*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1. Вып.6. 2006*

**УДК 517.987**

# СВОЙСТВО НЕАТОМИЧНОСТИ КЛАССОВ МНОЖЕСТВ И ВЕКТОРНЫХ МЕР

***И.И. Баженов***

Вводится понятие атома семейства подмножеств некоторого множества. Понятие атома векторной меры совпадает с введенным понятием, если рассматриваемое семейство состоит из множеств, имеющих нулевую векторную меру. Приводится достаточное условие неатомичности семейства множеств в одном специальном случае. Как частный случай, получено достаточное условие неатомичности векторной меры $n(E) = \varphi(m(E))$, построенной с помощью линейного и непрерывного оператора $\varphi$ и неатомической векторной меры $m$ со значениями в топологическом векторном пространстве.

**1. Основные понятия.** Пусть $m : \mathcal{A} \to X$ - счетно-аддитивная функция множества, заданная на некоторой $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств непустого множества T и принимающая значения в топологическом векторном пространстве X. Счетная аддитивность функции $m : \mathcal{A} \to X$ понимается в смысле сходимости в векторной топологии пространства X. Как обычно, функцию $m : \mathcal{A} \to X$ будем называть векторной мерой.

Атомом векторной меры $m$ называется множество $E_o \in \mathcal{A}$ такое, что $m(E_o) \neq \mathbb{O}_X$, и для каждого $E \in \mathcal{A}$, $E \subset E_o$ либо $m(E) = \mathbb{O}_X$, либо $m(E) = m(E_o)$. Мера $m : \mathcal{A} \to X$ называется неатомической, если она не имеет атомов. В противном случае, $m$ назвается атомической.

Понятие атома векторной меры играет важную роль в теории меры. Достаточно, например, вспомнить утверждение теоремы А.А. Ляпунова [4] о выпуклости и замкнутости множества значений векторной меры со значениями в конечномерном пространстве при условии, что она не имеет атомов. Исследованию множества значений неатомической векторной меры посвящены работы [5] и [6].

Представляет самостоятельный интерес вопрос о неатомичности различных конструкций из неатомических векторных мер. Некоторые из известных результатов являются достаточно неожиданными. Например, сумма двух неатомических векторных мер может быть атомической мерой.

Конечно, такой пример меры $m : \mathcal{A} \to X$ можно построить, специальным образом подобрав $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}$, на которой задана мера, и специальным образом выбрав пространство $X$, где векторная мера принимает свои значения. Для скалярных мер и для более общего случая - векторных мер со значениями в нормированных пространствах - такой пример построить нельзя. Сумма двух неатомических векторных мер со значениями в нормированном пространстве всегда будет неатомической (см., например, [2]). В работе [1] доказано, что, если скалярная мера является суммой счетного семейства скалярных положительных неатомических мер, то она сама является неатомической. Некоторые результаты, посвященные неатомичности различных конструкций векторных мер, приведены в работе [2].

В настоящей работе мы используем достаточно общий подход к исследованию атомов векторной меры, впервые предложенный П. Чапеком в работе [1]. Понятие атома векторной меры при этом подходе будет являться частным случаем более общего понятия атома относительно класса множеств.

Пусть T - произвольное непустое множество и $\mathcal{A}$ - некоторая $\sigma$-алгебра подмножеств множества T. В дальнейшем будем рассматривать только множества из $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, называя их измеримыми. Пусть $\mathcal{N}$ - некоторое семейство измеримых подмножеств, то есть $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. Если $E \in \mathcal{A}$, то будем использовать следующие обозначения:

$$E \cap \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\} \ \text{ и } \ \mathcal{N}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \cap E \in \mathcal{N}\}.$$

Зафиксируем некоторое семейство $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ и определим для него новый класс множеств

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \bigcap_{E \in \mathcal{A}} (\mathcal{N}_E \cup \mathcal{N}_{E^c}) \setminus \mathcal{N}, \tag{1}$$

элементы которого будем называть атомами $\mathcal{A}$ относительно семейства $\mathcal{N}$ или просто $\mathcal{N}$-атомами. Отметим, что в формуле (1) символ $E^c$ обозначает дополнение множества E, то есть $E^c = T \setminus E$. Если $\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \varnothing$, то $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}$ называется $\mathcal{N}$-неатомической.

**Пример 1.** Пусть $T = \{1,\ 2,\ 3\}$, $\mathcal{A} = 2^T$ и $\mathcal{N} = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\}\}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \{\{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$.

