Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.6. 2006

УДК 512.7+519.6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

В.Н. Тарасов, Л.А. Павлова

Некоторые геометрические теоремы можно задавать в координатной форме как полиномы алгебры и доказывать алгоритмическими методами. В статье с помощью компьютерной алгебры доказываются теоремы Паскаля и Паппа Александрийского, а также устанавливаются некоторые свойства точки Торричелли для произвольного тетраэдра.

1. Основные принципы алгоритмических методов доказательства геометрических теорем

Алгоритмические методы проверки справедливости утверждений состоят в том, что когда заданы декартовы координаты на евклидовой плоскости, условия и заключения некоторых геометрических теорем могут быть записаны полиномиальными уравнениями от координат точек, о которых говорится в формулировках соответствующих утверждений. В этом заключается связь теорем с алгебраической геометрией.

Адекватное преобразование условий теоремы в систему полиномиальных уравнений легче всего осуществлять с помощью чертежа, иллюстрирующего рассматриваемую конфигурацию.

При построении геометрической конфигурации координаты некоторых точек выбираются произвольно, а координаты остальных точек полностью определяются значениями "произвольных" координат. Обозначим произвольные координаты через u_i, а зависимые координаты – через x_j, причем разделение координат на два подмножества не задается однозначно условиями задачи. Различные способы описания одной и той же конфигурации приводят к различным множествам произвольных переменных и к различным полиномиальным формулировкам условий теоремы.

Рассмотрим алгебраическую форму геометрической теоремы. Условия теоремы могут быть представлены в виде системы полиномиальных уравнений

$$h_j(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad j \in 1 : n, \tag{1.1}$$

где h_j – полиномы от независимых переменных $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и зависимых координат $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а заключение теоремы в виде

$$g(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{1.2}$$

Достаточно рассматривать случай одного заключения, так как в противном случае можно рассматривать их по очереди. Очевидно, что для правильно поставленной геометрической задачи количество условий должно быть равно количеству зависимых переменных.

Теорема будет установлена, если удастся показать, что (1.1) является следствием (1.2), т.е. полином $g(u, x)$ обращается в нуль в точности там, где равны нулю полиномы $h_j(u, x)$, $\;j \in 1 : n$, при любых допустимых значениях u. Заметим, что (1.1) определяет многообразие $V = V(h_1, \ldots, h_n) \subset \mathbf{R}^{\mathrm{m+n}}$. Из теории идеалов следует, что в этом случае заключение теоремы можно представить в виде $g(u, x) = \sum\limits_j A_j(u, x) \cdot h_j(u, x)$ для некоторых полиномов $A_j \in \mathbf{R}[\mathrm{u}, \mathrm{x}]$, причем $g(u, x) \in I(V)$, т.е. g принадлежит идеалу $\langle h_1, h_2, \ldots, h_n \rangle$.

Следует отметить, что алгоритмический метод должен позволять делать выводы о справедливости геометрических утверждений, учитывая все случаи, в том числе и вырожденные. Так, например, существуют полиномы, зависящие только от u_i, которые обращаются в нуль на некоторых компонентах многообразия. Так как они могут принимать любые значения, и независимы, то эти компоненты исключим из рассмотрения.

Будем рассматривать только неприводимое подмногообразие $V' \subset V$. Поэтому будем считать, что заключение g обобщенно следует из условий $h_1, \ldots, h_m$, если $g \in I(V') \subset \mathbf{R}[\mathrm{u_m}, \mathrm{x_n}]$. Таким образом, доказать теорему – это значит доказать, что g обращается в нуль на V'.

2. Формулировка основных геометрических утверждений в полиномиальной форме

Пусть $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$, $E(e_1, e_2)$, $F(f_1, f_2)$ – точки плоскости. Каждое из следующих утверждений может быть записано в виде одного или нескольких полиномиальных уравнений:

1. $\overline{AB}$ параллелен $\overline{CD}$: $(b_2 - a_2)(d_1 - c_1) - (d_2 - c_2)(b_1 - a_1) = 0$;

2. $\overline{AB}$ перпендикулярен $\overline{CD}$: $(b_1-a_1)(c_1-d_1)+(b_2-a_2)(c_2-d_2)=0$;

3. точки A, B, C лежат на одной прямой:

$$(b_2-a_2)(c_1-a_1)-(c_2-a_2)(b_1-a_1)=0;$$

4. расстояние от A до B равно расстоянию от C до D , т.е. $AB=CD$:

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2-(d_1-c_1)^2-(d_2-c_2)^2=0;$$

5. точки B и C принадлежат одной окружности с центром в точке A:

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2-(c_1-a_1)^2-(c_2-a_2)^2=0;$$

6. точка C – середина отрезка AB:

$$(c_2-a_2)(b_1-a_1)-(b_2-a_2)(c_1-a_1)=0,$$
$$(c_2-a_2)^2+(c_1-a_1)^2-(b_1-c_1)^2-(b_2-c_2)^2=0.$$

3. Алгоритмический метод Ву

Рассмотрим один из алгоритмических методов доказательства геометрических теорем – метод Ву [1], разработанный китайским математиком Ву Вень-Цунем. Этот метод выясняет, когда $g \in I(V')$ и использует интересный вариант деления полиномов от нескольких переменных.

