Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 519.652

ЛЕГКОЕ ЧТЕНИЕ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛА

СИСТЕМЫ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ И ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ

В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный

Наша цель — дать полное описание множества жёстких фреймов в простейшем частном случае, когда $m = n + 1$ и все векторы φ_k имеют единичную длину. Индуктивно строится фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве. Ранее фрейм Мерседес-Бенц был определен только при $n = 2$. Вводится понятие системы Мерседес-Бенц, обобщающее понятие фрейма Мерседес-Бенц. Устанавливается экстремальное свойство таких систем. Даётся полное описание множества жёстких фреймов в указанном частном случае. Важную промежуточную роль при этом играют системы Мерседес-Бенц. Приводится ещё одно эквивалентное определение жёсткого фрейма, использующее понятие фреймового потенциала.

1. Введение

Напомним [1, с. 99], что жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$ называется набор ненулевых векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n+1$, такой, что при некотором $A > 0$ (константа фрейма) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_k\rangle\big]^2 = A\,\|x\|^2. \tag{1.1}$$

Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. Для неё

$$\|\Phi^T x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_k\rangle\big]^2.$$

Поскольку $\|\Phi^T x\|^2 = \langle \Phi^T x, \Phi^T x\rangle = \langle \Phi\Phi^T x, x\rangle$, то равенство (1.1) можно переписать в виде

$$\langle \Phi\Phi^T x, x\rangle = \langle AI_n x, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

где I_n – единичная матрица порядка n. Последняя формула равносильна матричному равенству

$$\Phi\Phi^T = AI_n. \tag{1.2}$$

Умножив справа на x, придем к эквивалентному векторному равенству

$$x = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Таким образом, формулы (1.1), (1.2), (1.3) дают эквивалентные определения жёсткого фрейма в $\mathbb{R}^n$ с константой $A > 0$.

Если, как обычно, через $\mathrm{tr}(S)$ обозначить след квадратной матрицы S, то в силу (1.2) получим $\mathrm{tr}(\Phi\Phi^T) = \mathrm{tr}(AI_n) = nA$. Вместе с тем, $\mathrm{tr}(\Phi\Phi^T) = \mathrm{tr}(\Phi^T\Phi)$, поэтому $nA = \mathrm{tr}(\Phi^T\Phi) = \sum_{k=1}^m \|\varphi_k\|^2$. Отсюда следует, что константа фрейма A необходимо равна такой величине:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\|\varphi_k\|^2. \tag{1.4}$$

Наша цель — дать полное описание множества жёстких фреймов в простейшем частном случае, когда $m = n + 1$ и все векторы φ_k имеют единичную длину.

В разд. 2 индуктивно строится фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве. Ранее фрейм Мерседес-Бенц был определен только при $n = 2$ (см. [2]). В разд. 3 вводится понятие системы Мерседес-Бенц, обобщающее понятие фрейма Мерседес-Бенц. Устанавливается экстремальное свойство таких систем.

В разд. 4 даётся полное описание множества жёстких фреймов в указанном частном случае. Важную промежуточную роль при этом играют системы Мерседес-Бенц.

В разд. 5 приводится ещё одно эквивалентное определение жёсткого фрейма, использующее понятие фреймового потенциала. Попутно устанавливается точная оценка снизу для фреймового потенциала.

Доказывается, что система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$, состоящая из $n + 1$ единичных n-мерных векторов, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда

$$|\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle| = \frac{1}{n} \quad \text{при } i \neq j.$$

Предварительные результаты были получены в [3, 4]. Дальнейшая информация о фреймах в конечномерных пространствах имеется в [2, 5 – 8, 10 – 12].

2. Фрейм Мерседес-Бенц

Как отмечалось в [1, с. 100], в $\mathbb{R}^2$ жёсткий фрейм с константой $A = \frac{3}{2}$ образуют три единичных вектора

$$b_1^2 = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big)^T, \qquad b_2^2 = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big)^T, \qquad b_3^2 = \big(0, 1\big)^T \tag{2.1}$$

(верхний индекс указывает на размерность векторов). При этом

$$\sum_{k=1}^{3} b_k^2 = \mathbb{O}\,; \qquad \langle b_k^2, b_j^2\rangle = -\frac{1}{2} \qquad \text{при } k \neq j.$$

В [2] жёсткий фрейм (2.1) назван *фреймом Мерседес-Бенц*. Покажем, что аналогичные фреймы существуют в $\mathbb{R}^n$ при любом $n \geqslant 2$.