**Пример 2.** Пусть $m : \mathcal{A} \to X$ - векторная мера. Обозначим через $\mathcal{N}$ семейство всех измеримых множеств, на которых мера $m$ принимает нулевое значение, то есть $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A} : \ m(E) = \mathbb{O}_X\}$. Тогда, если $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, то $m(E) \neq \mathbb{O}_X$ и для каждого $A \in \mathcal{A}$ либо $m(E \cap A) = \mathbb{O}_X$, либо $m(E \cap A^c) = m(E \setminus A) = \mathbb{O}_X$. Но это означает, что множество $E$ является атомом векторной меры $m$. Очевидно, что верно и обратное утверждение - любой атом векторной меры $m$ является атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ относительно класса $\mathcal{N}$.

Таким образом, понятие атома векторной меры $m : \mathcal{A} \to X$ совпадает с понятием атома $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ относительно класса $\mathcal{N}$ нуль-мерных множеств. В работе [1] исследуются атомы скалярных положительных мер с помощью этого более общего понятия атома относительно класса множеств.

Поскольку семейство нуль-мерных множеств векторной меры $m : \mathcal{A} \to X$, даже в самом общем случае, обладает рядом дополнительных свойств, то уместно выделить эти свойства и наделить ими рассматриваемое семейство $\mathcal{N}$, относительно которого строится семейство атомов $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$. Так в работе [3] выделяются следующие свойства, накладываемые на класс $\mathcal{N}$:

**(A)** если $E \in \mathcal{N}$, то $E \cap A \in \mathcal{N}$ для любого $A \in \mathcal{A}$;

**(B)** если $E_1, \ E_2 \in \mathcal{N}$ и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{N}$;

**(C)** если $E_1 \in \mathcal{N}, \ E_2 \notin \mathcal{N}$, причем $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $E_1 \cup E_2 \notin \mathcal{N}$;

**(D)** если $E_1, \ E_2 \in \mathcal{N}$ и $E_1 \cap E_2 \notin \mathcal{N}$, то $E_1 \Delta E_2 \notin \mathcal{N}$;

**(E)** $\varnothing \in \mathcal{N}$.

Всюду ниже будем предполагать, что свойство **(E)** выполнено для любого рассматриваемого класса $\mathcal{N}$. Семейство $\mathcal{N}$ называется наследственным, если оно обладает свойством **(A)**, и называется идеалом, если выполнены **(A)** и **(B)** одновременно.

В настоящей работе мы будем использовать еще одно свойство семейства $\mathcal{N}$, которое по существу является усилением свойства **(B)**. Приведем его в следующей формулировке:

($\mathbf{B_1}$) если $(E_n)$ последовательность попарно дизъюнктных множеств из $\mathcal{N}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{N}$.

Легко показать, что если семейство $\mathcal{N}$ удовлетворяет свойству ($\mathbf{B_1}$), то оно будет удовлетворять и свойству **(B)**.

Заметим, что нуль-мерные множества произвольной векторной меры свойством **(A)**, вообще говоря, не обладают. Свойство **(A)** будет иметь место для нуль-мерных множеств в случае, если мера $m : \mathcal{A} \to X$ является скалярной и положительной, то есть $X = \mathbf{R}^+$. Все другие выделенные выше свойства для семейства нуль-мерных множеств $\mathcal{N}$ выполнены автоматически в случае произвольной векторной меры $m : \mathcal{A} \to X$.

В заключение этого параграфа приведем формулировку леммы из [3], которая будет использоваться ниже.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ и $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, $E \subset E_o$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

*(i) если $E \notin \mathcal{N}$, то $E_o \setminus E \in \mathcal{N}$;*

*(ii) если $\mathcal{N}$ обладает свойством* **(B)** *и $E \in \mathcal{N}$, то $E_o \setminus E \notin \mathcal{N}$;*

*(iii) если $\mathcal{N}$ обладает свойством* **(C)** *и $E \notin \mathcal{N}$, то $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$;*

*(iv) если $\mathcal{N}$ обладает свойствами* **(B)**,**(C)** *и $E \in \mathcal{N}$, то $E_o \setminus E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$;*

*(v) если $\mathcal{N}$ обладает свойствами* **(C)** *и* **(D)**, *а $E \in \mathcal{N}$, то для любого $F \in \mathcal{A}$ выполнено $F \in \mathcal{N}_E$.*

**2. Атомы счетно порожденной $\sigma$-алгебры.** В этом параграфе мы рассмотрим простейший случай, когда семейство $\mathcal{N}$ состоит только из одного множества. Всюду ниже будем обозначать $\mathcal{N}_o = \{\varnothing\}$, а элементы $\mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$ называть атомами $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$.

