Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.7. 2007

УДК 512.556

ОБОБЩЕННЫЕ АБЕЛЕВО-РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ПОЛУКОЛЬЦА

Е. М. Вечтомов, О. В. Старостина

Вводятся понятия обобщенного абелево-регулярного положительного полукольца (*arp*-полукольца) и обобщенного булева полукольца. Показано, что их изучение сводится к *arp*-полукольцам. Получены функциональные представления обобщенных *arp*-полуколец и обобщенных булевых полуколец. Теорема Даунса-Гофмана о представлении бирегулярных колец распространена на бирегулярные полукольца.

Основные понятия

Полукольцом называется алгебра $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если выполняются условия: $\langle S, +, 0\rangle$ – коммутативный моноид, $\langle S, \cdot\rangle$ – полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и тождественно $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$. Если существует нейтральный элемент по умножению, то полукольцо S называется *полукольцом с единицей* 1 [1]. Полукольцо с 1, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *полутелом*.

Определение 1. Полукольцо S с единицей называется *абелево-регулярным положительным полукольцом* (*arp-полукольцом*), если для любого $a \in S$ найдется такой элемент $x \in S$, что $axa = a$ (регулярность S), для любого элемента $a \in S$ элемент $a + 1$ обратим в S (S – положительное полукольцо) и каждый идемпотент $e \in S$ централен, т. е. перестановочен со всеми элементами из S [2].

Пусть $L(S)$ – множество всех идемпотентов *arp*-полукольца S, а $U(S)$ – множество всех обратимых элементов в S.

В абелево-регулярном полукольце S каждый главный идеал порождается однозначно определенным идемпотентом. Действительно, для любого $a \in S$ найдется такой элемент $x \in S$, что $axa = a$, тогда $ax \in L(S)$ и $(a) = axS$.Если $fS = gS$, $f, g \in L(S)$, то $f = gt$, $g = fs$ для некоторых $t, s \in S$и $f = g \cdot gt = gf = fg = f \cdot fs = g$. Через e_a будем обозначать идемпотент соответствующий элементу a. В *arp*-полукольце S каждый элемент a представляется в виде произведения $a = e_a \cdot u$ однозначно определенного идемпотента $e_a \in L(S)$ и обратимого элемента $u \in U(S)$.

Изучение *arp*-полуколец сводится к изучению троек $\langle L(S), U(S), \varphi_S\rangle$ [2], или $\langle L(S), U(S), \psi_S\rangle$. $\langle U(S), +, \cdot\rangle$ – полутело без нуля относительно операций сложения и умножения в S. $\langle L(S), \vee, \cdot\rangle$ – дистрибутивная решетка с 0 и 1 относительно операции умножения $\cdot$ полукольца S и сложения $\vee$: $f \vee g = e_{f+g}$. Отображения $\varphi_S \colon L(S) \to \mathrm{Con}U(S)$, $e \to \varphi(e)$ и $\psi_S \colon L(S) \to \mathrm{Con}U(S)$, $e \to \psi(e)$ являются соответственно решеточными антигомоморфизмом и гомоморфизмом, где

$$u\varphi(e)v \Leftrightarrow eu = ev,\ u, v \in U(S),$$

$$u\psi(e)v \Leftrightarrow u + ex = v + ey \text{ для некоторых } x, y \in U(S).$$

При этом для каждого идемпотента $e \in L(S)$ конгруэнции $\varphi(e)$ и $\psi(e)$ дополняют друг друга: $\varphi(e) \circ \psi(e) = 1$ и $\varphi(e) \cap \psi(e) = 0$ [3].

В данной статье рассматривается некоторое обобщение *arp*-полуколец. В абелево-регулярных полукольцах, не обязательно содержащих единицу, положительность полукольца заменяется условием: положительными являются все главные идеалы eS, $e \in L(S)$.

Определение 2. Полукольцо S называется *обобщенным arp-полукольцом*, если каждое уравнение $axa = a$, $a \in S$, разрешимо в S, для любых идемпотента $e \in S$ и элемента $a \in S$ найдется такой элемент $t \in S$, что $(ea + e) \cdot et = et \cdot (ea + e) = e$, и все идемпотенты полукольца S центральны.

Множество всех идемпотентов обобщенного *arp*-полукольца S также будем обозначать через $L(S)$. $L(S)$ является дистрибутивной решеткой с нулем относительно операции умножения полукольца S и сложения $f \vee g = e_{f+g}$. Ясно, что каждый главный идеал eS, $e \in L(S)$, обобщенного *arp*-полукольца S является *arp*-полукольцом. Если S содержит единицу, то оно само является *arp*-полукольцом. Каждый идеал обобщенного *arp*-полукольца является обобщенным *arp*-полукольцом.

Прямой предел

Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ – система полуколец, где I – предупорядоченное направленное множество, и для каждой пары индексов i, j $(i \le j)$ задан гомоморфизм $\pi_{ij} \colon S_i \to S_j$, причем выполняются условия

$$\pi_{ii} = 1_{S_i}, \pi_{jk} \circ \pi_{ij} = \pi_{ik} \text{ для всех } i \le j \le k.$$

Система $(S_i, \pi_{ij})_I$ называется *прямым спектром* полуколец.

