

УДК 512.772+515.165.4

ЖЕСТКИЕ ИЗОТОПИИ ТРЕХЧЛЕННЫХ КРИВЫХ С МАКСИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОВАЛОВ

В.И. Звонилов

В настоящей работе для каждого n находится точная верхняя оценка числа овалов вещественной трёхчленной кривой $y^n + b(x)y + w(x) = 0$. Под жёсткой изотопией понимается путь в пространстве неособых вещественных трёхчленных кривых с фиксированным n . Дается жёсткая изотопическая классификация кривых такого вида с максимальным числом овалов. В частности, при $n = 3$ получена жёсткая изотопическая классификация тригональных M -кривых.

§1. Введение

В настоящей работе *трёхчленной кривой* называется алгебраическая кривая на поверхности Хирцебруха, задаваемая уравнением

$$y^n + b(x)y^{n-k} + w(x) = 0. \quad (1)$$

Понятие жесткой изотопии как пути в пространстве неособых плоских вещественных алгебраических кривых данной степени было введено в 1978г. Рохлиным [1]. В более широком смысле под жесткой изотопией кривых некоторого класса понимается путь в пространстве таких кривых. К настоящему времени классификация неособых вещественных алгебраических кривых с точностью до жестких изотопий известна для кривых степени $m \leq 6$ на $\mathbf{R}P^2$ (см. [1], [2], [3]), для кривых бистепеней $(m, 1)$, $(m, 2)$ и $(3, 3)$ на гиперboloиде и эллипсоиде (см. [4], [5], [6]), а также для кривых бистепени $(m, 3)$ на поверхности Хирцебруха Σ_1 (см. [7]).

В работе для $k = n - 1$ получена жёсткая изотопическая классификация неособых вещественных трёхчленных кривых с максимальным числом овалов. При этом использован метод, предложенный С.Ю.Ореховым [8] для построения тригональных кривых с помощью техники *dessins d'enfant*. В частности, при $n = 3$ получена жёсткая изотопическая классификация тригональных M -кривых .

§2. Кривые на поверхностях Хирцебруха

Нам потребуются следующие хорошо известные свойства поверхности Хирцебруха Σ_e , $e \in \mathbf{N}$ (см., напр. [9]). Это рациональная линейчатая поверхность, которая является пространством линейного расслоения $\pi : \Sigma_e \rightarrow P^1$. В частности, Σ_1 есть P^2 с раздутой точкой. Для всех, кроме одного, голоморфных сечений этого расслоения образ R такого сечения имеет индекс самопересечения $R^2 = e$, а для образа E исключительного сечения (единственного при $e > 0$) $E^2 = -e$. Пусть L - один из слоёв расслоения π . Тогда $\{mL + nR \mid m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\} \cup \{E = R - eL\}$ есть множество всех простых дивизоров на Σ_e . *Бистепенью* кривой $F = mL + nR$ назовем пару (m, n) ; для всех, кроме E , неприводимых кривых числа m, n - неотрицательные целые. Род неособой неприводимой кривой бистепени (m, n) есть

$$g = (m - 1)(n - 1) + \frac{n(n - 1)}{2}e. \quad (2)$$

Пусть $conj$ - антиголоморфная инволюция на множестве $\mathbf{C}\Sigma_e$ комплексных точек поверхности Σ_e , такая, что $\forall z \in \mathbf{C}\Sigma_e$ точка $\pi conj(z) = \overline{\pi(z)}$ комплексно сопряжена с $\pi(z)$ в $\mathbf{C}P^1$. Тогда вещественная часть $\mathbf{R}\Sigma_e = fix\ conj$ поверхности гомеоморфна тору $\mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}P^1$ при четном e и бутылке Клейна $\mathbf{R}P^1 \# \mathbf{R}P^1$ при нечетном e .

Пусть e - наименьшее натуральное число, для которого в уравнении (1) выполняются неравенства $\deg b \leq ek$, $\deg w \leq en$ с $n > 1$. Тогда многоугольник Ньютона левой части этого уравнения содержится в треугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(ne, 0)$, $(0, n)$. Торическая поверхность, построенная по этому треугольнику, является поверхностью Хирцебруха Σ_e , а x, y являются аффинными координатами в карте, полученной удалением из Σ_e кривой E и одного из слоёв расслоения π . Уравнение (1) задаёт на Σ_e кривую бистепени $(0, n)$. Если $m = \text{НОД}(n, k) > 1$, то в уравнении (1) можно сделать замену $y_1 = y^m$. Поэтому всюду будем считать, что n и k - взаимно простые числа.

Пусть C – трёхчленная кривая, заданная уравнением (1), $\Delta = w^{n-k-1}d(x)$ – дискриминант по y этого уравнения, где

$$d(x) = n^n w^k - (-1)^n (n-k)^{n-k} k^k b^n \quad (3)$$

(см., напр., [10, Гл.1, п.3.3]). Будем говорить, что $x = \infty \in \mathbf{R}P^1$ является корнем кратности m многочлена d (соответственно, b, w), если $\deg d = ekn - m$ (соответственно, $\deg b = ek - m, \deg w = en - m$). Следующие леммы доказываются стандартным вычислением.

Лемма 1. *Кривая C имеет в точке $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}$ особенность тогда и только тогда, когда либо $y_0 \neq 0, b(x_0) \neq 0, w(x_0) \neq 0, d(x_0) = d'(x_0) = 0$, либо $y_0 = 0, x_0$ – кратный корень многочлена w и, если $k = n - 1, b(x_0) = 0$. \square*

Лемма 2. *Точка $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}$ кривой C является точкой n -кратного пересечения с вертикальным слоем тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$, а x_0 – простой корень многочлена w и k -кратный корень многочлена d (и потому корень многочлена b).*

Непрерывное по t семейство $C_t, t \in [0, 1]$, неособых вещественных трёхчленных кривых на Σ_e называется *жесткой изотопией*, соединяющей C_0 с C_1 .

Далее во всей работе рассматриваются только неособые трёхчленные кривые.

§3. Вещественная схема трёхчленной кривой

Пусть C – неособая вещественная трёхчленная кривая. Множество $\mathbf{R}C$ её вещественных точек может иметь компоненты связности двух типов: стягиваемые в $\mathbf{R}\Sigma_e$ и нестягиваемые; стягиваемые компоненты называются *овалами*. Число овалов обозначается через l , число нестягиваемых компонент – через h . *Вещественной схемой* кривой C называется схема взаимного расположения компонент множества $\mathbf{R}C$. Изучение графика функции $z(y) = y^n + b_0 y^{n-k} + w_0 = y^{n-k}(y^k + b_0) + w_0$, где $b_0, w_0 \in \mathbf{R}$, показывает, что вещественная прямая $z = z_0$ пересекает его не более, чем в двух точках при чётном n и не более, чем в трёх точках при нечётном n . Поэтому при чётном n либо $h = 0$, либо $\mathbf{R}C$ двулистно накрывает ось OX и состоит из одной компоненты при нечётном e и из двух при чётном e ; при нечётном n либо $h = 1$ и нестягиваемая компонента изотопна оси OX , либо $\mathbf{R}C$ трёхлистно накрывает ось OX

и состоит из двух компонент при нечётном e и из трёх при чётном e . Кроме того, при чётном n вещественная прямая $x = x_0$ не пересекает $\mathbf{R}C$ тогда и только тогда, когда $0 < f(x_0) < n^n$, а при нечётном n она пересекает $\mathbf{R}C$ в одной точке тогда и только тогда, когда $f(x_0) > 0$, где $f(x) = d(x)/w(x)^k$, а $d(x)$ задаётся равенством (3).