**Лемма 2.** *Множество $E \in \mathcal{A}$ является атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $E \neq \varnothing$ и для любого $A \in E \cap \mathcal{A}$ либо $A = \varnothing$, либо $A = E$.*

Действительно, если $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$, то $E \notin \mathcal{N}_o = \{\varnothing\}$ и для любого $A \in E \cap \mathcal{A}$ по определению $\mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$ либо $A \cap E = A \in \mathcal{N}_o = \{\varnothing\}$, либо $A^c \cap E = E \setminus A \in \mathcal{N}_o = \{\varnothing\}$, то есть $A = E$.

**Лемма 3.** *Если $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}(\mathcal{N}) \setminus \mathcal{M} \subset \mathcal{A}(\mathcal{M})$.*

Если $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N}) \setminus \mathcal{M}$, то $E \notin \mathcal{M}$ и для любого $A \in \mathcal{A}$ $A \cap E \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ или $A \cap E^c \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Но это и означает, что $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$.

В следующей теореме содержится описание атомов счетно порожденной $\sigma$-алгебры.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{A}$ - счетно порожденная $\sigma$-алгебра и $\sum = \{E_n\}$ - счетное семейство образующих $\mathcal{A}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

*(i)* $\mathcal{A}(\mathcal{N}_o) \subset \{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k^{\varepsilon_k} : \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ *и* $E_k^1 = E_k, E_k^{-1} = E_k^c\}$;

*(ii)* $\mathcal{A}(\mathcal{N}_o) = \{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k^{\varepsilon_k} : \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ *и* $E_k^1 = E_k, E_k^{-1} = E_k^c\} \setminus \mathcal{N}_o$;

*(iii)* *Если* $\varnothing \in \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, *то для любого* $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ *существует множество* $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$ *такое, что* $E_0 \subset E$.

**Доказательство.** (i) Если $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$, то $E \neq \varnothing$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ либо $E \cap E_n = \varnothing$, либо $E \cap E_n^c = \varnothing$. Положим $\varepsilon_n = 1$, если $E \cap E_n^c = \varnothing$, и $\varepsilon_n = -1$, если $E \cap E_n = \varnothing$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $E_n^1 = E_n$, $E_n^{-1} = E_n^c$, тогда, очевидно, $E \cap E_n^{\varepsilon_n} = E$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $E \cap (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}) = E$ и значит $E \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$. Но так как $\sum = \{E_n\}$ - счетная система образующих $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, то множество не может содержать собственных измеримых подмножеств, а значит $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$.

(ii) Пусть $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n} \neq \varnothing$ и $A \subset E$. Так как $\sum = \{E_n\}$ - система образующих $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, то либо $A = \varnothing$, либо $A = E$. Но тогда по лемме 2 $E$ является атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$.

(iii) Пусть $\varnothing \in \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ и $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Следовательно, $E \notin \mathcal{N}$ и $E \neq \varnothing$ . Зафиксируем произвольную точку $t \in E$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ одно из множеств $E \cap E_n$ или $E \cap E_n^c$ обязательно содержат точку $t$. Будем обозначать $E_n^1 = E_n$ и $E_n^{-1} = E_n^c$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмем $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ так, чтобы $t \in E \cap E_n^{\varepsilon_n}$. Тогда множество $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E \cap E_n^{\varepsilon_n} = E \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$ будет содержать точку $t$. Поскольку $\sum = \{E_n\}$ - семейство образующих $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, то имеет место включение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n} \subset E$ и множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$ содержит точку $t$. Пусть $E_o = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$. Так как $E_o \neq \varnothing$, то в силу пункта (ii) $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$ и $E_o \subset E$. Утверждение теоремы доказано.

Следующее утверждение усиливает последний результат теоремы 1.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathcal{A}$ *- счетно порожденная* $\sigma$*-алгебра и семейство* $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ($\mathbf{B_1}$) *и* **(C)**. *Тогда для любого* $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ *существует множество* $E \subset E_0$ *такое, что* $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$, *причем* $E$ *также является* $\mathcal{N}$*-атомом* $\sigma$*-алгебры* $\mathcal{A}$.