Прямым пределом $\varinjlim_I (S_i, \pi_{ij})$ прямого спектра полуколец $(S_i, \pi_{ij})_I$ называется полукольцо S_* такое, что существует семейство гомоморфизмов $\pi_i\colon S_i \to S_*$, $i \in I$, удовлетворяющих условиям:

1) $\pi_j \circ \pi_{ij} = \pi_i$ для всех $i \leq j$;

2) для любого полукольца G и каждого семейства гомоморфизмов $\sigma_i\colon S_i \to G$, $i \in I$, таких, что $\sigma_j \circ \pi_{ij} = \sigma_i$ для любых $i \leq j$, существует единственный гомоморфизм $\sigma\colon S_* \to G$, удовлетворяющий для всех $i \in I$ равенству $\sigma \circ \pi_i = \sigma_i$.

Для любого прямого спектра полуколец $(S_i, \pi_{ij})_I$ существует прямой предел. Действительно, на дизъюнктном объединении $S = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} S_i$ бинарное отношение ρ:

$$a\rho b \Leftrightarrow (\exists i, j, k \in I, i, j \leq k) \quad a \in S_i, b \in S_j, \pi_{ik}(a) = \pi_{jk}(b),$$

является конгруэнцией. Фактор-полукольцо $S_* = S/\rho$ является прямым пределом спектра $(S_i, \pi_{ij})_I$, где $\pi_i\colon s \in S_i \mapsto [s]_\rho \in S_*$ [1, глава 9].

Предложение 1. *Прямой предел прямого спектра $(S_i, \pi_{ij})_I$ обобщенных агр-полуколец S_i является обобщенным агр-полукольцом.*

Доказательство. Пусть $S = \varinjlim_I (S_i, \pi_{ij}) = \left(\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} S_i\right)/\rho$, где $a\rho b \Leftrightarrow \pi_{ik}(a) = \pi_{jk}(b)$, $a \in S_i, b \in S_j$ для некоторых $i, j, k \in I$, $k \geq i, j$. Для любого идемпотента $e \in S$ найдется такой номер $i \in I$ и идемпотент $e_i \in L(S_i)$, что $e = [e_i]_\rho$. Действительно, для некоторого $j \in I$ $e = [e_j]_\rho$, тогда $[e_j]_\rho = e = e^2 = [e_j^2]_\rho \Leftrightarrow (\exists i \geq j)\ e_i = \pi_{ji}(e_j) = \pi_{ji}(e_j^2) = e_i^2$.

Рассмотрим произвольные $a \in S$ и $e \in L(S)$. Для некоторого $i \in I$ $a = [a_i]_\rho$, $e = [e_i]_\rho$, $a_i \in S_i$, $e_i \in L(S_i)$. В обобщенном *агр*-полукольце S_i найдется такой элемент t_i, что $(e_i a_i + e_i) \cdot e_i t_i = e_i t_i \cdot (e_i a_i + e_i) = e_i$. Если $t = [t_i]_\rho \in S$, то в S выполняется равенство $(ea + e) \cdot et = et \cdot (ea + e) = e$. Перестановочность идемпотента $e = [e_i]_\rho \in S$, $e_i \in L(S_i)$, с произвольным элементом $a \in S$ следует из центральности идемпотента e_i в S_i, а регулярность S вытекает из регулярности S_i. Таким образом, S является обобщенным *агр*-полукольцом.

Предложение 2. *Каждое обобщенное агр-полукольцо является прямым пределом прямого спектра агр-полуколец.*

Доказательство. Для каждого обобщенного *агр*-полукольца S множество всех главных идеалов $\{eS\}_{e\in L(S)}$ и вложений $\pi_{ef}\colon eS \subset fS, e \leq f$, образует прямой спектр $(eS, \pi_{ef})_{L(S)}$, прямым пределом которого является полукольцо S: $\varinjlim_{L(S)} (eS, \pi_{ef}) = S$.

Обратный предел

Пусть I – предупорядоченное направленное множество. *Обратным спектром* полуколец называется система $(S_i, \pi_{ij})_I$ полуколец S_i, $i \in I$, и гомоморфизмов $\pi_{ij}\colon S_j \to S_i$ для всех $i, j \in I$, $i \leq j$, таких, что

$$\pi_{ii} = 1_{S_i}, \pi_{ij} \circ \pi_{jk} = \pi_{ik} \text{ для любых } i \leq j \leq k.$$

Обратным пределом $\varprojlim_I (S_i, \pi_{ij})$ обратного спектра полуколец $(S_i, \pi_{ij})_I$ называется полукольцо S^*, для которого существует семейство гомоморфизмов $\pi_i\colon S^* \to S_i$, удовлетворяющих условиям

1) $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$ для всех $i \leq j$;

2) для любых полукольца G и семейства гомоморфизмов $\sigma_i\colon G \to S_i$, $i \in I$, удовлетворяющих для любых $i \leq j$ равенству $\sigma_i = \pi_{ij} \circ \sigma_j$, существует единственный гомоморфизм $\sigma\colon G \to S^*$ такой, что $\sigma_i = \pi_i \circ \sigma$ для всех $i \in I$.