§4. Граф трёхчленной кривой

Опишем найденное Оревковым соответствие между трёхчленными кривыми и графами на двумерной сфере S^2 . Пусть C – трёхчленная кривая, заданная уравнением (1), и $\Delta = w^{n-k-1}d(x)$ – дискриминант по y этого уравнения (см. §2). Рассмотрим рациональную функцию $f : \mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^1$, где $f = \frac{\Delta}{w^{n-1}} = \frac{d}{w^k} = n^n - \frac{(-1)^n(n-k)^{n-k}k^k b^n}{w^k}$. Раскрасим $\mathbf{R}P^1$ так, как указано на рис. 1, и наделим граф $\Gamma = f^{-1}(\mathbf{R}P^1)$



Рис. 1.

соответствующей раскраской. Вершины из $f^{-1}(0)$ – корни многочлена d – назовём d -вершинами, те вершины из $f^{-1}(n^n)$, которые являются общими корнями многочленов b и w , назовём bw -вершинами, остальные корни многочлена b – b -вершинами, вершины из $f^{-1}(\infty)$ – корни многочлена w – w -вершинами, а остальные вершины графа Γ – *некрашенными вершинами*. Пользуясь леммой 2, получаем, что если точка $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}$ кривой C является точкой n -кратного пересечения с вертикальным срезом и x_0 – m -кратный корень многочлена b , то x_0 – bw -вершина степени $2(mn - k)$. Для каждой из остальных вершин, если она является корнем степени m многочлена d , b или w , её степень соответственно равна $2m$, $2mn$ или $2mk$. Если кривая C вещественна, граф Γ симметричен относительно $\mathbf{R}P^1$. Пусть $\mathbf{C}P^1_+$ – замыкание одной из компонент связности множества $\mathbf{C}P^1 \setminus \mathbf{R}P^1$ и $\Gamma^+ = \Gamma \cap \mathbf{C}P^1_+$. Назовём Γ^+ *графом вещественной трёхчленной кривой C* .

Замечание 1. Из формулы Гурвица (см. [11, Гл.4, §2]) следует, что число некрашенных вершин не превосходит $e(k + n) - 2$. \square

Обратно, пусть Γ – симметричный относительно одного из своих циклов L раскрашенный граф на сфере S^2 с d -вершинами чётной степени, b -вершинами, степени которых кратны $2n$, bw -вершинами степеней

$2(m_i n - k)$ с натуральными m_i , ($i = 1, \dots, p$ для некоторого $p \leq ek$), w -вершинами, степени которых кратны $2k$, и некрашеными вершинами четной степени. Пусть сумма степеней d -вершин равна $2k(en - p)$, сумма степеней b -вершин равна $2n(ek - \sum_{i=1}^p m_i)$ и сумма степеней w -вершин равна $2k(en - p)$. Пусть, кроме того, на границе каждой грани графа Γ циклический порядок рёбер и вершин (без учёта некрашенных вершин) таков же, как и на $\mathbf{R}P^1$ (см. рис. 1). Пусть S_+ - замыкание одной из компонент множества $S^2 \setminus L$ и $\Gamma^+ = \Gamma \cap S_+$. Отобразим Γ^+ на $\mathbf{R}P^1$ в соответствии с раскраской, продолжим это отображение до разветвлённого накрытия $f : S_+ \rightarrow \mathbf{C}P^1$, накрыв каждой гранью одну из компонент множества $\mathbf{C}P^1 \setminus \mathbf{R}P^1$, и доопределим его по симметрии до накрытия $f : S^2 \rightarrow \mathbf{C}P^1$. Согласно [12, Теорема 4.1], поднятие комплексной структуры на S^2 превращает f в рациональную функцию, которая определяет вещественную трёхчленную кривую бистепени $(0, n)$ на Σ_k с точностью до преобразования $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$, где λ ненулевая константа.

4.1. Преобразования графа кривой. Назовём вершину графа Γ^+ *простой* или *кратной* в зависимости от того, является ли она простым или кратным корнем соответствующего многочлена, а для некрашенной вершины – точкой ветвления индекса 2 или > 2 .

Замечание 2. Если две b -вершины соединены рёбрами с некрашенной вершиной (или две некрашенные вершины соединены ребром), то стянув эти рёбра (это ребро), можно слить указанные вершины в одну кратную вершину, не изменив в силу 1 жесткого изотопического класса кривой C . Ясно, что обратное преобразование позволяет превращать кратную b -вершину (кратную некрашеную вершину) в несколько вершин меньшей кратности. При $k = n - 1$ те же преобразования возможны и для w -вершин. \square

Пусть G – плоский граф, степени вершин которого > 1 , F – его грань, η_1, \dots, η_r – различные точки на её границе ∂F (вершины или внутренние точки рёбер) и ξ' – произвольная внутренняя точка грани F . Соединим ξ' с η_i кривой u_i , $i = 1, \dots, r$, так, чтобы $u_i \cap u_j = \xi'$ для $i \neq j$. Обозначим через $\sigma_{F, \eta_1, \dots, \eta_r}$ преобразование графа G в плоский граф G_1 , полученный стягиванием объединения кривых u_1, \dots, u_r в некоторую точку ξ . При этом ξ становится вершиной графа G_1 , а из F получаются примыкающие к вершине ξ грани F_1, \dots, F_r графа G_1 , не имеющие общих примыкающих к ξ рёбер. Обратное преобразование $\tau_{\xi, F_1, \dots, F_r} : G_1 \rightarrow G$ определено однозначно с точностью до изоморфизма плоских графов, если указаны соответствующие грани $F_1 \dots F_r$ графа

G_1 , сливающиеся в одну грань графа G , и указан тип возникающих на рёбрах графа G точек η_1, \dots, η_r : какие из них являются новыми вершинами, а какие – внутренними точками рёбер.

Лемма 3. *Рассмотрим два набора данных.*

1. F – грань графа Γ^+ , на которой отображение f имеет степень $m > 1$; η_1, \dots, η_r , $1 < r \leq m$, – лежащие на ∂F различные точки с $a = f(\eta_1) = \dots = f(\eta_r) \neq 0$, среди которых не более одной вещественной, и если она есть, то это точка η_1 . При этом $a \neq \infty$ при $k < n - 1$.

2. ξ – некрашенная вершина графа Γ^+ ; F_1, \dots, F_r – максимальный набор примыкающих к ней граней графа Γ^+ с общим образом $f(F_1) = \dots = f(F_r)$. При этом если вершина ξ вещественна, то её степень в графе Γ^+ чётна (т.е. индекс ветвления точки ξ нечётен) и грани, которые имеют примыкающие к ξ вещественные рёбра, входят в этот набор.

Для каждого из этих наборов существует непрерывное по $t \in [0, 1]$ семейство отображений $f_t : \mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^1$ с $f_0 = f$, индуцирующее жёсткую изотопию кривой C , причём графы $\Gamma = f^{-1}(\mathbf{R}P^1)$ и $\Gamma_1 = f_1^{-1}(\mathbf{R}P^1)$ связаны следующим образом: $\Gamma_1^+ = \sigma_{F, \eta_1, \dots, \eta_r}(\Gamma^+)$, где $\Gamma_1^+ = \Gamma_1 \cap \mathbf{C}P_+^1$, для первого набора и $\Gamma_1^+ = \tau_{\xi, F_1, \dots, F_r}(\Gamma^+)$ для второго набора.