Теорема 1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$ можно построить систему из $n+1$ единичных векторов $\{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ со свойствами:*

1) $\|b_k^n\|^2 = 1$ *при* $k \in 1 : n+1$;
2) $\langle b_k^n, b_j^n\rangle = -\dfrac{1}{n}$ *при* $k \neq j$;
3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} b_k^n = \mathbb{O}\,;$
4) *система* $\{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ *является жёстким фреймом с константой* $A = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 2$ система (2.1) обладает требуемыми свойствами. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n.

Допустим, что система $\{b_k^{n-1}\}_{k=1}^n$ уже построена. Согласно индукционному предположению

$$\|b_k^{n-1}\| = 1\,; \qquad \langle b_k^{n-1}, b_j^{n-1}\rangle = -\frac{1}{n-1} \qquad \text{при } k \neq j; \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{n-1} = \mathbb{O}\,; \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \big[\langle x, b_k^{n-1}\rangle\big]^2 = \frac{n}{n-1}\,\|x\|^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.4}$$

Переходя к построению системы $\{b_k^n\}_{j=1}^{n+1}$, полагаем $b_{n+1}^n = (0, \ldots, 0, 1)^T = e_n$. Вектор b_k^n при $k \in 1 : n$ будем искать в виде

$$b_k^n = c_n \begin{pmatrix} b_k^{n-1} \\ -h_n \end{pmatrix}.$$

Константу c_n выберем из условия нормировки $1 = \|b_k^n\|^2 = c_n^2\,(1 + h_n^2)$. Отсюда

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{1 + h_n^2}}\,. \tag{2.5}$$

За счёт h_n нужно обеспечить выполнение условий 2)–4).

Имеем

$$\langle b_k^n, b_j^n \rangle = \begin{cases} c_n^2\,\big(\langle b_k^{n-1}, b_j^{n-1}\rangle + h_n^2\big) & \text{при } k, j \in 1 : n,\ k \neq j; \\ -c_n\,h_n \quad \text{при } k \in 1 : n,\ j = n+1. \end{cases}$$

На основании (2.2) приходим к уравнениям

$$c_n^2 \left(h_n^2 - \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{1}{n}\,, \qquad c_n\,h_n = \frac{1}{n}\,. \tag{2.6}$$

Из второго уравнения и (2.5) следует, что $h_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$. При этом $c_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$. Первое равенство в (2.6) выполняется автоматически!

Система $\{b_k^n\}_{k=1}^{n+1}$ построена, причем так, что выполнены свойства 1) и 2). Согласно (2.3) и (2.6)

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k^n = c_n \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} b_k^{n-1} \\ -h_n \end{pmatrix} + e_n = \mathbb{O}\,.$$

Значит, выполнено условие 3). Осталось проверить условие 4).

Возьмём вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и выделим в нем последнюю компоненту: $x = \binom{x^{n-1}}{x_n}$. На основании (2.3) и (2.4) получаем

$$\sum_{k=1}^{n+1} \big[\langle x, b_k^n\rangle\big]^2 = c_n^2 \sum_{k=1}^{n} \big[\langle x^{n-1},\, b_k^{n-1}\rangle - h_n x_n\big]^2 + x_n^2 =$$

$$= c_n^2 \sum_{k=1}^{n} \big[\langle x^{n-1},\, b_k^{n-1}\rangle\big]^2 + (n c_n^2 h_n^2 + 1) x_n^2 =$$

$$= c_n^2 \tfrac{n}{n-1}\, \|x^{n-1}\|^2 + \Big(1 + \tfrac{1}{n}\Big) x_n^2 = \Big(1 + \tfrac{1}{n}\Big) \|x\|^2.$$

Теорема доказана. •

Построенную систему векторов $\{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ естественно назвать *фреймом Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве.*

3. Системы Мерседес-Бенц

1. Набор n-мерных векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ назовем *системой Мерседес-Бенц*, если выполнены условия

$$\|\varphi_k\| = 1 \quad \text{при } k \in 1 : n+1; \qquad \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{при } k \neq j. \tag{3.1}$$

Очевидно, что фрейм Мерседес-Бенц является системой Мерседес-Бенц.