Обратный предел существует для любого обратного спектра полуколец $(S_i, \pi_{ij})_I$. Подмножество S^* прямого произведения $\prod\limits_{i \in I} S_i$, состоящее из всех таких элементов $s = (s_i) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$, что $\pi_{ij}(s_j) = s_i$ для любых $j \geq i$, является обратным пределом спектра $(A_i, \pi_{ij})_I$, при этом $\pi_i\colon s = (s_i) \in S^* \mapsto s_i \in S_i$ [1, глава 9].

Пусть S – обобщенное *arp*-полукольцо. Множество всех обратимых элементов $U(eS)$ *arp*-полукольца eS, $e \in L(S)$, будем обозначать через U_e, решеточные антигомоморфизм φ_{eS} и гомоморфизм ψ_{eS} через φ_e и ψ_e соответственно, при этом будем считать, что $U_0 = \{0\}$.

Предложение 3. *Для любого обобщенного arp-полукольца S полутела U_e, $e \in L(S)$, вместе с гомоморфизмами $\pi_{ef}\colon u \in U_f \mapsto eu \in U_e$ для всех $e, f \in L(S)$, $e \leq f$, образуют обратный спектр $(U_e, \pi_{ef})_{L(S)}$. Предел этого спектра $U^* = \varprojlim_{L(S)} (U_e, \pi_{ef})$ является полутелом, при этом U^* – подпрямое произведение семейства полутел U_e, $e \in L(S)$.*

Доказательство. Пусть $U^* = \varprojlim_{L(S)} (U_e, \pi_{ef})$, при этом $\pi_e\colon (u_e)_{e \in L(S)} \in U^* \mapsto u_e \in U_e$. Элемент $1^* = (1_e)_{e \in L(S)} \in U^*$, состоящий из единиц $1_e = e$ полутел U_e, $e \in L(S)$, является единичным элементом U^*. С каждым элементом $u^* = (u_e)_{e \in L(S)} \in U^*$ в U^* содержится элемент $u^{*-1} = (u_e^{-1})_{e \in L(S)}$, так как если $\pi_{ef}(u_f) = eu_f = u_e$, то $\pi_{ef}(u_f^{-1}) = eu_f^{-1} = u_e^{-1}$. Таким образом, U^* является полутелом.

Гомоморфизмы $\pi_{ef}\colon U_f \to U_e$ для всех $e \leq f$ являются эпиморфизмами, при этом $\varphi_f(e)$ является ядерной конгруэнцией гомоморфизма

π_{ef}: $\pi_{ef}(u_f) = \pi_{ef}(v_f) \Leftrightarrow eu_f = ev_f$ для всех $u_f, v_f \in U_f$. Поэтому для любых $e \le f$ имеем $U_f/\varphi_f(e) \cong U_e$.

Покажем, что U^* является подпрямым произведением в $\prod\limits_{e\in L(S)} U_e$. Пусть $u_e \in U_e$. Найдем такой элемент $u^* \in U^*$, что $\pi_e(u^*) = u_e$. Для произвольного $f \ge e$ имеем

$$U_f \cong U_f/\varphi_f(e) \times U_f/\psi_f(e) \cong U_e \times U_f/\psi_f(e).$$

Элемент полутела U_f, соответствующий при этом изоморфизме паре $(u_e,\ 1) \in U_e \times U_f/\psi_f(e)$, обозначим через u_f для любого $f \ge e$. Ясно, что $\pi_{ef}(u_f) = u_e$. Для произвольных $f, g \in L(S), e \le f \le g$ имеем

$$\begin{aligned}&U_g \cong U_g/\varphi_g(e) \times U_g/\psi_g(e) \cong\\ &\cong U_g/\varphi_g(e) \times \big(U_g/(\psi_g(e)\circ\varphi(f)) \times U_g/\psi_g(f)\big)\cong\\ &\cong \big(U_g/\varphi_g(e) \times U_g/(\psi_g(e)\circ\varphi(f))\big)\times U_g/\psi_g(f) \cong U_g/\varphi_g(f) \times U_g/\psi_g(f)\end{aligned}$$

Элементу $u_g \in U_g$ при этих изоморфизмах соответственно сопоставляются элементы $u_g \equiv (u_e,\ 1) \equiv (u_e,\ (1,\ 1)) \equiv ((u_e,\ 1),\ 1) \equiv (u_f,\ 1)$. Поэтому $\pi_{ef}(\pi_{fg}(u_g)) = \pi_{ef}(u_f) = u_e = \pi_{eg}(u_g)$. Тогда элемент $u^* \in U^*$, для которого $\pi_f(u^*) = u_f$ для всех $f \ge e$, будет искомым.

Агр-полукольцо S называется *локальным*, если S обладает единственным максимальным идеалом.

Предложение 4. *Любое обобщенное агр-полукольцо S можно вложить в локальное агр-полукольцо, при этом его максимальным идеалом является полукольцо S.*

Доказательство. Пусть S – обобщенное *агр*-полукольцо, тогда $S = \bigcup\limits_{e\in L(S)} eS$. Так как каждый элемент $a \in S$ принадлежит полутелу U_{e_a}, то $S = \bigcup\limits_{e\in L(S)} U_e$.