Доказательство. 1. Пусть s – число точек из $f^{-1}(a)$, лежащих на ∂F между η_1 и η_2 . Сначала продеформируем отображение f в классе непрерывных отображений так, чтобы вне грани F и на ∂F оно осталось прежним, а все точки ветвления внутри этой грани слились в одну точку ветвления индекса m . В результате дальнейшей деформации она распадается на три точки ветвления: ξ индекса 2, ξ' индекса $s + 1$ и ξ'' индекса $m - s - 1$ так, как указано на рис. 2, изображающем сужение на F отображения f . На левом круге этого рисунка сплошными и пунктирными линиями изображены прообразы кривых, соединяющих на $f(F)$ точку a с точками $f(\xi)$, $f(\xi')$, $f(\xi'')$. Первая из этих кривых обозначена через u . Пусть U – компонента связности множества $f^{-1}(u) \cap F$, соединяющая точку ξ с точками η_1, η_2 , и пусть $\{\sigma_t : \mathbf{C}P_+^1 \rightarrow \mathbf{C}P_+^1 \mid t \in [0, 1]\}$ – стягивание этой компоненты в точку η_1 , где σ_0 – тождественное отображение и $\sigma_1 = \sigma_{F, \eta_1, \eta_2}$. Продолжим σ_t по симметрии на $\mathbf{C}P^1$ и построим так же, как в п.4, по семейству графов $\sigma_t(\Gamma)$ непрерывное по t семейство отображений $f_t : \mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^1$. Тогда $f_0 = f$ и $\Gamma_1^+ = \sigma_{F, \eta_1, \eta_2}(\Gamma^+)$. Поскольку в процессе преобразования графа Γ в граф Γ_1 все корни дискриминанта d остаются простыми, а при $k < n - 1$ и все корни многочлена w остаются простыми, то в силу леммы 1 семейство отображений f_t индуцирует жёсткую изотопию кривой C . Для завершения доказательства осталось применить индукцию по r .

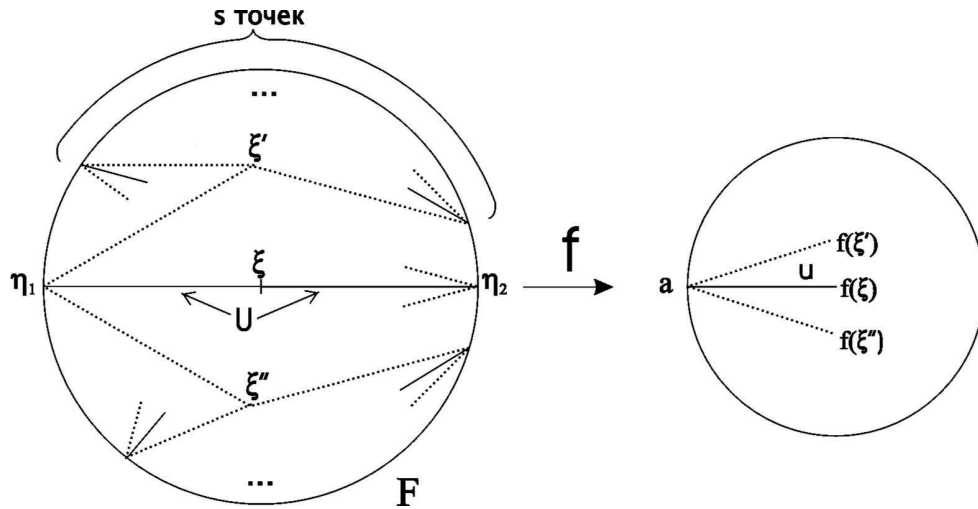


Рис. 2.

2. Пусть m – индекс ветвления точки ξ (нечётный, по условию, если ξ вещественная). Искомую деформацию отображения f можно получить, если пошевелить отображение f в классе непрерывных отображений так, чтобы вне достаточно малой окрестности точки ξ граф Γ^+ остался прежним, а в этой окрестности слились в одну грань F грани F_1, \dots, F_r , причём точка ξ превратилась, если $\xi \in \Gamma^+ \setminus \mathbf{R}P^1$, в некоторую точку ветвления $\xi' \in F$ с тем же индексом m , а если $\xi \in \mathbf{R}P^1$, то в пару мнимых сопряжённых точек ветвления с индексом $(m + 1)/2$. Ясно, что при этом Γ^+ перейдёт в граф $\Gamma_1^+ = \tau_{\xi, F_1, \dots, F_r}(\Gamma^+)$.

Следствие 1. 1. С помощью преобразования $\tau_{\xi, F_1, \dots, F_r}$, пользуясь леммой 3, очевидно, можно избавиться от всех мнимых некрашенных вершин.

2. Если концы вещественного ребра – некрашенные вершины, хотя бы одна из которых имеет чётную степень, то её индекс как точки ветвления нечётен и потому, согласно лемме 3 её можно удалить, применив к ней преобразование $\tau_{\xi, F_1, \dots, F_r}$. Если же обе соседние вещественные некрашенные вершины имеют нечётную степень, то соединяющее их вещественное ребро можно, очевидно, стянуть в некоторую точку ξ на этом ребре, степень которой будет четна, и потому её можно удалить указанным выше способом. Следовательно, на графе Γ^+ можно избавиться от всех рёбер с некрашенными концами. \square

Всюду до конца этого параграфа $k = n - 1$.

Лемма 4. *Если число h нестягиваемых компонент кривой C равно 0 при чётном n и 1 при нечётном, то в её жестком изотопическом классе существует кривая, у которой все корни многочлена b вещественны, а если, кроме того, $\mathbf{RC} \neq \emptyset$, то и корни многочлена w вещественны.*

Доказательство. Согласно следствию 1 можно считать, что в графе Γ^+ нет мнимых некрашенных вершин и вещественных ребер с некрашенными концами, а все вещественные некрашенные вершины являются простыми. В силу указанных ограничений на h , граф Γ^+ имеет некоторую грань A с вещественным сплошным или волнистым ребром на её границе ∂A , двигаясь по которому (и, возможно, далее по рёбрам того же вида на ∂A) можно прийти к b -вершине. Если она окажется мнимой, стянем последнее пройденное ребро в его вещественный конец, превратив эту b -вершину в вещественную. Если на ∂A останутся мнимые b -вершины, то к ним и к одной из вещественных b -вершин на ∂A , пользуясь леммой 3, можно применить преобразование $\sigma_{\xi, \eta_1, \dots, \eta_r}$, стянув их в эту вещественную b -вершину. Следовательно, если на границе каждой грани графа Γ^+ , имеющей мнимые b -вершины есть вещественное сплошное или волнистое ребро, все b -вершины можно сделать вещественными. В противном случае существуют две соседние грани A и B графа Γ^+ , на первой из которых все b -вершины вещественны, а на второй все b -вершины мнимые и нет вещественных сплошных и волнистых рёбер. Тогда общее ребро граней A и B не может заканчиваться b -вершиной. Поэтому оно не может быть ни сплошным, ни волнистым, иначе, ввиду отсутствия мнимых некрашенных вершин, оно примыкало бы к вещественной некрашенной вершине и, следовательно, на ∂B было бы вещественное сплошное или волнистое ребро, что невозможно. Следовательно, общее ребро E граней A и B – штриховое. Если бы оно примыкало к d -вершине, то, поскольку кривая C неособая, эта вершина являлась бы мнимой и к ней примыкало бы общее сплошное ребро этих граней, что невозможно. Поэтому один из концов ребра E – это вещественная некрашенная вершина D , не соединённая вещественным ребром с w -вершиной. В силу сказанного выше, вершина D является простой и потому, ввиду отсутствия вещественных рёбер с некрашенными концами, ∂B содержит вещественное штриховое ребро, примыкающее к вещественной d -вершине. Т.к. C неособа, ∂B содержит вещественное сплошное ребро, что невозможно. Следовательно указанная грань B не существует и все b -вершины графа Γ^+ вещественны.