Для любой системы Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k = \mathbb{O}. \tag{3.2}$$

Действительно, согласно (3.1)

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k \neq j} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = n + 1 - \tfrac{1}{n}\big[(n+1)^2 - (n+1)\big] = 0.$$

Теорема 2. *Для того чтобы набор n-мерных векторов* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ *был системой Мерседес-Бенц, необходимо и достаточно, чтобы нашлась ортогональная матрица* U*, такая, что*

$$\varphi_k = U b_k^n\,, \quad k \in 1 : n+1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Достаточность следует из (3.1), если учесть, что для ортогональной матрицы U выполняются соотношения

$$U\,U^T = U^T U = I_n\,.$$

Необходимость. Введем $\big(n \times (n+1)\big)$-матрицы Φ и B со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ и $b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n$ соответственно. Тогда формулу (3.3) можно представить в виде

$$\Phi = UB. \tag{3.4}$$

Равенство (3.4) будем рассматривать как уравнение относительно U.

Добавим к матрицам Φ и B $(n{+}1)$-ю строку, все компоненты которой равны $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Получившиеся квадратные матрицы обозначим Φ_0 и B_0. Из определения систем Мерседес-Бенц следует, что

$$\Phi_0{}^T \Phi_0 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\, I_{n+1}\,, \qquad B_0{}^T B_0 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\, I_{n+1}\,.$$

Положим
$$P = \sqrt{\tfrac{n}{n+1}}\,\Phi_0, \qquad Q = \sqrt{\tfrac{n}{n+1}}\,B_0.$$
Поскольку $P^T P = I_{n+1}$, $Q^T Q = I_{n+1}$, то матрицы P и Q ортогональны.

Найдем ортогональную матрицу U_0, такую, что
$$\Phi_0 = U_0\, B_0\,. \tag{3.5}$$
После умножения на $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ придём к равносильному уравнению $P = U_0\, Q$ с очевидным решением
$$U_0 = P\, Q^T = \tfrac{n}{n+1}\Phi_0 B_0^T.$$
Ясно, что U_0 — ортогональная матрица.

Покажем, что U_0 имеет вид
$$U_0 = \begin{bmatrix} U & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$
Согласно (3.2)
$$\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k^n = \mathbb{O},$$
поэтому
$$U_0[i, n+1] = \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(i)\, \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{при } i \in 1:n,$$
$$U_0[n+1, n+1] = \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_0[n+1, k] \times {B_0}^T[k, n+1] = 1,$$
$$U_0[n+1, j] = \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, b_k^n(j) = 0 \qquad \text{при } j \in 1:n.$$
Формула (3.6) установлена. Учитывая, что
$$U_0\, {U_0}^T = \begin{bmatrix} U\, U^T & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 1 \end{bmatrix}$$
и $U_0\, {U_0}^T = I_{n+1}$, заключаем, что U — ортогональная матрица.

Из (3.5) и (3.6) следует (3.4). Теорема доказана. •

2. Отметим одно экстремальное свойство систем Мерседес-Бенц.

Теорема 3. *Системы Мерседес-Бенц и только они доставляют максимум функционалу*

$$S(\mathrm{Z}) = \sum_{k\neq j} \big\|\zeta_k - \zeta_j\big\|$$

среди всех систем $\mathrm{Z} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}\}$ *единичных n-мерных векторов.*

Доказательство. Возьмём систему Мерседес-Бенц $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ и обозначим $s_{kj} = \|\varphi_k - \varphi_j\|$. Согласно (3.1) при $k \neq j$ имеем

$$s_{kj}^2 = 2 - 2\,\langle\varphi_k, \varphi_j\rangle = 2\left(1 + \tfrac{1}{n}\right).$$

Количество s_{kj} при $k \neq j$ равно $(n+1)^2 - (n+1) = n\,(n+1)$, поэтому

$$S(\Phi) = n\,(n+1)\sqrt{2\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)} = (n+1)\sqrt{2n\,(n+1)}\,.$$

Отметим, что правая часть последнего равенства одинакова для всех систем Мерседес-Бенц.