Теорема 1. Рассмотрим два полинома следующего вида:

$$f=c_py^p+c_{p-1}y^{p-1}+\ldots+c_1y+c_0, \quad g=d_my^m+d_{m-1}y^{m-1}+\ldots+d_1y+d_0. \tag{3.1}$$

В (3.1) коэффициенты $c_j, \quad j \in 1:p$ и $d_k, \quad k \in 1:m$ являются полиномами от переменных $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Пусть $m \leq p$ и $g \neq 0$. Будем делить полином f на полином g по переменной y, рассматривая коэффициенты как параметры. Тогда:

1. следуя стандартному алгоритму деления можно получить равенство

$$d_m^s f = qg+R, \tag{3.2}$$

где $s>0$ и или $R=0$, или степень остатка R по переменной y строго меньше m;

2. $R \in \langle f,g \rangle$ [1].

Полиномы q и R, удовлетворяющие (3.2), построены с помощью *алгоритма псевдоделения* по переменной y. Это обычное деление полиномов от одной переменной с коэффициентами в поле рациональных функций, но с последующей ликвидацией знаменателей при умножении на некоторую степень d_m^s.

В дальнейшем будем использовать обозначение $prem(f, g, y)$ для псевдоостатка R.

Алгоритм метода Ву состоит из двух шагов.

Шаг 1. Приведение системы условий теоремы к системе полиномов f_j треугольного вида по переменным $x_1, \dots, x_n$, используя псевдоделение, т.е. к системе

$$\begin{cases} f_1 = f_1(u_1, \dots, u_m, x_1), \\ f_2 = f_2(u_1, \dots, u_m, x_1, x_2), \\ \dots \\ f_n = f_n(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{3.3}$$

причем, $V(f_1, \dots, f_n)$ содержит неприводимое многообразие V', на котором u_i алгебраически независимы.

Это приведение может быть реализовано с помощью процедуры, похожей на метод Гаусса для решения линейных систем. Переменные x_j рассматриваются по очереди, начиная с x_n.

Связь между треугольной системой и исходными полиномами заключается в том, что $V' \subset V \subset V(f_1, \dots, f_n)$.

Шаг 2. Последовательное псевдоделение заключения g по каждой переменной x_j с тем, чтобы установить принадлежность g идеалу $I(V')$. На этом шаге вычисляются остатки

$$\begin{cases} R_{n-1} = prem(g, f_n, x_n), \\ R_{n-2} = prem(R_{n-1}, f_{n-1}, x_{n-1}), \\ \dots \\ R_1 = prem(R_2, f_2, x_2), \\ R_0 = prem(R_1, f_1, x_1). \end{cases} \tag{3.4}$$

Результат этого шага описывается следующей теоремой.

Теорема 2. Рассмотрим множество условий и заключение геометрической теоремы. Пусть R_0 – последний остаток, найденный при последовательном псевдоделении полинома g (как в (3.4)) с использованием (3.3). Пусть d_j – старший коэффициент полинома f_j от переменных x_j. Тогда

1) существуют неотрицательные целые числа $s_1, \dots, s_n$ и полиномы $A_1, \dots, A_n$ в $\mathbf{R}[\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}, \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}]$ такие, что $d_1^{s_1} \dots d_n^{s_n} g = A_1 f_1 + \dots + A_n f_n + R_0$;

2) если $R_0 = 0$, то g обращается в ноль в каждой точке множества $V' - V(d_1, \ldots, d_n) \subset \mathbf{R}^{\mathrm{m+n}}$, так как уравнения $d_j = 0$ определяют вырожденные случаи геометрических конфигураций [1].

Авторами статьи был реализован метод Ву в пакете компьютерной алгебры Maple 9.5 [5].

4. Теорема Паппа

Теорема (Паппа) [3]: если все вершины шестиугольника лежат поочередно на двух произвольных прямых, то точки попарного пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой. Другими словами, если $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$, $R = BC' \cap B'C$, то P, Q, R лежат на одной прямой (рис. 4.1).

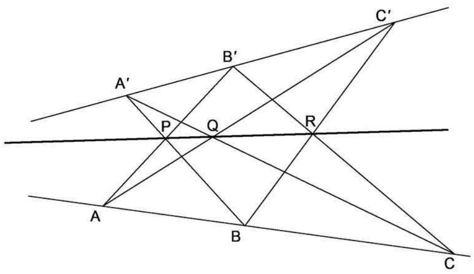

Рис. 4.1.

Доказательство.

Чтобы установить связь этой теоремы с алгебраической геометрией, покажем, как условия и заключение теоремы могут быть записаны в полиномиальной форме. Выберем систему координат удобным образом. Проще всего это сделать так: точку A помещаем в начало координат, а прямую AB совмещаем с горизонтальной осью.

Тогда $A = (0, 0)$, $B = (u_1, 0)$, $C = (u_2, 0)$, где $u_1, u_2 \neq 0 \in \mathbf{R}$.