Обозначим через $S^* = \Big(\bigcup\limits_{e\in L(S)} U_e\Big)\dot{\bigcup} U^* = S\dot{\bigcup} U^*$, где

$$U^* = \varprojlim_{L(S)}(U_e, \pi_{ef})$$

из предложения 3. Операции сложения и умножения на полукольце S и полутеле U^* определены. Зададим операции между элементами S и U^*. Для любых $u_e \in U_e$ и $v^* \in U^*$ положим

$$v^*\cdot u_e = \pi_e(v^*)\cdot u_e = v_e\cdot u_e,\ u_e\cdot v^* = u_e\cdot\pi_e(v^*) = u_e\cdot v_e,$$
$$v^* + u_e = u_e + v^* = w^*,\ \text{где } \pi_f(w^*) = \pi_f(v^*) + u_e \text{ для любого } f \ge e.$$

Несложно проверить, что S^* является полукольцом с нулем $0^* = 1_0 \in U_0$ и единицей $1^* \in U^*$. Множество обратимых элементов $U(S^*) = U^*$, множество идемпотентов $L(S^*) = \{1_e \in U_e, e \in L(S)\} \cup \{1^*\}$. Из определений операций следует, что S^* является абелево-положительным полукольцом и любой элемент S^* можно представить в виде произведения однозначно определенного идемпотента и некоторого обратимого элемента: $v^* = 1^* \cdot v^*$ и $u_e = 1_e \cdot u^*$, где $u^* \in U^*$ такой, что $\pi_e(u^*) = u_e$. Таким образом, S^* является *arp*-полукольцом. Так как множество всех необратимых элементов S *arp*-полукольца S^* образует (наибольший) идеал в S^*, то S^* – локальное *arp*-полукольцо.

Заметим, что S является главным идеалом *arp*-полукольца S^* тогда и только тогда, когда S содержит единицу, т. е. является *arp*-полукольцом. Для *arp*-полукольца S имеет место изоморфизм $U^* \cong U(S)$.

Функциональное представление обобщенных *arp*-полуколец

Нам понадобятся следующие утверждения [4]:

Теорема A. *Любое arp-полукольцо S изоморфно вкладывается в булево полукольцо T так, что булева решетка $L(T)$ порождается дистрибутивной решеткой $L(S)$, $U(T) = U(S)$ и $\varphi_S = \varphi_T|_{L(S)}$.*

Такое полукольцо T называется *булевым полукольцом, порожденным arp-полукольцом S.*

Теорема B. *Полукольцо S является arp-полукольцом тогда и только тогда, когда оно изоморфно подполукольцу полукольца всех глобальных сечений некоторого пучка полутел (над нульмерным компактом) и содержит все обратимые сечения пучка.*

Отметим, что понятие пучка можно найти в книге [5].

Носителем сечения $\sigma \in \Gamma(\Pi,\ X)$ называется множество $\mathrm{supp}\sigma = \{x \in X : \sigma(x) \neq 0\}$.

Предложение 5. *Полукольцо S является обобщенным arp-полукольцом тогда и только тогда, когда S изоморфно подполукольцу T полукольца всех глобальных сечений некоторого пучка полутел над нульмерным компактом X, при этом если открыто-замкнутое множество $U \subseteq X$ является носителем некоторого глобального сечения подполукольца T, то и все сечения с носителем U входят в подполукольцо T.*

Доказательство. *Необходимость* следует из предложения 4 и теоремы B.

Достаточность. Покажем, что полукольцо T является обобщенным *arp*-полукольцом. Пусть $e = e^2 \in T$, тогда в каждой точке $x \in X$ значение $e(x)$ равно 0 или 1. Ясно, что все идемпотенты полукольца T центральны. Для любого элемента $a \in T$ и идемпотента $e \in T$ подмножество $\mathrm{supp}(e \cdot a) = \mathrm{supp}e \cap \mathrm{supp}a$ является открыто-замкнутым, поэтому функция $t(x) = \big(e(x)a(x) + e(x)\big)^{-1}$, если $x \in \mathrm{supp}(e \cdot a)$, и $t(x) = 0$, если $x \notin \mathrm{supp}(e \cdot a)$, является непрерывной и $t \in T$, при этом $et \cdot (ea + e) = e = (ea + e) \cdot et$. Полукольцо T регулярно. Действительно, для произвольного $a \in T$ положим $t(x) = a(x)^{-1}$, если $x \in \mathrm{supp}a$, и $t(x) = 0$, если $x \notin \mathrm{supp}a$. Получаем, $t \in T$ и $ata = a$.

Из рассмотренных предложений вытекает

Теорема 1. *Для произвольного полукольца S эквивалентны следующие условия:*

1) *S – обобщенное arp-полукольцо;*

2) *S – прямой предел прямого спектра arp-полуколец;*

3) *S – прямой предел прямого спектра обобщенных arp-полуколец;*

4) *S – идеал некоторого arp-полукольца;*

5) *S – наибольший идеал локального arp-полукольца;*

6) *S изоморфно подполукольцу T полукольца всех глобальных сечений некоторого пучка полутел над нульмерным компактом X, при этом если открыто-замкнутое множество $U \subseteq X$ является носителем некоторого глобального сечения подполукольца T, то и все сечения с носителем U входят в подполукольцо T.*

Обобщенные булевы полукольца и бирегулярные полукольца

Определение 3. Обобщенное *arp*-полукольцо S называется *обобщенным булевым полукольцом*, если решетка идемпотентов $L(S)$ является обобщенной булевой решеткой, т. е. дистрибутивной решеткой с 0 с относительными дополнениями.