Теперь нужно показать, что

$$S(\mathrm{Z}) < (n+1)\sqrt{2n\,(n+1)}$$

для любой системы $\mathrm{Z} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}\}$ единичных n-мерных векторов, у которой хотя бы одно скалярное произведение $\langle\zeta_k, \zeta_j\rangle$ при $k \neq j$ отлично от $-\frac{1}{n}$.

Воспользуемся идеей из [9]. Запишем равенство

$$\big\|\zeta_k - \zeta_j\big\| = \sqrt{2}\,y\big(\langle\zeta_j, \zeta_k\rangle\big),$$

где $y(t) = \sqrt{1-t}$. Поскольку $y''(t) < 0$ при $t < 1$, то функция $y(t)$ строго вогнута на $(-\infty, 1]$. Проведём касательную в точке $t_0 = -\frac{1}{n}$:

$$h(t) = y\Big(-\frac{1}{n}\Big) + y'\Big(-\frac{1}{n}\Big)\Big(t + \frac{1}{n}\Big).$$

Тогда $y(t) < h(t)$ при всех $t \leqslant 1$, $t \neq -\frac{1}{n}$. Как следствие при $k \neq j$ получаем

$$\big\|\zeta_k - \zeta_j\big\| \leqslant \sqrt{2}\,h\big(\langle\zeta_k, \zeta_j\rangle\big),$$

причём хотя бы один раз неравенство выполняется как строгое. Складывая, приходим к строгому неравенству

$$S(\mathrm{Z}) < \sqrt{2}\sum_{k\neq j} h\big(\langle \zeta_k, \zeta_j\rangle\big).$$

Далее

$$h(t) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(t + \frac{1}{n}\right) = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}\, t\,,$$

поэтому

$$S(\mathrm{Z}) < \frac{\sqrt{2}}{2}\Big\{(2n+1)\sqrt{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sum_{k\neq j}\langle \zeta_k, \zeta_j\rangle\Big\}. \tag{3.7}$$

Остаётся учесть, что

$$\sum_{k\neq j}\langle \zeta_k, \zeta_j\rangle = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\langle \zeta_k, \zeta_j\rangle - \sum_{k=1}^{n+1}\langle \zeta_k, \zeta_k\rangle = \Big\|\sum_{k=1}^{n+1}\zeta_k\Big\|^2 - (n+1).$$

Подставив это в (3.7), окончательно получим

$$S(\mathrm{Z}) < \frac{\sqrt{2}}{2}\Big\{(2n+2)\sqrt{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\Big\|\sum_{k=1}^{n+1}\zeta_k\Big\|^2\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)\sqrt{2n(n+1)}\,.$$

Теорема доказана. •

4. Описание множества жёстких фреймов

Обратимся к описанию множества жёстких фреймов в $\mathbb{R}^n$, состоящих из $n+1$ единичных векторов. В этом случае, согласно (1.4), $A = 1 + \frac{1}{n}$.

Теорема 4. *Для того чтобы набор единичных n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ был жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$\varphi_k = \sigma_k U b_k^n\,, \qquad k \in 1 : n+1, \tag{4.1}$$

где $\sigma_k = \pm 1$ и U — некоторая ортогональная матрица.