Теперь добьёмся того, чтобы все w -вершины стали вещественными. Заметим, что при нечётном n множество \mathbf{RC} всегда непусто, т.к.

содержит нестягиваемую компоненту. Согласно замечанию 2, все b -вершины можно сделать простыми, сохранив их вещественность. Укажем b -вершину V и примыкающую к ней грань F графа Γ^+ , получив затем на V вещественную w -вершину, следующим образом.

При нечётном n пусть V – произвольная b -вершина. Тогда среди волнистых рёбер, выходящих из V есть вещественное ребро. Пусть F – примыкающая к нему грань графа Γ^+ . Двигаясь по этому ребру (и, возможно, далее по волнистым рёбрам на ∂F) можно дойти до w -вершины. Если она окажется мнимой, стянем последнее пройденное ребро в его вещественный конец, превратив эту w -вершину в вещественную.

При чётном n из условия $\mathbf{RC} \neq \emptyset$ следует существование грани F с вещественным штриховым ребром на ∂F . Пусть V – любая b -вершина на ∂F . Двигаясь по этому ребру (и, возможно, далее по штриховым рёбрам на ∂F) можно дойти до w -вершины. Если она окажется мнимой, стянем последнее пройденное ребро в его вещественный конец, превратив эту w -вершину в вещественную.

Теперь при любом n , если на ∂F есть мнимые w -вершины, то к ним и к имеющейся на ∂F вещественной w -вершине, пользуясь леммой 3, можно применить преобразование $\sigma_{\xi, \eta_1 \dots \eta_r}$, стянув их в эту вещественную w -вершину. Покажем, что на соседних с F гранях, примыкающих к V , можно получить вещественную w -вершину, а затем все w -вершины на такой грани сделать вещественными. Пусть G – соседняя с F грань. Если на $\partial F \cap \partial G$ есть w -вершина, то она вещественна. Если на $\partial F \cap \partial G$ нет w -вершин, то в силу отсутствия в Γ^+ мнимых некрашенных вершин, на $\partial F \cap \partial G$ имеется вещественная некрашенная вершина N . Т.к. она простая, то на ∂G к ней примыкает вещественное ребро E . Если оно волнистое или штриховое, то второй его конец является вещественной w -вершиной в силу отсутствия в Γ^+ вещественных рёбер с некрашеными концами. Если же ребро E сплошное, то по той же причине второй его конец является вещественной d -вершиной, к которой, в силу неособости кривой C , примыкает вещественное штриховое ребро, двигаясь по которому (и, возможно, далее по штриховым рёбрам на ∂G) можно дойти до w -вершины. Если она окажется мнимой, стянем последнее пройденное ребро в его вещественный конец, превратив эту w -вершину в вещественную. Следовательно, на G имеется вещественная w -вершина, с помощью которой так же, как это сделано выше на грани F , все w -вершины на G можно сделать вещественными.

Таким образом, последовательно переходя от очередной грани, примыкающей к вершине V , к соседней, превратим все мнимые w -вершины на гранях, примыкающих к V , в вещественные. При нечётном n это за-

вершает доказательство в силу произвольности вершины V . При чётном n пусть s – отрезок на $\mathbf{R}P^1$, соединяющий V с соседней b -вершиной U , и H – грань, содержащая ребро на s , примыкающее к U . Если грань H содержит вещественное штриховое ребро, то на ней можно получить вещественную w -вершину так же, как это сделано выше для грани F . Если же на H нет вещественных штриховых рёбер и нет вещественных w -вершин, то их нет и на s , и потому s состоит из двух рёбер, одно из которых лежит в H , а второе – в соседней с H грани, примыкающей к V . Применяя к этим граням те же рассуждения, что и выше к F и G , получим на H вещественную w -вершину, с помощью которой все мнимые w -вершины на H превратим в вещественные.

4.2. Графы Γ_w и $\tilde{\Gamma}$.

Согласно следствию 1 можно считать, что в графе Γ^+ нет мнимых некрашенных вершин и вещественных рёбер с некрашеными концами, а все вещественные некрашенные вершины являются простыми. Тогда, если к некрашенной вершине примыкают два вещественных волнистых ребра, то их вторые концы – это пара b -вершин или w -вершин. Удалим эти ребра, слив указанную пару вершин в одну вершину суммарной степени. Таким образом, будем считать, что в Γ^+ нет некрашенных вершин, примыкающих к волнистым ребрам. Пусть Γ_w – подграф такого графа Γ^+ , состоящий из всех его b -вершин, w -вершин и волнистых рёбер.

Построим по Γ_w граф $\tilde{\Gamma}$ (не вложенный в сферу), объединив в Γ_w все рёбра с одинаковыми концами в одно мультиребро и приписав ему соответствующую кратность. Если объединяемые рёбра содержат вещественное ребро, мультиребро назовём вещественным, в противном случае – мнимым.

Лемма 5. *За счёт преобразования графа Γ^+ любое концевое мультиребро графа $\tilde{\Gamma}$ при нечётном n , а при $n = 2r$ концевое мультиребро степени r можно сделать мнимым, не изменив жесткого изотопического класса кривой S . При этом концевой вершиной станет w -вершина при нечётном n и b -вершина при чётном n .*

Доказательство. Пусть $\tilde{\Gamma}$ имеет вещественное концевое мультиребро E . При нечётном n оно соединяет концевую b -вершину с некоторой w -вершиной W . Поскольку в Γ_w степень вещественной b -вершины выше степени простой вещественной w -вершины, то W является кратной. Согласно замечанию 2 вершину W можно превратить в графе Γ^+ в пару w -вершин так, чтобы концом мультиребра E оказалась простая w -вершина, соединённая волнистым ребром с некрашенной вершиной (см. рис. 3). Применяя теперь к графу Γ^+ преобразование, указанное

на рис. 3, получим сначала граф с bw -вершиной, которая, распадаясь, дает мнимое концевое мультиребро степени r графа $\tilde{\Gamma}$ с концевой w -вершиной. Согласно лемме 2 это преобразование не меняет жесткого изотопического класса кривой C .

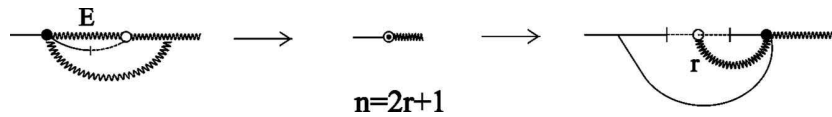


Рис. 3.

При чётном n мультиребро E степени r соединяет простую концевую w -вершину W с некоторой b -вершиной B . По построению графа Γ_w вершина W не может соединяться вещественным штриховым ребром с некрашеной вершиной, а B соединяется отличным от E вещественным мультиребром с некоторой w -вершиной W' . Поэтому грани графа Γ^+ , примыкающие к вершине B , расположены так, как указано на рис. 4.

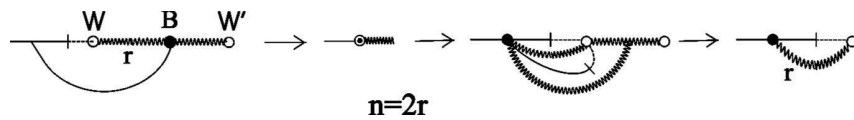


Рис. 4.