Точки A' и C' имеют соответственно координаты (u_3, u_4), (u_6, u_7), где u_3, u_4, u_6, u_7 – новые переменные, не зависящие от u_1, u_2, и $u_4, u_6, u_7 \neq 0$. Ордината точки B' зависит от координат точек A' и C', а абсцисса может быть произвольной, т.е. $B' = (u_5, x_1)$, где $u_5 \neq 0$ – новая переменная. Так как координаты точек P, Q, R полностью определены координатами точек A, B, C и A', B', C', следовательно $P = (x_2, x_3)$, $Q = (x_4, x_5)$, $R = (x_6, x_7)$.

Одним из условий теоремы является то, что точки A', B', C' лежат на одной прямой. Отсюда получаем полиномиальное уравнение

$$h_1 = (x_1 - u_4)(u_6 - u_3) - (u_5 - u_3)(u_7 - u_4) = 0. \qquad (4.1)$$

Утверждение $P = AB' \cap A'B$ означает, что P принадлежит прямой AB' и прямой $A'B$. Имеем

$$h_2 = u_5 x_3 - x_2 x_1 = 0, \quad h_3 = x_3(u_3 - u_1) - u_4(x_2 - u_1) = 0. \qquad (4.2)$$

Аналогично, из условия $Q = AC' \cap A'C$ получаем

$$h_4 = u_7x_4 - x_5u_6 = 0, \quad h_5 = x_5(u_3 - u_2) - u_4(x_4 - u_2) = 0. \tag{4.3}$$

Утверждение $R = BC' \cap B'C$ дает следующие полиномиальные уравнения:

$$h_6 = x_7(u_6 - u_1) - u_7(x_6 - u_1) = 0, \quad h_7 = x_7(u_5 - u_2) - x_1(x_6 - u_2) = 0. \tag{4.4}$$

Система, составленная из (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), является переводом условий теоремы на язык полиномов. Заключение теоремы может быть также записано в полиномиальном виде. Заключением теоремы является то, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. Следовательно имеем

$$g = (x_2 - x_6)(x_5 - x_7) - (x_3 - x_7)(x_4 - x_6) = 0. \tag{4.5}$$

Итак, алгебраическая формулировка теоремы такова: если выполнены (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), то (4.5) также имеет место. Отметим, что здесь количество условий равно количеству зависимых переменных. Так и должно быть для правильно поставленной геометрической задачи.

Итак, получили систему

$$\begin{cases} h_1 = (x_1 - u_4)(u_6 - u_3) - (u_5 - u_3)(u_7 - u_4), \\ h_2 = u_5x_3 - x_2x_1, \\ h_3 = x_3(u_3 - u_1) - u_4(x_2 - u_1), \\ h_4 = u_7x_4 - x_5u_6, \\ h_5 = x_5(u_3 - u_2) - u_4(x_4 - u_2), \\ h_6 = x_7(u_6 - u_1) - u_7(x_6 - u_1), \\ h_7 = x_7(u_5 - u_2) - x_1(x_6 - u_2). \end{cases} \tag{4.6}$$

Приведем ее к треугольному виду. На первом шаге будем работать с h_7 и h_6, так как только эти два полинома содержат x_7. Кроме того, h_7 имеет степень 1 по x_7. Таким образом, в соответствии с процедурой приведения к треугольному виду полагаем $f_7 = h_7$ и заменяем h_6 на $f_6 = prem(h_6, h_7, x_7) = -u_5u_7x_6 + u_5u_7u_1 + u_2u_7x_6 - u_2u_7u_1 + x_1x_6u_6 - x_1x_6u_1 - x_1u_2u_6 + x_1u_2u_1$.

Теперь только f_6 содержит x_6, поэтому сразу же переходим к x_5. Два полинома h_5 и h_4 содержат x_5, и оба имеют степень 1 по x_5, так что полагаем $f_5 = h_5$ и заменяем h_4 на $f_4 = prem(h_4, h_5, x_5) = x_4u_7u_3 - x_4u_7u_2 - u_6u_4x_4 + u_6u_4u_2$.

Теперь только f_4 содержит переменную x_4. Переходим к x_3. Два полинома h_2 и h_3 содержат x_3, и оба имеют степень 1 по x_3, поэтому берем $f_3 = h_3$ и заменяем h_2 на $f_2 = prem(h_2, h_3, x_3) = -x_2x_1u_3 + x_2x_1u_1 + u_5u_4x_2 - u_5u_4u_1$. Оставшийся полином h_1 содержит только x_1, следовательно, сразу полагаем $f_1 = h_1$.

В результате приведения (4.6) к треугольному виду получили систему

$$\begin{cases} f_1 = (x_1 - u_4)(u_6 - u_3) - (u_5 - u_3)(u_7 - u_4), \\ f_2 = -x_2x_1u_3 + x_2x_1u_1 + u_5u_4x_2 - u_5u_4u_1, \\ f_3 = x_3(u_3 - u_1) - u_4(x_2 - u_1), \\ f_4 = x_4u_7u_3 - x_4u_7u_2 - u_6u_4x_4 + u_6u_4u_2, \\ f_5 = x_5(u_3 - u_2) - u_4(x_4 - u_2), \\ f_6 = -u_5u_7x_6 + u_5u_7u_1 + u_2u_7x_6 - u_2u_7u_1 + \\ +x_1x_6u_6 - x_1x_6u_1 - x_1u_2u_6 + x_1u_2u_1, \\ f_7 = x_7(u_5 - u_2) - x_1(x_6 - u_2). \end{cases} \tag{4.7}$$

Теперь перейдем ко второму шагу метода Ву. На этом шаге необходимо показать, что (4.5) является следствием (4.7). Положим $R_7 = g$ и начнём последовательно вычислять остатки $R_{i-1} = prem(R_i, f_i, x_i)$ при $i \in 7:1$. При псевдоделении по теореме 1 будем всегда брать минимально возможную степень s и иногда игнорировать постоянные множители.