Предложение 6. *Любое обобщенное arp-полукольцо S можно вложить в обобщенное булево полукольцо.*

Действительно, пусть B_e – булево полукольцо, порожденное *arp*-полукольцом eS, $e \in L(S)$, (теорема A). Для любых $e, f \in L(S)$, $e \leq f$, $B_e \subseteq B_f$. Система $(B_e, \pi_{ef})_{L(S)}$ булевых полуколец B_e и вложений $\pi_{ef}\colon B_e \subseteq B_f$, $e \leq f$, образует прямой спектр. Пусть

$B = \varinjlim_{L(S)}(B_e, \pi_{ef})$. Так как для любого $e \in L(S)$ $eS \subseteq B_e$, то $\varinjlim_{L(S)}(eS, \pi_{ef}) \subseteq \varinjlim_{L(S)}(B_e, \pi_{ef})$, т. е. $S \subseteq B$.

Полукольцо S называется *бирегулярным*, если каждый главный (двусторонний) идеал в нем порождается центральным идемпотентом и выделяется прямым слагаемым в S.

Говорят, что идеал A полукольца S *выделяется прямым слагаемым* в S, если существует такой идеал $B \subseteq S$, что каждый элемент полукольца S однозначно представим в виде суммы элементов из A и B.

Пусть $LZ(S)$ – множество всех центральных идемпотентов полукольца S. Относительно естественного отношения порядка $\leq$: $e \leq f \Leftrightarrow ef = e$, $e, f \in LZ(S)$, $LZ(S)$ является нижней полурешеткой. Пусть $e \in [0, \ f]$, тогда *относительным дополнением* элемента e в интервале $[0, f]$, называется такой элемент $g \in LZ(S)$, что $g \cdot e = 0$ и $g + e = f$. Для любых $e, f \in LZ(S)$ обозначим через $f \backslash e$ относительное дополнение элемента ef в $[0, f]$. Если каждый элемент из $LZ(S)$ имеет относительное дополнение в любом содержащем его интервале, то $LZ(S)$ является обобщенной булевой решеткой относительно операции умножения $\cdot$ полукольца S и сложения $\sqcup$, определяемого формулой $e \sqcup f = e\backslash f + f\backslash e + ef$. Заметим, что $e \sqcup f = e\backslash f + f\backslash e + ef = f\backslash e + e$ и $f\backslash e \cdot e = 0$, поэтому $(e \sqcup f)\backslash e = f\backslash e$ для любых $e, f \in LZ(S)$.

Предложение 7. *Если каждый главный идеал полукольца S порождается центральным идемпотентом, то S – бирегулярно тогда и только тогда, когда $LZ(S)$ – обобщенная булева решетка.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $e \leq f$ – произвольные центральные идемпотенты бирегулярного полукольца S. Покажем, что идеал eS выделяется прямым слагаемым в fS. Полукольцо S раскладывается в прямую сумму $S = eS \oplus A$ идеалов eS и $A \subseteq S$. Поэтому каждый элемент $t \in fS \subseteq S$ однозначно представим в виде суммы $t = es + a$, $a \in A$. Тогда $t = ft = f(es + a) = es + fa$, и в силу однозначности разложения t получаем $a = fa \in fS$. Таким образом, $fS = eS \oplus (A \cap fS)$. В полукольце fS с единицей f идеал eS выделяется прямым слагаемым тогда и только тогда, когда e является дополняемым идемпотентом в fS, т. е. e имеет относительное дополнение в $[0, f]$. Значит, $LZ(S)$ – обобщенная булева решетка.

Достаточность. Пусть $LZ(S)$ – обобщенная булева решетка и eS – произвольный главный идеал полукольца S. Для любого $f \in LZ(S)$ в полукольце $(e \sqcup f)S$ идемпотенты e и $f\backslash e$ дополняют друг друга, поэтому $(e \sqcup f)S = eS \oplus (f\backslash e)S$, а значит, $S = eS + \sum\limits_{f \in L(S)} (f\backslash e)S$. Каждый элемент однозначно представим в виде суммы элементов из eS и $\sum\limits_{f\in L(S)}(f\backslash e)S$. Действительно, пусть $es+\sum\limits_{i=1}^{n}(f_i\backslash e)x_i = et+\sum\limits_{i=1}^{m}(g_i\backslash e)y_i$, $s,t,x_i,y_i\in S$, $f_i,g_i\in LZ(S)$. Умножив обе части равенства на e, получим $es=et$, а умножив на $h=\big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n}(f_i\backslash e)\big)\sqcup\big(\bigsqcup\limits_{i=1}^{m}(g_i\backslash e)\big)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(f_i\backslash e)x_i=\sum\limits_{i=1}^{m}(g_i\backslash e)y_i$. Следовательно, $S=eS\oplus\sum\limits_{e\in L(S)}(f\backslash e)S$.