Доказательство. Достаточность. В теореме 1 было установлено, что система $\{b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$ с константой $A = 1 + \frac{1}{n}$. То же самое можно сказать и о системе (4.1), поскольку

$$\sum_{k=1}^{n+1} \big[\langle x, \varphi_k\rangle\big]^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \big[\langle x, U b_k^n\rangle\big]^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \big[\langle U^T x, b_k^n\rangle\big]^2 = \\ = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\|U^T x\|^2 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\|x\|^2.$$

Необходимость. Воспользуемся идеей из [7]. Как обычно, через Φ обозначим матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$. В силу (1.2) и (1.4)

$$\Phi\,\Phi^T = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\, I_n\,. \tag{4.2}$$

Рассмотрим Φ как набор $(n+1)$-мерных строк $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Согласно (4.2)

$$\langle \gamma_k, \gamma_j\rangle = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{при } k = j, \\ \quad 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Дополним Φ ещё одной строкой γ_{n+1} так, чтобы

$$\langle \gamma_k, \gamma_{n+1}\rangle = 0 \quad \text{при } k \in 1:n, \qquad \|\gamma_{n+1}\|^2 = 1 + \tfrac{1}{n}\,.$$

Расширенную матрицу обозначим Φ_1. Для неё

$$\Phi_1\,{\Phi_1}^T = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\, I_{n+1}\,.$$

Матрица $P = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\Phi_1$ является ортогональной, так как $P\,P^T = I_{n+1}$. Но тогда и $P^T P = I_{n+1}$, откуда следует, что

$${\Phi_1}^T \Phi_1 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\, I_{n+1}\,. \tag{4.3}$$

В частности,

$$\sum_{j=1}^{n+1} \big(\Phi_1[j,k]\big)^2 = \big({\Phi_1}^T\Phi_1\big)[k,k] = 1 + \tfrac{1}{n}\,, \qquad k \in 1:n+1. \tag{4.4}$$

В то же время

$$\sum_{j=1}^{n} \big(\Phi_1[j,k]\big)^2 = \|\varphi_k\|^2 = 1, \qquad k \in 1:n+1. \tag{4.5}$$

Вычитая (4.5) из (4.4), получаем $\big(\Phi_1[n+1,k]\big)^2 = \frac{1}{n}$. Значит,

$$\gamma_{n+1}(k) = \frac{\sigma_k}{\sqrt{n}}, \qquad k \in 1:n+1,$$

где $\sigma_k = \pm 1$. Так выглядит добавленная строка.

Введём диагональную матрицу $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ и положим

$$\Phi_0 = \Phi_1 D.$$

Согласно (4.3) справедливы равенства

$$\Phi_0^T \Phi_0 = D\Phi_1^T \Phi_1 D = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) I_{n+1}\,. \tag{4.6}$$

У матрицы Φ_0 k-й столбец равен $\binom{\sigma_k \varphi_k}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Обозначим $v_k = \sigma_k \varphi_k$ и перепишем (4.6) в виде

$$\sum_{l=1}^{n} v_k(l)\, v_j(l) + \tfrac{1}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\langle v_k, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ -\frac{1}{n} & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

По определению, $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ — система Мерседес-Бенц.

На основании теоремы 2 заключаем, что существует ортогональная матрица U, такая, что $v_k = U b_k^n$. Поскольку $v_k = \sigma_k \varphi_k$, то

$$\varphi_k = \sigma_k U b_k^n\,, \qquad k \in 1:n+1.$$

Теорема доказана. $\bullet$

5. Заключительные замечания

1. В разд. 1 были приведены три определения жёстких фреймов в $\mathbb{R}^n$. Следующее утверждение содержит по существу ещё одно эквивалентное определение жёсткого фрейма.

Предложение. *Система ненулевых n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n$, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i,j=1}^{m} [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^2 \right)^2. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть Φ – матрица со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и $S = \Phi\Phi^T$. Тогда

$$\operatorname{tr}(S) = \operatorname{tr}(\Phi^T\Phi) = \sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^2,$$

$$\operatorname{tr}(S^2) = \operatorname{tr}((\Phi\Phi^T\Phi)\Phi^T) = \operatorname{tr}((\Phi^T\Phi)^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle\right) = \sum_{i,j=1}^{m}[\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle]^2.$$

Равенство (5.1) равносильно следующему

$$\operatorname{tr}(S^2) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr}(S))^2. \tag{5.2}$$

Матрица S симметрична и неотрицательно определена. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ её собственные числа. Поскольку

$$\operatorname{tr}(S) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k, \qquad \operatorname{tr}(S^2) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2,$$