Применяя теперь к графу Γ^+ преобразование, указанное на этом рисунке, получим вместо E мнимое концевое мультиребро степени r графа $\tilde{\Gamma}$ с концевой b -вершиной. Как и при нечётном n , это преобразование не меняет жесткого изотопического класса кривой C .

Назовём грань графа Γ^+ *однолистной*, если f отображает её на одну из компонент множества $CP^1 \setminus RP^1$ гомеоморфно.

Лемма 6. Пусть $n > 2$. Если число нестягиваемых компонент кривой C при нечётном n равно 1, а при чётном n равно 0 и $RC \neq \emptyset$, то не меняя жёсткого изотопического класса кривой, в графе $\tilde{\Gamma}$ можно избавиться от всех циклов.

Доказательство. Согласно лемме 4 можно считать все b - и w -вершины графа Γ^+ вещественными. Длина цикла графа $\tilde{\Gamma}$ не меньше 4, а среди мультирёбер, примыкающих к b -вершине при нечётном n и к w -вершине при чётном n не может быть двух вещественных. Поэтому в цикле графа $\tilde{\Gamma}$ есть мнимое мультиребро E_1 , а среди следующих за ним мультирёбер E_2, E_3, E_4 – не более двух вещественных. Поэтому

возможны два случая: 1) E_1, E_3 – мнимые или E_2, E_4 – мнимые; 2) E_3 вещественное и в паре E_2, E_4 ровно одно вещественное.

В первом случае пусть, например, E_1, E_3 – мнимые. Согласно следствию 1 можно считать, что в графе Γ^+ нет мнимых некрашенных вершин. Тогда если грань A графа Γ^+ , лежащая внутри указанного цикла и содержащая концы ребра E_2 , однолистка, то соседняя с ней грань B , примыкающая к мультирёбрам E_1, E_3 , неоднolistна. Если же A неоднolistна, то сначала получим грань B , примыкающую к мультирёбрам E_1, E_3 . Пусть E' – смежное с E_2 сплошное ребро на границе грани A , E'' – первое из следующих за E' и E_2 сплошных рёбер на этой границе и A', A'' – соседние с A грани графа Γ^+ с $E' \in \partial A'$ и $E'' \in \partial A''$. Выберем на ребрах E', E'' внутренние точки η_1, η_2 с $f(\eta_1) = f(\eta_2)$ и с помощью преобразования $\sigma_{A, \eta_1, \eta_2}$ стянем их в некоторую точку ξ . Затем с помощью преобразования $\tau_{\xi, A', A''}$ получим неоднolistную грань B , примыкающую к мультирёбрам E_1, E_3 . Выберем теперь на ∂B на волнистых ребрах мультирёбер E_1, E_3 внутренние точки η_1, η_2 с $f(\eta_1) = f(\eta_2)$. Опять применим пару преобразований $\sigma_{B, \eta_1, \eta_2}, \tau_{\xi, B', B''}$, где B' и B'' – соседние с B грани, примыкающие к указанным волнистым рёбрам мультирёбер E_1, E_3 , уменьшив на 1 кратности мультирёбер E_1, E_3 . Повторяя эту процедуру, устраним хотя бы одно из рёбер E_1, E_3 , разрушив выбранный цикл графа $\tilde{\Gamma}$.

Во втором случае пусть, например, E_2 – вещественное. Прделаем те же преобразования, что и в первом случае. Если при этом мультиребро E_1 исчезнет, то цикл будет разрушен. В противном случае кратность мультиребра E_3 уменьшится до 1 и оно будет лежать на границе неоднolistной грани B , примыкающей к мультиребру E_1 . Пусть V_1 – общая вершина рёбер E_1, E_2 и V_2 – общая вершина рёбер E_2, E_3 . Если V_2 является b -вершиной при нечётном n или w -вершиной при чётном n , то она имеет чётную кратность и согласно замечанию 2 может быть преобразована в пару вещественных вершин половинной кратности. Это превращает E_2 в концевое и мнимое мультирёбра графа $\tilde{\Gamma}$ и потому сводит задачу к первому случаю.

При чётном n осталось рассмотреть случай, когда V_1 является w -вершиной. Поскольку в Γ_w степень простой вещественной b -вершины выше степени простой вещественной w -вершины, а кратность мультиребра E_3 равна 1, то кратность вершины V_1 больше кратности вершины V_2 . Замечание 2 позволяет преобразовать V_1 в пару вещественных вершин, кратность одной из которых будет равна кратности вершины V_2 , и потому цикл будет разрушен.

При нечётном n осталось рассмотреть случай, когда V_1 является

b -вершиной. Если V_2 является кратной, то так же, как и в доказательстве леммы 5, отщепляя от V_2 простую вещественную w -вершину и применяя преобразование, указанное на рис. 3, последовательно уменьшим кратность вершины V_2 до 1. Выберем на волнистом ребре мультиребра E_1 и на E_3 внутренние точки η_1, η_2 с $f(\eta_1) = f(\eta_2)$, применим преобразование $\sigma_{B, \eta_1, \eta_2}$, стянув η_1 в η_2 , а затем превратим η_2 в пару простых некрашенных вершин, разбив E_3 на 3 волнистых ребра. Преобразование, указанное на рис. 3, превращает одно из этих волнистых ребер в мнимое. Стянув оставшиеся два вещественных волнистых ребра и слив две соседние b -вершины в одну, уменьшим длину цикла на 2. Поэтому индукция позволяет избавиться от цикла графа $\tilde{\Gamma}$.

Вложим граф $\tilde{\Gamma}$ в CP_+^1 , поместив его вершины на те же места, что и в графе Γ^+ . Поскольку все вершины графа $\tilde{\Gamma}$ вещественны, любое его мнимое ребро разрезает CP_+^1 на две части, и потому двойственный к нему в CP_+^1 граф, вершины которого – грани графа $\tilde{\Gamma}$, а рёбра – общие рёбра граней, является ациклическим. Следовательно, указанный выше способ избавления от цикла графа $\tilde{\Gamma}$ слиянием двух его граней в одну позволяет устранить все циклы.

В заключение этого пункта отметим одно свойство графа Γ_w , которое, впрочем, не используется в дальнейшем.

Замечание 3. *Если все грани графа Γ^+ однолиственны, граф Γ^+ не имеет мнимых некрашенных вершин и вещественных ребер с некрашенными концами, а все его вещественные некрашенные вершины являются простыми, то граф Γ_w связан.*

Доказательство. Добавим к каждой компоненте графа Γ_w все примыкающие к ней грани графа Γ^+ и все рёбра на границах этих граней, получив плоский подграф графа Γ^+ . Два таких подграфа не могут иметь общую грань в силу однолиственности граней. Тогда если E – пересечение этих подграфов, то E – их общее ребро. Очевидно, оно мнимое и к нему не примыкают b - и w -вершины, а если примыкает d -вершина, то она является мнимой, т.к. кривая C неособа. Поэтому, в силу отсутствия мнимых некрашенных вершин и вещественных рёбер с некрашенными концами, хотя бы один из концов ребра E является простой вещественной некрашеной вершиной U , соединённой вещественными рёбрами с двумя b - или w -вершинами. Однако в ходе построения графа Γ_w каждая такая вершина, как U , была устранена слиянием указанной пары b - или w -вершин в одну. Поэтому граф Γ_w связан.