Имеем $R_0 = 0$. Это означает, что если ни один из старших коэффициентов полиномов f_i не равен нулю, то теорема Паппа доказана методом Ву. Нетривиальные условия здесь такие:

$$d_1 = u_6 - u_3 \neq 0,$$

$$d_2 = -x_1u_3 + x_1u_1 + u_5u_4 \neq 0,$$

$$d_3 = u_3 - u_1 \neq 0,$$

$$d_4 = u_7u_3 - u_7u_2 - u_6u_4 \neq 0,$$

$$d_5 = u_3 - u_2 \neq 0,$$

$$d_6 = -u_5u_7 + u_2u_7 + x_1u_6 - x_1u_1 \neq 0,$$

$$d_7 = u_5 - u_3 \neq 0.$$

Здесь условия d_1, d_3, d_5, d_7 означают, что точки A, B, C, A', B', C' конфигурации (рис. 4.1) различны.

5. Теорема Паскаля

Теорема (Паскаля) [2]: для того чтобы шесть точек A, B, C, D, E, F лежали на одном коническом сечении (эллипсе, параболе, гиперболе) необходимо и достаточно, чтобы точки P, Q, R пересечения противоположных сторон шестиугольника с вершинами в этих точках – AB и ED, AF и CD, BC и FE – лежали на одной прямой L (рис. 5.1). (При этом порядок вершин шестиугольника может быть произвольным, то есть контур шестиугольника может самопересекаться.).

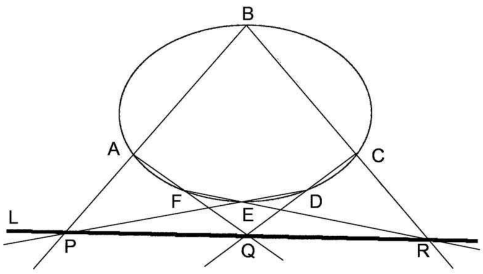

Рис. 5.1.

Доказательство.

Необходимость. Запишем условия и заключение теоремы в полиномиальной форме. В аналитической геометрии конические сечения представляются уравнениями второй степени относительно прямоугольных координат x, y. По условию теоремы шесть точек A, B, C, D, E, F принадлежат коническому сечению. Так как абсцисса точек определяется принадлежностью коническому сечению, а ордината может быть произвольной, следовательно точки будут иметь следующие координаты: $A = (x_1, u_1)$, $B = (x_2, u_2)$, $C = (x_3, u_3)$, $D = (x_4, u_4)$, $E = (x_5, u_5)$, $F = (x_6, u_6)$, где все $u_i \in \mathbf{R}$ различные.

Координаты точек P, Q, R полностью определяются координатами точек A, B, C, D, E, F, поэтому $P = (x_7, x_8)$, $Q = (x_9, x_{10})$, $R = (x_{11}, x_{12})$.

Одним из условий теоремы является то, что все вершины шестиугольника принадлежат коническому сечению. Следовательно, имеем такие полиномиальные уравнения:

$$h_1 = ax_1^2 + bu_1^2 + cx_1u_1 + dx_1 + eu_1 + f = 0,$$

$$h_2 = ax_2^2 + bu_2^2 + cx_2u_2 + dx_2 + eu_2 + f = 0,$$

$$h_3 = ax_3^2 + bu_3^2 + cx_3u_3 + dx_3 + eu_3 + f = 0,$$

$$h_4 = ax_4^2 + bu_4^2 + cx_4u_4 + dx_4 + eu_4 + f = 0,$$

$$h_5 = ax_5^2 + bu_5^2 + cx_5u_5 + dx_5 + eu_5 + f = 0,$$

$$h_6 = ax_6^2 + bu_6^2 + cx_6u_6 + dx_6 + eu_6 + f = 0. \tag{5.1}$$

Теперь необходимо построить точки P, Q, R. В теореме говорится, что P является точкой пересечения противоположных сторон шестиугольника AB и ED. Это означает, что P принадлежит и прямой AB

и прямой ED. Отсюда имеем

$$h_7 = (u_1 - x_8)(x_2 - x_7) - (u_2 - x_8)(x_1 - x_7) = 0,$$

$$h_8 = (u_5 - x_8)(x_4 - x_7) - (u_4 - x_8)(x_5 - x_7) = 0. \tag{5.2}$$

Аналогично выпишем полиномиальные уравнения для точек Q и R, т.е.