Следствие 1. *Любое обобщенное булево полукольцо бирегулярно.*

Следствие 2. *В классе обобщенных agr-полуколец понятия обобщенно булевого и бирегулярного полуколец равносильны.*

Множество всех первичных (максимальных) идеалов $\mathrm{Spec}S$ ($\mathrm{Max}S$) полукольца S с топологией Стоуна-Зарисского называется *первичным* (*максимальным*) *спектром* полукольца S. Открытыми множествами в топологии Стоуна-Зарисского пространства $\mathrm{Spec}S$ являются множества

$$D(A)=\{P\in\mathrm{Spec}S\colon A\nsubseteq P\},$$

где A – произвольный идеал полукольца S. Будем обозначать через $D(a)$ открытое множество, соответствующее главному идеалу (a), т. е. $D(a)=\{P\in\mathrm{Spec}S\colon a\notin P\}$.

Каждый главный идеал бирегулярного полукольца, порожденный элементом a, порождается некоторым центральным идемпотентом e: $(a)=(e)$. Ясно, что $a\in P\Leftrightarrow e\in P$ для любого $P\in\mathrm{Spec}S$, поэтому $D(a)=D(e)$.

Предложение 8. *Для любого бирегулярного полукольца S выполняются следующие условия:*

1) *для любых идеалов $I\nsubseteq J$ полукольца S существует центральный идемпотент $e\in I\backslash J$;*

2) *$SpecS$ – локально компактное нульмерное хаусдорфово пространство;*

3) *$SpecS=MaxS$;*

4) *S – строго гармоническое полукольцо, т. е. для любых его различных максимальных идеалов M и N найдутся такие элементы $a\in S\backslash M$ и $b\in S\backslash N$, что $aSb=0$;*

5) *$\bigcap MaxS=0$ – нулевой идеал.*

Доказательство. 1) Так как $I\nsubseteq J$, то найдется элемент $a\in I\backslash J$. Пусть e такой центральный идемпотент, что $(a)=(e)$. Тогда $e\in I\backslash J$.

2) Пусть $P \nsubseteq Q$, тогда найдется центральный идемпотент $e \in P \backslash Q$. Пусть $f \in LZ(S) \backslash P$, тогда в силу предложения 7 центральный идемпотент f имеет относительное дополнение $f \backslash e \notin P$, $f \backslash e \in Q$. Имеем $Q \in D(e)$, $P \in D(f \backslash e)$ и $D(e) \cap D(f \backslash e) = D(e \cdot f \backslash e) = \varnothing$, т. е. в $\mathrm{Spec} S$ существуют открытые множества, отделяющие P и Q.

Семейство множеств вида $D(e)$ образует открытую базу пространства $\mathrm{Spec} S$. Для любого $e \in LZ(S)$ полукольцо S раскладывается в прямую сумму $S = eS \oplus A$ идеалов eS и $A \subseteq S$, поэтому $D(e) \cup D(A) = D(eS + A) = \mathrm{Spec} S$ и $D(e) \cap D(A) = D(eS \cdot A) = \varnothing$. Следовательно, $D(e)$ – открыто-замкнутое множество и $\mathrm{Spec} S$ – нульмерное пространство.

Покажем, что открытое множество $D(e)$, $e \in LZ(S)$, компактно. Если произвольное семейство открытых множеств $\{D(A_i), i \in I\}$ покрывает множество $D(e) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} D(A_i) = D\big(\sum\limits_{i \in I} A_i\big)$, то $e \in \sum\limits_{i \in I} A_i$. Тогда $e \in \sum\limits_{i=1}^{k} A_i$ и $D(e) \subseteq D\big(\sum\limits_{i=1}^{k} A_i\big) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} D(A_i)$. Значит, $D(e)$ компактно.

3) Из условия 2) следует, что каждый первичный идеал является максимальным. Докажем, что $\mathrm{Max} S \subseteq \mathrm{Spec} S$. Предположим, что существует максимальный идеал M, не являющийся первичным, т. е. $AB \subseteq M$ для некоторых идеалов $A, B \nsubseteq M$. По условию 1) найдутся центральные идемпотенты $e \in A \backslash M$ и $f \in B \backslash M$. Тогда $ef \in AB \subseteq M$ и в силу максимальности идеала M имеем $M + (e) = M + (f) = S$. Откуда $e = e^2 \in (M + (e))(M + (f)) \subseteq M + (ef) \subseteq M$, что противоречит выбору элемента e. Таким образом, $\mathrm{Spec} S = \mathrm{Max} S$.

4) Пусть M, N – два различных максимальных идеала полукольца S. Согласно условию 1) найдутся центральные идемпотенты $e \in M \backslash N$ и $f \in N \backslash M$. Тогда $(f \backslash e) \in N \backslash M$ и $(f \backslash e) S e = 0$.

5) Так как произвольный центральный идемпотент $e \neq 0$ полукольца S образует мультипликативо замкнутую систему, то существует первичный идеал в S, не содержащий e. Поэтому в силу 3) пересечение всех максимальных идеалов полукольца S не содержит ненулевых элементов.

Полукольцо с 1 называется *простым*, если оно не имеет собственных ненулевых идеалов.

В [6] доказано, что каждое бирегулярное кольцо (с единицей или без нее) изоморфно кольцу всех глобальных сечений с компактными носителями некоторого пучка простых колец (с единицей) над максимальным спектром данного кольца, и кольцо всех глобальных сечений с компактными носителями произвольного пучка простых колец с единицей над локально компактным нульмерным пространством является бирегулярным кольцом. Доказательство аналогичного утверждения для бирегулярных полуколец с единицей проведено в [7].