4.3. Разложение графа Γ^+ . Пусть в графе Γ^+ существует простая цепь из мнимых рёбер, соединяющая две вещественные некрашенные вершины и проходящая через каждую свою вершину так, что число рёбер, прилегающих к этой вершине с одной стороны от этой цепи, равно числу рёбер, прилегающих с другой стороны. Разрежем Γ^+ по этой цепи и превратим её на каждом из двух полученных графов в соответствующий отрезок прямой $\mathbf{R}P^1$. Тогда каждый из этих графов будет графом соответствующей трёхчленной кривой, вырезаемой из кривой C . Многоугольники Ньютона двух этих кривых – треугольники, полученные разрезанием треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(ne, 0)$, $(0, n)$ по отрезку с концами $(ne', 0)$, $(0, n)$ для некоторого натурального $e' < e$. Поэтому граф Γ^+ можно разрезать таким способом не более, чем на e частей. Назовём граф Γ^+ *разложимым*, если в нём существует разрез указанного вида. Неразложимый граф называется *блоком*.

§5. Кривые с максимальным числом овалов

Всюду в этом параграфе $k = n - 1$.

5.1. Оценка сверху числа овалов вещественной трёхчленной кривой

Лемма 7. *За счёт возможного увеличения числа овалов кривой неразложимый граф Γ^+ можно преобразовать так, что все b -вершины графа Γ_w станут простыми. При этом если $\tilde{\Gamma}$ будет ациклическим и его концевые вершины будут w -вершинами, то все w -вершины станут простыми, а при нечётном n – и вещественными.*

Доказательство. Согласно лемме 4 все b -вершины графа Γ^+ можно считать вещественными, а согласно замечанию 2 – простыми. Согласно следствию 1 можно считать, что в графе Γ^+ нет мнимых некрашенных вершин и вещественных рёбер с некрашенными концами, а все вещественные некрашенные вершины являются простыми. Пусть b -вершины B_1, B_2 соединены вещественными рёбрами E_1, E_2 с некрашеной вершиной U , которая соединена мнимым ребром E_3 с вершиной X . Вершина X не может быть некрашеной, иначе E_3 является разрезом, что противоречит неразложимости графа Γ^+ . Если X является w -вершиной, стянем рёбра E_1, E_2 , слив вершины B_1, B_2 и U в вещественную двукратную b -вершину, которую затем превратим в пару мнимых сопряженных корней многочлена b , получив простую мнимую b -вершину графа Γ^+ . Если X – это d -вершина, то она является мнимой; стянем ребро E_3 ,

слив вершины X и U в вещественную двукратную d -вершину, которую затем превратим в пару вещественных d -вершин, получив новый овал кривой C . Таким образом, Γ^+ не будет содержать ни одной некрашенной вершины, соединённой волнистыми рёбрами с b -вершинами, и потому при построении графа Γ_w кратных b -вершин не возникнет.

Поскольку вершины графа $\tilde{\Gamma}$ правильно раскрашены в два цвета, то если он ациклический и все его концевые вершины являются w -вершинами, число его w -вершин больше числа b -вершин. А так как все b -вершины являются простыми и $\deg w = \deg b + 1$, то и все w -вершины являются простыми. При нечётном n все w -вершины исходного графа Γ^+ согласно лемме 4 можно считать вещественными, а все преобразования графа Γ^+ , указанные в доказательстве, не нарушают этого условия.

Теорема 1. *Если граф кривой неразложим, то при $n = 2r + 1$ кривая может иметь не более, чем $2re - 1$ овалов, при $n = 2$ — не более, чем e овалов, а при $n = 2r > 2$ — не более, чем $(3r - 1)e - 1$ овалов.*

Доказательство. Поскольку кратность пересечения овала с осью OX чётна, проекция $(x, y) \mapsto x$ переводит овал в отрезок на $\mathbf{R}P^1$, который, в силу сказанного в §3, ограничен вещественными d -вершинами и состоит из штриховых рёбер, а при чётном n — возможно, и из штриховых и волнистых. На этом отрезке в соответствии с указанным в п.4.2 построением графа Γ_w имеется одна w -вершина чётной (возможно, нулевой) кратности, либо при чётном n имеются две w -вершины нечётной кратности, соединённые вещественными волнистыми рёбрами с одной b -вершиной. В первом случае превратим эту вещественную w -вершину (если она есть) в пару мнимых комплексно сопряжённых корней многочлена w , получив мнимую w -вершину графа Γ^+ . Тогда в этом случае указанный отрезок под овалом будет содержать некрашеную вершину, которая соединяется мнимым штриховым ребром с вещественной или мнимой w -вершиной. Ясно, что это ребро не может лежать внутри цикла графа Γ_w . Следовательно, число l овалов кривой не больше числа мнимых штриховых рёбер, примыкающих к w -вершинам графа Γ_w и лежащих вне циклов этого графа, (плюс половина числа вещественных w -вершин при чётном n). Для каждой w -вершины число примыкающих к ней рёбер указанного вида, очевидно, равно степени этой вершины в графе $\tilde{\Gamma}$ в случае, когда она мнима, и на 1 меньше этой степени, когда эта вершина вещественна. Следовательно, l не превосходит суммы степеней w -вершин графа $\tilde{\Gamma}$ без числа его вещественных w -вершин при нечётном n и без половины этого числа при чётном n . Сумма степеней w -вершин графа $\tilde{\Gamma}$ равна числу его рёбер, которое в силу ациклическо-

сти графа $\tilde{\Gamma}$ равно $n_0(\tilde{\Gamma}) - b_0(\tilde{\Gamma})$, где n_0 – число вершин и b_0 – число компонент связности графа. Поэтому при нечётном n

$$l \leq r_b + i_b + i_w - b_0(\tilde{\Gamma}) \leq \deg b + i_w - (b_0(\tilde{\Gamma}) + i_b) \quad (4)$$

и при чётном n

$$l \leq r_b + i_b + r_w/2 + i_w - b_0(\tilde{\Gamma}) \leq \deg b + 1/2 \deg w - (b_0(\tilde{\Gamma}) + i_b), \quad (5)$$

где r_b и i_b – числа вещественных и мнимых b -вершин, а r_w и i_w – числа вещественных и мнимых w -вершин графа $\tilde{\Gamma}$. Если $n = 2$, то $\deg b = e$, $\deg w = 2e$, $i_b \geq 0$ и, очевидно, $b_0(\tilde{\Gamma}) = e$, что вместе с (5) даёт нужную оценку. При чётном $n = 2r$ осталось в (5) подставить $\deg b = (2r - 1)e$, $\deg w = 2re$, $i_b \geq 0$ и $b_0 \geq 1$. При нечётном n в силу лемм 6 и 5 можно считать, что граф $\tilde{\Gamma}$ ациклический, а его концевые вершины являются w -вершинами, и потому $i_w = 0$ в силу леммы 7. Соединяя это с (4), где $\deg b = 2re$ и $b_0 \geq 1$, получаем искомую оценку.

Теорема 2. *При $n = 2r + 1$ кривая C может иметь не более, чем $(2r + 1)e - 2$ овалов, при $n = 2$ – не более, чем e овалов, а при $n = 2r > 2$ – не более, чем $(3r - 1)e - 1$ овалов.*

Доказательство. При нечётном n пусть граф Γ^+ кривой на Σ_e с l овалами является объединением графов двух кривых на Σ_{e_1} и Σ_{e_2} с l_1 и l_2 овалами. Ясно, что $e = e_1 + e_2$ и $l \leq l_1 + l_2 + 2$, причём $l = l_1 + l_2 + 2$, если объединяемые графы пересекаются по паре мнимых штриховых рёбер, соединяющих мнимую w -вершину с вещественными некрашеными вершинами. Поэтому l будет максимальным для графа Γ^+ , разрезанного указанным образом на максимальное число неразложимых графов кривых, имеющих максимальное число овалов. Согласно сказанному в п.4.3, число таких разрезов не больше, чем $e - 1$. Соединяя это с утверждением теоремы 1, получаем искомую оценку.