$$h_9 = (u_4 - x_{10})(x_3 - x_9) - (u_3 - x_{10})(x_4 - x_9) = 0,$$

$$h_{10} = (u_6 - x_{10})(x_1 - x_9) - (u_1 - x_{10})(x_6 - x_9) = 0,$$

$$h_{11} = (u_3 - x_{12})(x_2 - x_{11}) - (u_2 - x_{12})(x_3 - x_{11}) = 0,$$

$$h_{12} = (u_5 - x_{12})(x_6 - x_{11}) - (u_6 - x_{12})(x_5 - x_{11}) = 0. \tag{5.3}$$

Система уравнений, составленная из (5.1), (5.2), (5.3) является переводом условий теоремы на язык полиномов. Заключением теоремы является то, что точки P, Q и R лежат на одной прямой. Следовательно, имеем

$$g = (x_{11} - x_{12})(x_7 - x_{11}) - (x_8 - x_{12})(x_9 - x_{11}) = 0. \tag{5.4}$$

Таким образом, алгебраическая формулировка теоремы звучит так: если выполнены (5.1), (5.2), (5.3), то (5.4) также имеет место.

В результате перевода условий теоремы в полиномиальную форму, получили систему следующего вида:

$$\begin{cases} h_1 = ax_1^2 + bu_1^2 + cx_1u_1 + dx_1 + eu_1 + f, \\ h_2 = ax_2^2 + bu_2^2 + cx_2u_2 + dx_2 + eu_2 + f, \\ h_3 = ax_3^2 + bu_3^2 + cx_3u_3 + dx_3 + eu_3 + f, \\ h_4 = ax_4^2 + bu_4^2 + cx_4u_4 + dx_4 + eu_4 + f, \\ h_5 = ax_5^2 + bu_5^2 + cx_5u_5 + dx_5 + eu_5 + f, \\ h_6 = ax_6^2 + bu_6^2 + cx_6u_6 + dx_6 + eu_6 + f, \\ h_7 = (u_1 - x_8)(x_2 - x_7) - (u_2 - x_8)(x_1 - x_7), \\ h_8 = (u_5 - x_8)(x_4 - x_7) - (u_4 - x_8)(x_5 - x_7), \\ h_9 = (u_4 - x_{10})(x_3 - x_9) - (u_3 - x_{10})(x_4 - x_9), \\ h_{10} = (u_6 - x_{10})(x_1 - x_9) - (u_1 - x_{10})(x_6 - x_9), \\ h_{11} = (u_3 - x_{12})(x_2 - x_{11}) - (u_2 - x_{12})(x_3 - x_{11}), \\ h_{12} = (u_5 - x_{12})(x_6 - x_{11}) - (u_6 - x_{12})(x_5 - x_{11}). \end{cases} \tag{5.5}$$

Применим теперь метод Ву для доказательства теоремы. На первом шаге приведем (5.5) к треугольному виду. Получим

$$\begin{cases} f_1 = ax_1^2 + bu_1^2 + cx_1u_1 + dx_1 + eu_1 + f, \\ f_2 = ax_2^2 + bu_2^2 + cx_2u_2 + dx_2 + eu_2 + f, \\ f_3 = ax_3^2 + bu_3^2 + cx_3u_3 + dx_3 + eu_3 + f, \\ f_4 = ax_4^2 + bu_4^2 + cx_4u_4 + dx_4 + eu_4 + f, \\ f_5 = ax_5^2 + bu_5^2 + cx_5u_5 + dx_5 + eu_5 + f, \\ f_6 = ax_6^2 + bu_6^2 + cx_6u_6 + dx_6 + eu_6 + f, \\ f_7 = -x_4u_1x_2 + x_4u_1x_7 + x_4u_2x_1 - x_4u_2x_7 + x_5u_1x_2 - \\ -x_5u_1x_7 - x_5u_2x_1 + x_5u_2x_7 + u_5x_4x_2 - u_5x_4x_1 - \\ -u_5x_7x_2 + u_5x_7x_1 - u_4x_5x_2 + u_4x_5x_1 + u_4x_7x_2 - u_4x_7x_1, \\ f_8 = (u_5 - x_8)(x_4 - x_7) - (u_4 - x_8)(x_5 - x_7), \\ f_9 = -x_3u_6x_1 + x_3u_6x_9 + x_3u_1x_6 - x_3u_1x_9 + x_4u_6x_1 - \\ -x_4u_6x_9 - x_4u_1x_6 + x_4u_1x_9 + u_4x_3x_1 - u_4x_3x_6 - \\ -u_4x_9x_1 + u_4x_9x_6 - u_3x_4x_1 + u_3x_4x_6 + u_3x_9x_1 - u_3x_9x_6, \\ f_{10} = (u_4 - x_{10})(x_3 - x_9) - (u_3 - x_{10})(x_4 - x_9), \\ f_{11} = -x_2u_5x_6 + x_2u_5x_{11} + x_2u_6x_5 - x_2u_6x_{11} + x_3u_5x_6 - \\ -x_3u_5x_{11} - x_3u_6x_5 + x_3u_6x_{11} + u_3x_2x_6 - u_3x_2x_5 - \\ -u_3x_{11}x_6 + u_3x_{11}x_5 - u_2x_3x_6 + u_2x_3x_5 + u_2x_{11}x_6 - u_2x_{11}x_5, \\ f_{12} = (u_3 - x_{12})(x_2 - x_{11}) - (u_2 - x_{12})(x_3 - x_{11}). \end{cases} \tag{5.6}$$

На втором шаге метода Ву необходимо показать, что (5.4) является следствием (5.6). Положим $R_{12} = g$ и начнем последовательно вычислять остатки $R_{i-1} = prem(R_i, f_i, x_i)$ при $i \in 12:1$.