Теорема 2. *Полукольцо S является бирегулярным полукольцом тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу всех глобальных сечений $\Gamma_{00}(\Pi)$ с компактными носителями некоторого пучка простых полуколец Π над локально компактным нульмерным хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть S – бирегулярное полукольцо. Для любого $P \in \mathrm{Max}S$ рассмотрим конгруэнцию $\Theta(P)$ на полукольце S:

$$a\Theta(P)b \Leftrightarrow (\exists c \in S \backslash P)(\forall s \in S)\; asc = bsc.$$

Покажем, что фактор-полукольцо $S/\Theta(P)$ простое. Будем обозначать через e_c такой центральный идемпотент в S, что $(e_c) = (c)$, $c \in S$. Тогда $a\Theta(P)b \Leftrightarrow asc = bsc$ для некоторого $c \notin P$ и любого $s \in S$ $\Leftrightarrow ase_c = bse_c$ $(\forall s \in S) \Leftrightarrow e_cas = e_cbs$ $(\forall s \in S) \Leftrightarrow e_ca = e_cb$. Таким образом, $a\Theta(P)b \Leftrightarrow ea = eb$ для некоторого $e \in LZ(S)\backslash P$. Заметим, что $[0]_{\Theta(P)} = P$. Действительно, если $a\Theta(P)0$, то $e \cdot a = e \cdot 0 = 0 \in P$ для некоторого $e \in LZ(S)\backslash P$ и в силу первичности идеала P имеем $a \in P$. Если $a \in P$, то для некоторого идемпотента $f \notin P$, который существует по предложению 8, $f\backslash e_a \notin P$ и $a \cdot (f\backslash e_a) = 0 \cdot (f\backslash e_a)$. Для любых $e, f \in LZ(S)\backslash P$ имеем $ef \notin P$ и $e \cdot (ef) = f \cdot (ef)$, или $e\Theta(P)f$. Класс $[e]_{\Theta(P)}$, $e \in LZ(S)\backslash P$, является единицей полукольца $S/\Theta(P)$, так как для любого $a \in S$ выполняется равенство $(ea) \cdot e = a \cdot e$, или $(ea)\Theta(P)a$. Если предположить, что полукольцо $S/\Theta(P)$ содержит собственный ненулевой идеал I, то полный прообраз I при каноническом эпиморфизме $\pi_P \colon S \to S/\Theta(P)$ является собственным ненулевым идеалом S и содержит идеал $P = [0]_{\Theta(P)}$, что противоречит максимальности идеала P в S. Следовательно, $S/\Theta(P)$ – простое полукольцо.

Семейство конгруэнций $\{\Theta(P) : P \in \mathrm{Max}S\}$ является *открытым*, т. е. для любых $a, b \in S$ множество $V(a, b) = \{P \in \mathrm{Max}S : a\Theta(P)b\}$ открыто в $\mathrm{Max}S$. Действительно, если $P \in V(a, b)$, то $ea = eb$ для некоторого $e \in LZ(S)\backslash P$ и $P \in D(e) \subseteq V(a, b)$. Известно, что открытое семейство конгруэнций $\{\Theta(P) : P \in \mathrm{Max}S\}$ индуцирует пучок $\Pi(\mathrm{Max}S)$ полуколец $S/\Theta(P)$ над пространством $\mathrm{Max}S$ [8], являющееся по предложению 8 локально компактным нульмерным хаусдорфовым пространством. При этом получаем представление $\hat{}\colon S \to \Gamma(\Pi)$, $\hat{s}(P) = \pi_P(S)$

для всех $s \in S$ и $P \in \mathrm{Max}S$, т. е. гомоморфизм $\hat{}$ полукольца S в полукольцо $\Gamma(\Pi)$ всех глобальных сечений пучка Π. Из свойства $\bigcap \mathrm{Max}S = 0$ (предложение 8) следует, что $\bigcap\limits_{P \in \mathrm{Max}S} \Theta(P)$ есть отношение равенства на S. Поэтому гомоморфизм $\hat{}$ инъективен. В силу предложения 8 для любого $s \in S$ носитель сечения $\mathrm{supp}\hat{s} = D(s)$ компактен, стало быть, $\hat{s} \in \Gamma_{00}(\Pi)$ – подполукольцу $\Gamma(\Pi)$. Стандартно проверяется, что произвольное сечение из $\Gamma_{00}(\Pi)$ имеет вид $\hat{s}$ для подходящего $s \in S$. Тем самым, $S \cong \Gamma_{00}(\Pi)$.