При чётном n если граф кривой является объединением блоков, то число овалов кривой, очевидно, равно сумме чисел овалов кривых, отвечающих этим блокам. Поэтому утверждение теоремы при $n = 2$ следует из однородности оценки в теореме 1. При чётном $n > 2$ неоднородность оценки в теореме 1 показывает, что граф кривой с максимальным числом овалов неразложим.

5.2. Жёсткая изотопическая классификация. Пусть кривая C имеет максимальное, согласно теореме 2, число овалов. Рассмотрим сначала её свойства, справедливые при любом n , а потом – отдельно при n нечётном и n чётном.

При нечётном n все концевые вершины графа $\tilde{\Gamma}$ будем, согласно лемме 5, считать w -вершинами.

Предложение 1. *При $n > 2$ для кривой с максимальным числом овалов граф $\tilde{\Gamma}$ является деревом, его b -вершины вещественны и просты, а если все его концевые вершины являются w -вершинами, то и w -вершины просты. Все некрашенные вершины графа Γ^+ вещественны и просты, их число равно $(2n - 1)e - 2$ и все грани графа Γ^+ однолиственны.*

Доказательство. Для каждого блока из равенств, в которые превращаются неравенства (4) и (5), следует, что $b_0 = 1$, $r_b + i_b = \deg b$ и, если n чётно, $r_w + 2i_b = \deg w$. Поэтому из доказательства теоремы 2 следует, что граф $\tilde{\Gamma}$ является деревом, его b -вершины вещественны и просты, а при чётном n простыми являются и w -вершины. При нечётном n простота w -вершин следует из леммы 7.

Для кривой с максимальным числом овалов все мнимые сплошные и штриховые рёбра графа Γ^+ , лежащие вне циклов графа Γ_w , примыкают к вещественным некрашенным вершинам, и обратно, всякая вещественная некрашенная вершина является концом такого ребра. Поэтому число ν вещественных некрашенных вершин равно сумме степеней вершин графа $\tilde{\Gamma}$ без числа его вещественных вершин (ср. доказательство теоремы 1). Сумма степеней вершин графа $\tilde{\Gamma}$ равна удвоенному числу его рёбер, т.е. в силу ацикличности и связности графа $\tilde{\Gamma}$ равна $2n_0(\tilde{\Gamma}) - 2$, где n_0 — число вершин. Пусть r_{bw} и i_{bw} — числа вещественных и мнимых вершин графа $\tilde{\Gamma}$, тогда $\nu = 2n_0(\tilde{\Gamma}) - 2 - r_{bw} = r_{bw} + 2i_{bw} - 2$, что в силу простоты b - и w -вершин равно $\deg b + \deg w - 2 = (2n - 1)e - 2$, т.е. ν принимает максимально возможное значение, указанное в замечании 1. Значит, некрашенные вершины графа Γ^+ вещественны и просты и все грани графа Γ^+ однолиственны.

Следствие 2. *Пусть концевые вершины графа $\tilde{\Gamma}$ при нечётном n все являются w -вершинами, а при чётном n либо все являются w -вершинами, либо все — b -вершинами. Тогда жёсткий изотопический тип кривой с максимальным числом овалов определяется вложением в CP_+^1 графа Γ_w .*

Доказательство. Это утверждение следует из однолиственности граней графа Γ^+ .

1. Кривые с $n = 2r + 1$, $k = n - 1$ и $l = en - 2$.

Из доказательств теорем 1 и 2 следует, что если все концевые вершины графа $\tilde{\Gamma}$ являются w -вершинами, то число мнимых w -вершин равно $e - 1$ и граф Γ^+ склеивается из e блоков, являющихся графами кривых

бистепени $(0, n)$ на Σ_1 с максимальным числом овалов, причем граф склейки блоков является деревом. Два блока пересекаются по паре мнимых штриховых рёбер, соединяющих мнимую w -вершину с вещественными некрашеными вершинами. На рис. 5 показан один из возможных графов $\tilde{\Gamma}$ для такого блока (числами на рисунке обозначены кратности мультирёбер, вещественные мультирёбра изображены горизонтально).

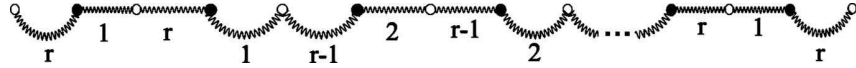


Рис. 5.

Заметим, что при фиксированном n даже если граф Γ^+ кривой с максимальным числом овалов неразложим, граф $\tilde{\Gamma}$ с концевыми w -вершинами не является единственным. Например, при $n = 5$ (и $e = 1$) имеются ровно 2 графа $\tilde{\Gamma}$, один из которых указан на рис. 5 при $r = 2$, а второй – на рис. 6.

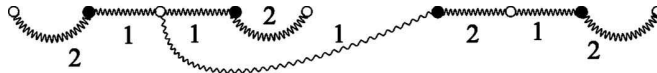


Рис. 6.

Прообраз при проекции $(x, y) \mapsto x$ отрезка из штриховых рёбер на $\mathbf{R}P^1$, ограниченного соседними d -вершинами, назовём S -образной частью кривой, если сумма кратностей w -вершин на этом отрезке нечётна.

На каждом из отрезков, на которые d -вершины разбивают прямую $\mathbf{R}P^1$, лежит некрашенная вершина или w -вершина, поэтому максимальное число вещественных d -вершин равно $3e(n-1)$. Оно достигается для кривой с максимальным числом овалов, если все концевые вершины графа $\tilde{\Gamma}$ являются w -вершинами. Половина указанных отрезков отвечает овалам и S -образным частям кривой, поэтому число S -образных частей кривой с максимальным числом овалов и максимальным числом d -вершин равно $e(n-3)/2 + 2$.

2. Кривые с $n = 2$. Кривые с $n = 2$ называются гиперэллиптическими. Известна жёсткая изотопическая классификация таких кривых с любым числом овалов (см. [5, п.3.6], [4, п.4.9.4.]).

3. Кривые с $n = 2r > 2$, $k = n-1$ и $l = (3n/2-1)e-1$. Из доказательства теоремы 2 следует, что граф кривой с максимальным числом овалов неразложим. На рис. 7 показаны два графа $\tilde{\Gamma}$, отвечающие кривым с $n = 2r$, имеющим максимальное число овалов (числами на рисунке

обозначены кратности мультирёбер, вещественные мультирёбра изображены горизонтально). Все w -вершины первого графа вещественны, и потому кривая с таким графом имеет минимальное число овалов, не пересекающих ось OX , равное $(2r - 1)e - 1$. Все w -вершины второго графа мнимы, и потому все овалы кривой с таким графом не пересекают ось OX .

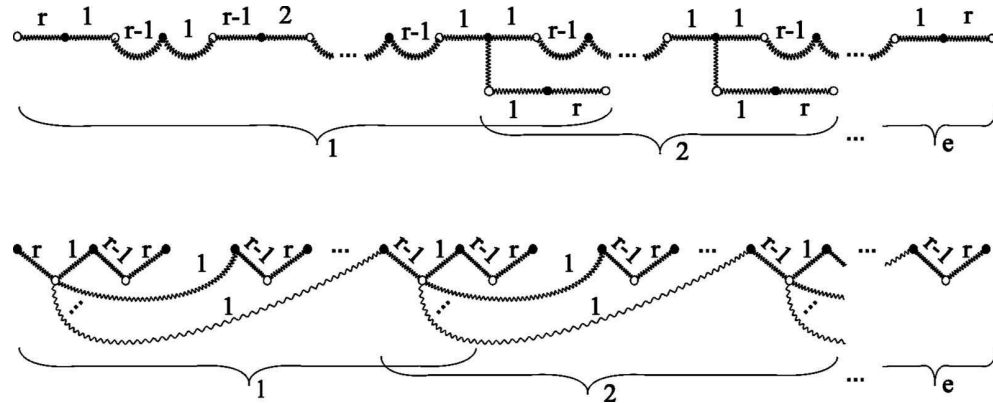


Рис. 7.