Имеем $R_0 = 0$. Нетривиальные условия здесь такие:

$$d_1 = a + cu_1 + d \neq 0, \quad d_2 = a + cu_2 + d \neq 0,$$

$$d_3 = a + cu_3 + d \neq 0, \quad d_4 = a + cu_4 + d \neq 0,$$

$$d_5 = a + cu_5 + d \neq 0, \quad d_6 = a + cu_6 + d \neq 0,$$

$$d_7 = x_4u_1 - x_2u_4 - x_5u_1 + x_5u_2 - u_5x_2 + u_5x_1 + u_4x_2 - u_4x_1 \neq 0,$$

$$d_8 = x_5 - x_4 \neq 0,$$

$$d_9 = x_3u_6 - x_3u_1 - x_4u_6 + x_4u_1 - u_4x_1 + u_4x_6 + u_3x_1 - u_3x_6 \neq 0,$$

$$d_{10} = x_4 - x_3 \neq 0,$$

$$d_{11} = x_2u_5 - x_2u_6 - x_3u_5 + x_3u_6 - u_3x_6 + u_3x_5 + u_2x_6 - u_2x_5 \neq 0,$$

$$d_{12} = x_3 - x_2 \neq 0.$$

Достаточность. По условию теоремы даны три точки P, Q, R на одной прямой, полученные пересечением противоположных сторон шестиугольника $ABCDEF$, т.е.

$$AB \cap ED = P, \quad BC \cap FE = R, \quad AF \cap CD = Q. \tag{5.7}$$

Выберем систему координат удобным образом. Поместим точку P в начало координат, а прямую L совместим с горизонтальной осью. Тогда $P = (0,0)$, $R = (u_1, 0)$, $Q = (u_2, 0)$, где $u_1, u_2 \neq 0$.

Каждая из этих точек P, Q, R образуется пересечением двух прямых, являющихся противоположными сторонами шестиугольника (или продолжением противоположных сторон шестиугольника) и на каждой из этих прямых должны лежать по две вершины шестиугольника, следовательно, можно произвольно задать три любые вершины шестиугольника $ABCDEF$, ни одна из которых не лежит на одной прямой (по условию теоремы). Например, пусть $A = (u_3, u_4)$, $C = (u_5, u_6)$, $E = (u_7, u_8)$, где $u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$ – новые переменные, не зависящие от u_1, u_2, и $u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 \neq 0$.

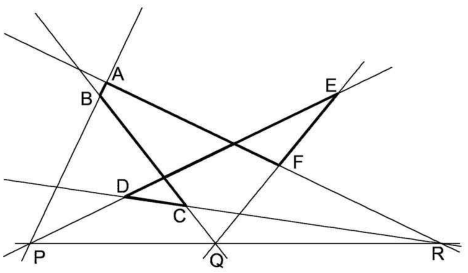

Рис. 5.2.

По условию (5.7) проводим шесть прямых через точки A и P, A и Q, C и R, C и Q, E и P, E и R (рис. 5.2).

Получили, что через каждую точку P, Q, R проходит по две прямые и точки A, C, E принадлежат различным прямым. Осталось определить остальные три вершины B, D, F шестиугольника $ABCDEF$, координаты которых полностью определяются координатами уже известных точек.

Из (5.7) следует, что вершина B должна принадлежать и прямой AP и прямой CR, значит она будет иметь координаты (x_1, x_2). Вершина D должна принадлежать и прямой CQ и прямой EP, следовательно, ее координаты будут (x_3, x_4). Аналогично, $F = (x_5, x_6)$.

Таким образом, построили замкнутый шестиугольник $ABCDEF$, противоположные стороны которого пересекаются в трех точках P, Q, R, лежащих на одной прямой (рис. 5.2).

Заметим, что точки выбираются неоднозначно, поэтому шестиугольник будет получаться каждый раз произвольным образом.

Теперь запишем условия теоремы через полиномиальные уравнения. Из утверждения $AB \cap ED = P$ имеем

$$h_1 = x_2u_3 - u_4x_1 = 0, \quad h_2 = u_8x_3 - x_4u_7 = 0. \tag{5.8}$$

Аналогично, $BC \cap FE = R$ дает полиномиальные уравнения вида

$$h_3 = x_2(u_5-u_1)-u_6(x_1-u_1) = 0, \;\; h_4 = u_8(x_5-u_1)-x_6(u_7-u_1) = 0. \tag{5.9}$$

Из условия $AF \cap CD = Q$ получаем

$$h_5 = u_6(x_3-u_2)-x_4(u_5-u_2) = 0, \;\; h_6 = u_4(x_5-u_2)-x_6(u_3-u_2) = 0. \tag{5.10}$$

Система уравнений, составленная из (5.8), (5.9), (5.10), является переводом условий теоремы на язык полиномов.

