Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 519.652

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА В СЛУЧАЕ УТРАТЫ ОДНОГО ФРЕЙМОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА

А.Б. Певный, М.Н. Истомина

Рассматривается разложение произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ по фрейму Мерседес–Бенц. В случае утраты одного фреймового коэффициента предлагается быстрый алгоритм восстановления вектора x.

Системой Мерседес–Бенц называется набор $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$, состоящий из $n+1$ единичных векторов в $\mathbb{R}^n$, у которых скалярные произведения различных векторов равны:

$$\langle \varphi_i,\ \varphi_j \rangle = -\frac{1}{n} \text{ при } i \neq j. \tag{1}$$

Геометрически условие (1) означает, что углы между векторами равны.

Система Мерседес–Бенц является жёстким фреймом (см. [1]), поэтому любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно разложить по фрейму:

$$x = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} c_i \varphi_i, \tag{2}$$

где коэффициенты c_i находятся по формуле

$$c_i = \langle x,\ \varphi_i \rangle, \quad i \in 1 : n+1.$$

Избыточные разложения вида (2) широко используются в вейвлетном анализе и цифровой обработке сигналов (см. [2]).

Обычно при передаче сигнала x передаются коэффициенты разложения, после чего происходит восстановление сигнала x по формуле (2).

При передаче часть коэффициентов может потеряться. Допустим был утрачен один коэффициент c_k с некоторым номером $k \in 1 : n+1$. Это равносильно тому, что из системы $\{\varphi_i\}$ удалили вектор φ_k и получили систему

$$\{\varphi_1, \ \dots \ , \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ \dots \ , \varphi_{n+1}\}. \tag{3}$$

Рассмотрим матрицу Грама системы (3). Так как скалярные произведения двух различных векторов системы равны $-\frac{1}{n}$, а норма каждого вектора равна 1, то матрица Грама будет иметь вид:

$$G = \{\langle \varphi_i, \ \varphi_j \rangle\}_{i,\,j \neq k} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что эта матрица от k не зависит. В докладе [1] указан явный вид обратной матрицы:

$$G^{-1} = \frac{n}{n+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что $GG^{-1} = I_n$, где I_n – единичная матрица порядка n.

Отсюда в частности следует, что матрица G невырожденная, система (3) линейно независимая и существует биортогональная система

$$\{\widetilde{\varphi}_1, \ \dots \ , \widetilde{\varphi}_{k-1}, \widetilde{\varphi}_{k+1}, \ \dots \ , \widetilde{\varphi}_{n+1}\}. \tag{4}$$

Биортогональность означает, что

$$\langle \varphi_i, \ \widetilde{\varphi}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{5}$$

Вектор x разлагается по биортогональной системе (4) по формуле

$$x = \sum_{i \neq k} \langle x, \ \varphi_i \rangle \widetilde{\varphi}_i = \sum_{i \neq k} c_i \widetilde{\varphi}_i. \tag{6}$$

Построение биортогональной системы является довольно трудоёмким процессом. Ниже будет предложен быстрый алгоритм восстановления x, не требующий построения биортогональной системы.

Введем матрицы, столбцами которых являются векторы систем (3) и (4):

$$\Phi_k = [\varphi_1,\ \dots\ ,\ \varphi_{k-1},\ \varphi_{k+1},\ \dots\ ,\ \varphi_{n+1}],$$
$$\widetilde{\Phi}_k = [\widetilde{\varphi}_1,\ \dots\ ,\ \widetilde{\varphi}_{k-1},\ \widetilde{\varphi}_{k+1},\ \dots\ ,\ \widetilde{\varphi}_{n+1}].$$

Условие биортогональности (5) записывается в виде

$$\Phi_k^T \widetilde{\Phi}_k = I_n,$$

откуда $\widetilde{\Phi}_k = (\Phi_k^T)^{-1}$. Таким образом, построение биортогональной системы равносильно обращению матрицы Φ_k^T, что требует порядка n^3 операций.

Формула (6) переписывается в виде

$$x = \widetilde{\Phi}_k \widetilde{c}, \tag{7}$$

где $\widetilde{c} = (c_1,\ \dots\ ,\ c_{k-1},\ c_{k+1},\ \dots\ ,\ c_{n+1})$.

Отметим теперь, что для матрицы Грама справедливо равенство $G = \Phi_k^T \Phi_k$, откуда $\Phi_k^T = G \Phi_k^{-1}$.

Теперь для матрицы $\widetilde{\Phi}_k$ получаем формулу

$$\widetilde{\Phi}_k = (\Phi_k^T)^{-1} = \Phi_k G^{-1}.$$

В результате формулу (7) можно переписать в виде

$$x = \Phi_k (G^{-1} \widetilde{c}). \tag{8}$$

Для вычисления x по формуле (8) предварительно вычислим вектор $y = G^{-1}\widetilde{c}$. Будем считать, что компоненты вектора $\widetilde{c}$ занумерованы от 1 до n:

$$\widetilde{c} = (\widetilde{c}(1),\ \widetilde{c}(2),\ \dots\ ,\ \widetilde{c}(n)).$$

Тогда учитывая вид G^{-1} вычисление y происходит по схеме

$$S := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}(i),$$
$$y(i) := \frac{n}{n+1} \cdot (\widetilde{c}(i) + S), \quad i \in 1 : n,$$

что требует выполнения $3n$ операций. Вычисление x по формуле $x = \Phi_k y$ требует $2n^2$ операций. Общая сложность восстановления x составляет $2n^2 + 3n$ операций.

Литература

1. **Малозёмов В.Н., Певный А.Б.** Фрейм Мерседес–Бенц в n–мерном пространстве// `http://dha.spb.ru/reps.shtml/` 16 января 2007 г.

2. **Casazza P. G., Kovačeveč J.** Equal norm tight frames with erasures// *Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. №2–4. P. 387–430.*

Summary

Pevnyi A.B., Istomina M.N. Recovery of the signal in the case when one frame coefficient is erased

The authors consider Mercedes–Benz frame and frame expansions for every vector $x \in \mathbb{R}^n$. In the case when one frame coefficient is erased the authors suggest a fast algorithm for the recovery of the vector x.

Сыктывкарский университет *Поступила 24. 08. 07*