5.3. Тригональные кривые. Кривая бистепени $(0, 3)$ на Σ_e называется *тригональной*. В координатах x, y , указанных в § 2, она задаётся уравнением, имеющим степень 3 по y , которое можно привести к виду (1) с $k = 2$, избавившись от слагаемого с y^2 .

Согласно теореме 2 максимальное число овалов тригональной кривой равно $3e - 2$, поэтому в силу (2) она является M -кривой. Если концевые вершины графа $\tilde{\Gamma}$ являются w -вершинами, то в силу сказанного в п.5.2 о кривых нечётной степени, граф Γ_w такой кривой совпадает с графом $\tilde{\Gamma}$ и является цепью с двумя концевыми w -вершинами.

Закодируем вещественную схему тригональной M -кривой следующим образом: $\langle S, l_1, \dots, l_p, S, l_{p+1}, \dots, l_q \rangle$, где l_i – число овалов между соседними точками пересечения нестягиваемой компоненты с осью OX , а S – обозначение S -образного участка кривой, причём мы отождествляем кодировки, отличающиеся циклической перестановкой. Каждой кодировке отвечают две вещественные схемы кривых, получающиеся друг из друга отражением относительно оси OX .

Жёсткий изотопический тип тригональной M -кривой, определяемый вложением в CP^1_+ графа Γ_w , задаётся следующим образом. Во-первых, по набору (s_1, s_2, \dots, s_e) , $s_i \in \pm 1$, определённому с точностью до умножения всего набора на -1 с одновременным обращением его

порядка, строится граф Γ^+ в нижней полуплоскости как объединение блоков $D(s_1), D(s_2), \dots, D^{inv}(s_e)$, где $D(1)$ – полукольцо в нижней части рис. 8, $D(-1)$ – его образ при отражении относительно вертикальной прямой (ср. [8, лемма 1]), при этом соседние блоки пересекаются по полуокружности, у $D(s_1)$ и $D(s_e)$ граничные полуокружности, не являющиеся общими с соседними блоками, стянуты в точку (т.е. $D(s_1)$ и $D(s_e)$ – полукруги при $e > 1$ и $D(1)$ – круг при $e = 1$), а $D^{inv}(s_e)$ – образ полукруга $D(s_e)$ при инверсии. Во-вторых, графу Γ^+ отвечают два жёстких изотопических класса: кривые одного класса получают из кривых другого отражением относительно оси OX ; при чётном e это следует из ориентируемости поверхности $\mathbf{R}\Sigma_e$, а при нечётном – из-за того, что над средним блоком $D(s_{(e+1)/2})$ кривая может быть двух видов, получающихся друг из друга отражением относительно оси OX .

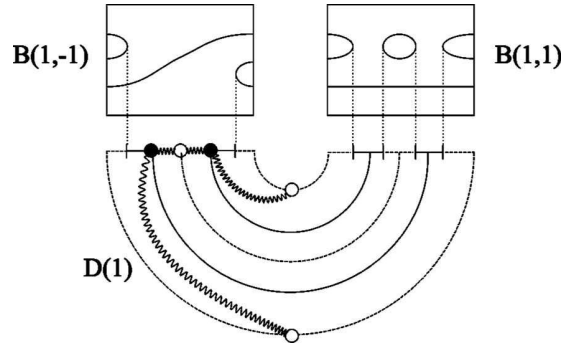


Рис. 8.

Опишем вещественную схему такой кривой. Для вещественных блоков $B(1, -1)$ и $B(1, 1)$, изображённых в верхней части рис. 8, пусть $B(-1, -1)$ и $B(-1, 1)$ – их образы при отражении относительно горизонтальной прямой. Вещественная схема кривой с графом, полученным объединением блоков $D(s_1), D(s_2), \dots, D^{inv}(s_e)$, является результатом циклической склейки вещественных блоков $B(\varepsilon_1, s_1), B(\varepsilon_2, s_2), \dots, B(\varepsilon_e, s_e), B(\varepsilon_e, -s_e), B(-\varepsilon_{e-1}, -s_{e-1}), \dots, B((-1)^{e-1}\varepsilon_1, -s_1)$, где $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i s_i$, причём, если e нечётно, последний вещественный блок приклеивается к первому с поворотом на 180° . Пусть $(S, s_1, s_2, \dots, s_e, S, -s_e, \dots, -s_1) = (S, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_1}, -1, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_2}, -1, \dots, -1, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_p}, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_{p+1}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_{e+2}})$, где $a_1 a_{e+2} = a_p a_{p+1} = 0$. Тогда вещественная схема M -кривой имеет кодировку $\langle S, 2e - 1, S, \underbrace{1, \dots, 1}_{e-1} \rangle$ при $p = 1$ и $\langle S, 2a_1, 2a_2 + 1, \dots, 2a_{p-1} + 1, 2a_p, S, 2a_{p+1}, 2a_{p+2} + 1, \dots, 2a_{e+1} + 1, 2a_{e+2} \rangle$ при $p > 1$.

Литература

1. **Рохлин В.А.** Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // *УМН. 1978. Т.33. Вып.5. С. 77-89.*
2. **Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V.** Real Enriques surfaces // *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2000. V.1746. P. 259.*
3. **Никулин В.В.** Целочисленные квадратичные формы и некоторые их геометрические приложения // *Изв. АН СССР. Сер: мат. 1979. Т.43. №1. С. 111-177.*
4. **Дегтярёв А.И., Харламов В.М.** Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: du côté de chez Rokhlin // *УМН. 2000. Т.55. Вып.4. С. 129-212.*
5. **Zvonilov V.I.** Stratified spaces of real algebraic curves of bidegree $(m,1)$ and $(m,2)$ on a hyperboloid // *Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1996. V.173. P. 253-264.*
6. **Дегтярев А.И., Звонилов В.И.** Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени $(3,3)$ на квадратах // *Матем. заметки. 1999. Т.66. №6. С. 810-815.*
7. **Звонилов В.И.** Жесткие изотопии вещественных тригональных кривых на поверхностях Хирцебруха // *Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т.267. С. 133-142.*
8. **S. Yu. Orevkov** Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves // *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 2003. V.12(4). P. 517-531.*
9. **Гриффитс, Харрис.** Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. 864 с.
10. **Прасолов В.В.** Многочлены. М.: МЦНМО, 1999. 336 с.
11. **Хартсхорн Р.** Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981. 600 с.
12. **Натанзон С.М.** Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. I, II // *Труды семинара по вект. и тенз. анализу. 1988. Вып. XXIII. С. 79-103; 1991. Вып. XXIV. С. 104-132.*

Summary

Zvonilov V.I. Rigid Isotopies of Trinomial Curves with the Maximal Number of Ovals

Let l be the number of ovals of nonsingular real trinomial curve $y^n + b(x)y + w(x) = 0$. In this paper the sharp upper bound for l is found for any n . The rigid isotopy is understood as a path in the space of nonsingular real trinomial curves with n fixed. The rigid isotopy classification of such curves with the maximal l is given. In particular case $n = 3$ the rigid isotopy classification of trigonal M -curves is obtained.

Сыктывкарский университет

Поступила 29.3.2006