Заключением обратной теоремы Паскаля является то, что вершины шестиугольника $ABCDEF$ принадлежат коническому сечению. Любая кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вид $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, является коническим сечением. Правда, при такой формулировке надо считать коническим сечением не только кривую линию, но и, например, пару пересекающихся прямых. Поэтому теорема Паппа является частным случаем теоремы Паскаля.

Таким образом, заключения теоремы запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
g_1 &= au_3^2 + bu_4^2 + cu_3u_4 + du_3 + eu_4 + f = 0,\\
g_2 &= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,\\
g_3 &= au_5^2 + bu_6^2 + cu_5u_6 + du_5 + eu_6 + f = 0,\\
g_4 &= ax_3^2 + bx_4^2 + cx_3x_4 + dx_3 + ex_4 + f = 0,\\
g_5 &= au_7^2 + bu_8^2 + cu_7u_8 + du_7 + eu_8 + f = 0,\\
g_6 &= ax_5^2 + bx_6^2 + cx_5x_6 + dx_5 + ex_6 + f = 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Алгебраическая формулировка теоремы такова: если выполнены (5.8), (5.9), (5.10), то (5.11) также имеют место.

Далее, прежде чем применять метод Ву для доказательства теоремы, необходимо в (5.11) определить коэффициенты a, b, c, d, e, f. Для этого запишем условия теоремы в виде системы

$$\begin{cases}
h_1 = x_2u_3 - u_4x_1 = 0,\\
h_2 = u_8x_3 - x_4u_7 = 0,\\
h_3 = x_2(u_5 - u_1) - u_6(x_1 - u_1) = 0,\\
h_4 = u_8(x_5 - u_1) - x_6(u_7 - u_1) = 0,\\
h_5 = u_6(x_3 - u_2) - x_4(u_5 - u_2) = 0,\\
h_6 = u_4(x_5 - u_2) - x_6(u_3 - u_2) = 0.
\end{cases} \tag{5.12}$$

Решаем эту систему с помощью средств компьютерной алгебры и находим неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Затем подставляем найденные значения в систему, составленную из уравнений (5.11) и решаем ее относительно неизвестных a, b, c, d, e, f. Таким образом, заключения теоремы (5.11) перепишутся с учетом найденных коэффициентов.

Для дальнейшего доказательства теоремы применим метод Ву. На первом шаге приведем (5.12) к треугольному виду:

$$\begin{cases} f_1 = -u_4x_1u_5 + u_4x_1u_1 + u_3u_6x_1 - u_3u_6u_1, \\ f_2 = x_2u_5 - x_2u_1 - u_6x_1 + u_6u_1, \\ f_3 = -u_8x_3u_5 + u_8x_3u_2 + u_7u_6x_3 - u_7u_6u_2, \\ f_4 = u_6x_3 - u_6u_2 - x_4u_5 + x_4u_2, \\ f_5 = -u_3u_8x_5 + u_3u_8u_1 + u_2u_8x_5 - u_2u_8u_1 + \\ +u_4x_5u_7 - u_4x_5u_1 - u_4u_2u_7 + u_4u_2u_1, \\ f_6 = u_4x_5 - u_4u_2 - x_6u_3 + x_6u_2. \end{cases} \tag{5.13}$$

На втором шаге надо показать, что $g_i = 0, \quad i \in 1:6$ являются следствием (5.13). Положим $R_6 = g_j, \quad j \in 1:6$ и последовательно вычислим остатки $R_{i-1} = prem(R_i, f_i, x_i)$ при $i \in 6:1$. Во всех случаях имеем $R_0 = 0$. Выпишем нетривиальные условия:

$$d_1 = -u_4u_5 + u_4u_1 + u_3u_6 \neq 0, \quad d_2 = u_5 - u_1 \neq 0,$$

$$d_3 = -u_8u_5 + u_8u_2 + u_7u_6 \neq 0, \quad d_4 = -u_5 + u_2 \neq 0,$$

$$d_5 = -u_3u_8 + u_2u_8 + u_4u_7 - u_4u_1 \neq 0, \quad d_6 = -u_3 + u_2 \neq 0.$$

6. Об одной экстремальной задаче для тетраэдра (численный эксперимент)

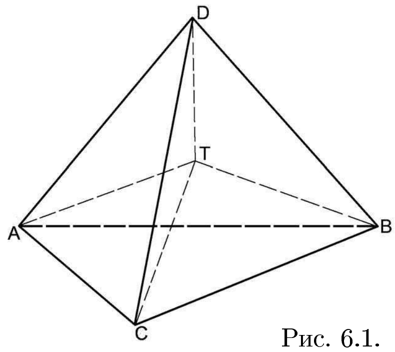

Рис. 6.1.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу: найти точку T такую, что сумма расстояний от нее до вершин заданного тетраэдра будет минимальной (рис. 6.1).

Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i \in 1:4$ – координаты вершин тетраэдра, $r = (x, y, z)$ – координаты точки T. Тогда задача сводится к минимизации функции

$$f(r) = \sum_{i=1}^{4} ||r - r_i|| \to \min_r, \tag{6.1}$$

где $||r - r_i|| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$.