Достаточность. Пусть $\sigma \in \Gamma_{00}(\Pi)$ и $x \in \mathrm{supp}\sigma$. Так как P_x – простое полукольцо, то в нем найдутся элементы a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\sigma(x)b_i = 1_x$. Пусть α_i, β_i сечения, удовлетворяющие равенствам $\alpha_i(x) = a_i$, $\beta_i(x) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Существует открыто-замкнутая окрестность W точки x, в которой равны единичное и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\sigma(x)\beta_i$ сечения. Ясно, что $W \subseteq \mathrm{supp}\sigma$, а значит, $\mathrm{supp}\sigma$ является открыто-замкнутым множеством и его характеристическая функция χ является идемпотентом полукольца $\Gamma_{00}(\Pi)$. Покажем, что главный идеал, порожденный σ, порождается идемпотентом χ. Пусть ε – характеристическая функция открыто-замкнутой окрестности W, т. е. $\varepsilon(x) = 1$ при $x \in W$, $\varepsilon(x) = 0$ при $x \notin W$. Тогда сечение $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon\alpha_i\sigma(x)\beta_i$ является характеристической функцией окрестности W и $\gamma \in (\sigma)$. Для каждой точки $x \in \mathrm{supp}\sigma$ найдется такая окрестность и соответствующая характеристическая функция $\gamma \in (\sigma)$. Носитель $\mathrm{supp}\sigma$ компактен, выберем конечное число открыто-замкнутых множеств $W_1, \ldots, W_n$ и соответствующие $\gamma_1, \ldots \gamma_n \in (\sigma)$, при этом можно считать, что множества W_i, $i = 1, \ldots, n$, не пересекаются. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \in (\sigma)$ и является характеристической функцией χ множества $\mathrm{supp}\sigma$. Следовательно, $(\chi) = (\sigma)$.

Рассмотрим произвольные идемпотенты $e, f \in \Gamma_{00}(\Pi)$, $e \leq f$. В каждой точке $x \in X$ значения $e(x)$, $f(x)$ равны 0 или 1, при этом $\mathrm{supp}f$, $\mathrm{supp}e$ – открыто-замкнутые множества и $\mathrm{supp}e \subseteq \mathrm{supp}f$. Так как $\mathrm{supp}f \backslash \mathrm{supp}e$ – открыто-замкнутое множество, то функция $t(x)$, равная 1 при $x \in \mathrm{supp}f \backslash \mathrm{supp}e$ и 0 при остальных x, есть идемпотент полукольца $\Gamma_{00}(\Pi)$ и является относительным дополнением элемента e в интервале $[0; f]$. Значит, полукольцо $\Gamma_{00}(\Pi)$ является бирегулярным.

Теорема 3. *Полукольцо S является обобщенным булевым полукольцом тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу всех глобальных сечений $\Gamma_{00}(\Pi)$ с компактными носителями некоторого* *пучка полутел Π над локально компактным нульмерным хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Пусть S – обобщенное булево полукольцо и $[a]_{\Theta(P)} \neq [0]_{\Theta(P)}$, т. е. $a = e_a u \notin P$, где $e_a \in L(S)\backslash P$, $u \in U_{e_a}$. Тогда $[e_a u]_{\Theta(P)} \cdot [u^{-1}]_{\Theta(P)} = [e_a]_{\Theta(P)} = 1$, где u^{-1} – элемент обратный к u в полутеле U_{e_a}. Следовательно, фактор-полукольцо $S/\Theta(P)$ является полутелом, и необходимость вытекает из следствия 1 и теоремы 2.

Обратно. Любое полутело является простым полукольцом, поэтому по теореме 2 полукольцо $\Gamma_{00}(\Pi)$ бирегулярно. Можно непосредственно проверить, что это полукольцо является обобщенным *arp*-полукольцом, а значит, в силу следствия 2 будет обобщенным булевым полукольцом.

Любое обобщенное *arp*-полукольцо S вкладывается в обобщенное булево полукольцо (предложение 6), поэтому из теоремы 3 вытекает:

Теорема 4. *Обобщенное arp-полукольцо S изоморфно подполукольцу T полукольца всех глобальных сечений $\Gamma_{00}(\Pi)$ с компактными носителями некоторого пучка полутел Π над локально компактным нульмерным хаусдорфовым пространством X, при этом если открыто-замкнутое множество $U \subseteq X$ является носителем некоторого глобального сечения подполукольца T, то и все сечения с носителем U входят в подполукольцо T.*

Литература

1. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London. 1999. 381 c.

2. **Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Чермных В. В.** Абелево-регулярные положительные полукольца // *Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 282 – 309.*

3. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Структура абелево-регулярных положительных полуколец // *Успехи матем. наук. Т. 62. Вып. 1. 2007. С. 199 – 200.*

4. **Старостина О. В.** Функциональные представления абелево-регулярных положительных полуколец // *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2007. Вып. 9. С. 70 – 75.*

5. **Бредон Г.** Теория пучков. М.: Наука, 1988. 312 с.

6. **Dauns J., Hofmann K. H.** The represention of biregular rings by sheaves // *Math. Z. 1966. V. 91. № 2. P. 103 – 123.*

7. **Чермных В. В.** Полукольца. Киров: Изд-во ВГПУ. 1997. 131 с.

8. **Davey B. A.** Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // *Math. Z. 1973. V. 134. № 4. P. 275 – 290.*

Summary

Vechtomov E.M., Starostina O.V. Generalized Abelian-regular positive semirings

Notions of generalized Abelian-regular positive semirings (*arp*-semirings) and generalized Boolean semirings are introduced. It is showed that the research of generalized *arp*-semirings reduces to *arp*-semirings. Functional representation of generalized *arp*-semirings and generalized Boolean semirings are obtained. Dauns-Hofmann's theorem about representation of biregular rings is extended on biregular semirings.

Вятский гуманитарный университет *Поступила 10.12.2007*