то (5.2) принимает вид $\quad \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^2 \quad$ или

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right)^{1/2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k. \tag{5.3}$$

Среднее квадратическое конечного числа неотрицательных чисел равно среднему арифметическому только в том случае, когда все эти числа равны между собой. Таким образом, (5.3) равносильно условию $\lambda_1 = \dots = \lambda_n =: A$, $A > 0$, что, в свою очередь, сответствует равенству $S = AI_n$, являющемуся одним из определений жёсткого фрейма (см. (1.2)). Предложение доказано. $\bullet$

Выражение, стоящее в левой части (5.1), называется *фреймовым потенциалом* системы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ и обозначается $FP(\Phi)$. Учитывая неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, приходим к такому заключению [5, 6]: *для любой системы* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n$, *ненулевых n-мерных векторов справедливо неравенство*

$$FP(\Phi) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|^2\right)^2.$$

Равенство достигается только на жёстких фреймах.

2. Приведём два следствия из предложения.

Следствие 1. *Система единичных n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n$, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда*

$$\left(\frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \tag{5.4}$$

т.е. когда среднее квадратическое скалярных произведений $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, $i, j \in 1:m$, равно $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Следствие 2. *Система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, состоящая из n единичных n-мерных векторов, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда эта система является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.*

Действительно, в данном случае согласно (5.1)

$$\sum_{i,j=1}^{n} [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^2 = n.$$

Принимая во внимание, что φ_i – единичные векторы, приходим к равенству

$$\sum_{i \neq j} [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^2 = 0,$$

гарантирующему попарную ортогональность векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

3. При $m = n + 1$ и единичных φ_i равенство (5.4) преобразуется к виду

$$\sum_{i \neq j} [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^2 = 1 + \frac{1}{n}\,. \tag{5.5}$$

Теорема 4 и формула (5.5) позволяют сформулировать такой результат.

Теорема 5. *Система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$, состоящая из $n+1$ единичных n-мерных векторов, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда*

$$|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = \frac{1}{n} \quad \text{при } i \neq j.$$

Литература

1. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001.

2. **Casazza P., Kovačevič J.** Equal-norm tight frames with erasures // *Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. №2–4. P. 387–430.*

3. **Истомина М. Н., Певный А. Б.** Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве // *Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 2006. Вып. 6. С. 219–222.*

4. **Истомина М. Н., Певный А. Б.** О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц // *Матем. просвещение. Сер. 3. 2007. Вып. 11. С. 105–112.*

5. **Benedetto J. J., Fickus M.** Finite normalized tight frames // *Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. №2–4. P. 357–385.*

6. **Casazza P. G.** Custom building finite frames // *Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.*

7. **Goyal V. K., Kovačevič J., Kelner J. A.** Quantized frame expansions with erasures // *Appl. Comput. Harmonic Anal. 2001. V. 10. № 3. P. 203–233.*

8. **Han D., Larson D. R.** Frames, bases and group representation // *Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 147. № 697. P. 1–94.*

9. **Андреев Н. Н., Юдин В. А.** Экстремальные расположения точек на сфере // *Матем. просвещение. Сер. 3. 1997. Вып. 1. С. 115–121.*

10. **Holmes R.B., Paulsen V.I.** Optimal frames for erasures // *Linear Algebra Appl. 2004. V. 377. P. 31–51.*

11. **Sustik M.A., Tropp J.A., Dhillon I.S., Heath R.W.** // On the existence of equiangular tight frames // *Linear Algebra Appl. 2007. V. 426. P. 619–635.*

12. **Tropp J.A., Dhillon I.S., Heath R.W., Strohmer T.** Designing structured tight frames via an alternating projection method // *IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. P. 188–209.*

Summary

Malozemov V.N., Pevnyi A.B. Mercedes-Benz systems and tight frames

The paper is for the section "Easy Reading for Professionals". The authors study the tight frames in the space $\mathbb{R}^n$. A complete description of the tight frames in $\mathbb{R}^n$ consisting of $n+1$ vectors is given. An exact lower bound for the frame potential is proved.

Санкт–Петербургский университет
Сыктывкарский университет
Поступила 17. 12. 2007