Функция $f(r)$ является строго выпуклой и $f(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Поэтому решение (6.1) существует и единственно.

Сформулированная задача является обобщением известной задачи Штейнера [4].

В плоскости треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной.

Если все углы треугольника меньше 120^o, то решение поставленной задачи является точка T (точка Торричелли), обладающая тем свойством, что все стороны треугольника видны из точки T под углом 120^o. Если же один из углов треугольника больше 120^o, то решением является вершина тупого угла. На рис. (6.2) приведено решение задачи Штейнера.

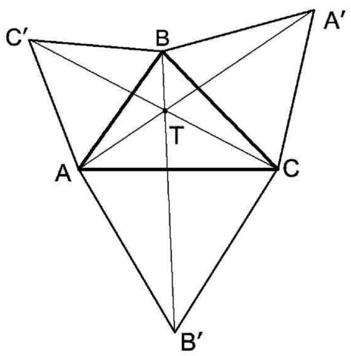

Рис. 6.2.

На сторонах треугольника строятся правильные треугольники. Тогда прямые BB', AA', CC' пересекаются в точке T, обладающей указанным выше свойством. Аналитическая проверка этого приведена в [6].

Для тетраэдра нет такого простого способа построения точки T. Для получения решения в каждом конкретном случае можно воспользоваться методом наискорейшего спуска:

$$r^{k+1} = r^k - \alpha \frac{\partial f(r^r)}{\partial r},$$

где r^0 – некоторое начальное приближение, не совпадающее ни с одной из вершин тетраэдра.

При численных экспериментах получались следующие геометрические свойства точки T:

1. противоположные ребра тетраэдра видны из точки T под равными углами (табл. 2);
2. сумма косинусов плоских углов каждого из трехгранных углов, опирающихся на грани тетраэдра, равна -1 (табл. 3);

3. сумма двугранных углов каждого из трехгранных углов, опирающихся на грани тетраэдра, равна π (табл. 4):

В таблице 1 приведены решения задачи для двух тетраэдров с точностью до 9 знаков после запятой.

Табл. 1.

№п/п	Координаты вершин тетраэтра	Координаты точки Торричелли
1	$A=(-4;1;0), B=(2;-2,5;-5)$, $C=(-2;3;5), D=(3;-3,5;4,5)$	$T=(-1,071282133;$ $0,039784833;$ $1,386386392)$
2	$A=(0;0;0), B=(-1;5;1)$, $C=(-4;2;-1), D=(1;1;5)$	$T=(-0,988839095;$ $1,924866623;$ $0,896513337)$

Табл. 2.

Противоположные ребра тетраэдра	Углы (для 1 случая)	Углы (для 2 случая)
AB, CD	$\angle ATB=1,672368526$ $\angle CTD=1,672370205$	$\angle ATB=1,742180911$ $\angle CTD=1,742180902$
BC, AD	$\angle BTC=2,773258793$ $\angle ATD=2,773258448$	$\angle BTC=2,560198117$ $\angle ATD=2,560198118$
AC, DB	$\angle ATC=1,536462251$ $\angle DTB=1,536462986$	$\angle ATC=1,564551887$ $\angle DTB=1,564551876$

Табл. 3.

Плоские углы трехгранных углов	Сумма косинусов плоских углов (для 1 случая)	Сумма косинусов плоских углов (для 2 случая)
$\angle ATC, \angle ATB, \angle BTC$	$-0,999998859$	$-0,999999998$
$\angle ATD, \angle ATC, \angle DTC$	$-1,000000406$	$-1,000000011$
$\angle ATD, \angle ATB, \angle DTB$	$-0,999999470$	$-1,000000001$
$\angle DTC, \angle CTB, \angle DTB$	$-1,000001265$	$-0,999999990$

Табл. 4.

Трехгранный угол	Сумма двугранных углов трехгранного угла (для 1 случая)	Сумма двугранных углов трехгранного угла (для 2 случая)
$\angle TACB$	$3,141599114$	$3,141592660$
$\angle TDAC$	$3,141590358$	$3,141592613$
$\angle TDBC$	$3,141585491$	$3,141592648$
$\angle TADB$	$3,141595653$	$3,141592688$

Литература

1. **Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.** Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000. 678 с.

2. **Гильберт Д., Кон-Фоссен С.** Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. 344 с.

3. **Курант Р., Роббинс Г.** Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001. 568 с.

4. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

5. **Говорухин В.Н., Цибулин В.Г.** Введение в Maple. М.: Мир, 1997.

6. **Зверева В.Е., Павлова Л.А.** Доказательство геометрических теорем с помощью компьютера // *Международная молодежная научная конференция "Севергеоэкотех-2004". Материалы конференции. 17-19 марта 2004 г. Ухта: УГТУ, 2004. С. 188-192.*

Summary

Tarasov V.N., Pavlova L.A. The proof of geometric theorems by means of computer algebra

Some geometric theorems can be stated in coordinate form as polynomials in algebra and can be proved by algorithmic methods. In article the theorems of Pascal and Pappe Alexandrinian are prooved by means of computer algebra. Also some properties of Torricellian point for arbitrary tetrahedron are stated.

Сыктывкарский университет *Поступила 27.03.2006*