то верно $0\gtrsim 0$, если $c-q>0$, то $f'(c)+\varepsilon\gtrsim 0$, по лемме 3.2 $f'(c)\gtrsim 0$. Если $c-q<0$, то $f'(c)+\varepsilon\lesssim 0$, по лемме 3.2 $f'(c)\lesssim 0$. Значит $f'(c)\approx 0$.

Теорема Ферма доказана.

Теорема 5.2 (Ролля). *Если функция f определена и равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$, где a,b — рациональные числа, равномерно дифференцируема на (a,b), не имеет монад роста, $f(a)\approx f(b)$, то существует c из (a,b) так что, для любого представителя класса $f'(c)\in\dfrac{Df}{d\mu(c)}$ верно $f'(c)\approx 0$.*

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса f имеет размытый максимум на $[a,b]$, тогда для любой p из $[a,b]$ верно $f(C)\gtrsim f(p)$.

Случай 1. $a < C < b$.
f дифференцируема в $\mu(C)$, для $p, q \in \mu(C)$ $\quad f(p) - f(q) = f'(C) \cdot (p - q) + \varepsilon \cdot (p - q)$, $\varepsilon \approx 0$.

Тогда по теореме Ферма $f'(C) \approx 0$.

Случай 2. $C = a$. Точка размытого максимума совпадает с одним из концов промежутка.
Тогда рассмотрим точку размытого минимума c, которая существует по Теореме Вейерштрасса. 1. Если точка минимума c лежит строго в промежутке (a, b), то функция f дифференцируема в $\mu(c)$, для $p, q \in \mu(c)$ $\quad f(p) - f(q) = f'(c) \cdot (p - q) + \varepsilon \cdot (p - q)$, $\varepsilon \approx 0$. Тогда по Теореме Ферма $f'(c) \approx 0$.

2. Если точка минимума c совпадает с b (если совпадает с a, то функция f почти постоянна, и ее производная почти ноль), и по условию $f(a) \approx f(b)$, а значит $f(C) \approx f(c)$, то функция f почти постоянна.

Тогда по свойству 2 дифференцируемых функций $f'(C) \approx 0$.

Случай 3. $c = b$ рассматривается аналогично случаю 2.

Получаем, что существует c из (a, b) такая что, для любого представителя класса $f'(c) \in \dfrac{Df}{d\mu(c)}$ верно $f'(c) \approx 0$.

Теорема Ролля доказана.

Теорема 5.3 (Лагранжа). *Если функция f определена и равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, где a, b — рациональные числа, равномерно дифференцируема на (a, b). Тогда, если функция не имеет монад роста, то существует гиперрациональная точка c из (a, b) такая что, для любого представителя класса $f'(c) \in \dfrac{Df}{d\mu(c)}$ верно $f'(c) \approx \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Доказательство.

Так как f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любых точек p, q из $[a, b]$, $p \approx q$ $f(p) \approx f(q)$. Для любой точки c из (a, b) существует $\dfrac{Df}{d\mu(c)}$. Тогда для любых $p, q \in \mu(c)$ $f(p) - f(q) = f'(c) \cdot (p - q) + \varepsilon \cdot (p - q)$.

Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$. Тогда $\varphi(x)$ — равномерно непрерывна на $[a, b]$ и равномерно дифференцируема на (a, b). Имеем $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0 \Rightarrow \varphi(a) \approx \varphi(b)$. Тогда по Теореме Ролля существует точка c из (a, b) такая что $\varphi'(c) \approx 0$, а $\varphi'(x) \approx f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, отсюда $\varphi'(c) \approx f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \approx 0$.

Следовательно, $f'(c) \approx \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Теорема Лагранжа доказана.

Литература

1. **Косовский Н. К., Тишков А. В.** Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: Учеб.пособие. СПб.: Издательство С.–Петерб.университета. 2000. 268 с.

2. **Сегаль И. Ф.** Доказательство равномерной непрерывности функций на гиперрациональных числах в аксиоматике арифметики./ Косовский Н.К. Тишков А.В. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: Учеб.пособие. СПб.: Издательство С.-Петерб.университета. 2000. С. 232 – 240.

3. **Ловягин Ю. Н.** Исчисление бесконечно малых Г. В. Лейбница в современном изложении, или Введение в нестандартный анализ А.Робинсона. Сыктывкар: СЛИ. 2001. 161с.

4. **Девис М.** Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир. 1980. 236 с.

5. **Успенский В. А.** Что такое нестандартный анализ? М.: Наука. 1987. 128 с.

6. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3т. М.: Наука. 1969. Т.I. 607 с.

7. **Варден Б. Л.** Ван дер Алгебра. М.: Наука. 1979. 623с.

8. **Nelson E.** Internal set theory. A new approach to non standard analysis // *Bull. amer. Math. Soc. 1977. V. 83. №6. P. 1165 – 1198.*

9. **Марков А. А., Нагорный Н. М.** Теория алгорифмов. М.: Наука. 1984. 320 с.

10. **Кейслер Х. Дж., Чэн Ч. Ч.** Теория моделей. М.:Мир. 1977. 614 с.

Summary

Prazdnikova El.Wl. Modelling the real analysis in the framework of axiomatic of hypernatural numbers

In the paper formalized theory of Non–Standard theory of numbers and formalized theory of hyperrational numbers are stated. The main theorems of classical differential calculus are modelled.

Санкт-Петербургский университет *Поступила 24.11.2007*