**Доказательство.** Покажем вначале, что, если $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{B_1})$, то для любой последовательности $F_n \in \mathcal{N}$ такой, что $F_n \subset F_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, будет выполняться включение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{N}$. Как уже было отмечено, из условия $(\mathbf{B_1})$ для семейства $\mathcal{N}$ вытекает условие **(B)**. Если обозначить $A_1 = F_1,\ A_n = F_n \setminus F_{n-1}$ для всех $n > 2$, то из свойства **(C)** будет следовать, что $A_n \in \mathcal{N}$. Множества из последовательности $(A_n)$ попарно дизъюнктны, тогда по свойству $(\mathbf{B_1})$ для семейства $\mathcal{N}$ имеем включение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$.

Выделим еще одно свойство, связанное с условием $(\mathbf{B_1})$: если $A_n \notin \mathcal{N}$, $A_n \subset E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ и $A_{n+1} \subset A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{N}$. Для его доказательства обозначим $F_n = E_o \setminus A_n$. Так как $A_n \subset E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, то по лемме 1 $F_n = E_o \setminus A_n \in \mathcal{N}$. Так как $F_n \subset F_{n+1}$, то, как было показано выше, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{N}$. Из пункта (ii) леммы 1, будем иметь $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E_o \setminus (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n) \notin \mathcal{N}$.

Пусть теперь $\sum = \{E_n\}$ - счетное семейство образующих $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$. Обозначим $E_n^1 = E_n$ и $E_n^{-1} = E_n^c$. В силу свойства **(B)** и условия $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ будет выполнено только одно из следующих двух условий: либо $E_1^1 \cap E_o \in \mathcal{N}$, либо $E_1^{-1} \cap E_o \in \mathcal{N}$. Но в первом случае будем иметь $E_1^{-1} \cap E_o \notin \mathcal{N}$, а во втором случае - $E_1^1 \cap E_o \notin \mathcal{N}$. Положим $\varepsilon_1 = 1$, если $E_1^1 \cap E_o \notin \mathcal{N}$, и $\varepsilon_1 = -1$, если $E_1^{-1} \cap E_o \notin \mathcal{N}$. Итак $E_1^{\varepsilon_1} \cap E_o \notin \mathcal{N}$ и, следовательно, по лемме 1 (iii) $F_1 = E_1^{\varepsilon_1} \cap E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$.

Аналогичные рассуждения проводим для множества $F_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. То есть найдем $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ так, чтобы $F_2 = E_2^{\varepsilon_2} \cap F_1 = E_1^{\varepsilon_1} \cap F_2^{\varepsilon_2} \cap E_o \notin \mathcal{N}$. Продолжая рассуждения по индукции, построим последовательность множеств $F_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k^{\varepsilon_k} \cap E_o$ со свойством $F_n \notin \mathcal{N}$. Поскольку $F_{n+1} \subset F_n$, $F_n \notin \mathcal{N}$ и $F_n \subset E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, то в силу доказанного выше будем иметь $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = E_o \cap (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}) \notin \mathcal{N}$. Так как $\sum = \{E_n\}$ - семейство образующих $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, то $E_o \cap (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$.

Обозначим $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\varepsilon_n}$. Тогда $E \subset E_o$ и $E \notin \mathcal{N}$, а значит $E \neq \varnothing$. Таким образом, по теореме 1 $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_o)$. Учитывая, что $\mathcal{N}_o \subset \mathcal{N}$ и $E \notin \mathcal{N}$, по лемме 3 дополнительно получим $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$.

**3. Свойство неатомичности $\sigma$-алгебр относительно некоторых семейств измеримых множеств.** Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ произвольное семейство измеримых множеств. Множество $A \in \mathcal{A}$ будем назвать $\mathcal{N}$-пренебрежимым, если $A \cap E \in \mathcal{N}$ для любого $E \in \mathcal{A}$. В используемых нами обозначениях условие $\mathcal{N}$-пренебрежимости множества $A \in \mathcal{A}$ можно также записать так: $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}_A$ или $A \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{N}$. Измеримые множества $A$ и $B$ будем называть $\mathcal{N}$-эквивалентными, если множество $A \bigtriangleup B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ является $\mathcal{N}$-пренебрежимым множеством. Для обозначения $\mathcal{N}$-эквивалентности множеств $A$ и $B$ будем использовать символ $A \sim_{\mathcal{N}} B$.

Очевидно, что любое измеримое подмножество $\mathcal{N}$-пренебрежимого множества также является $\mathcal{N}$-пренебрежимым. Отсюда, в частности, будет следовать, что, если $A \sim_{\mathcal{N}} B$, то $A \cap F \backsim_{\mathcal{N}} B \cap F$ для любого измеримого множества $F \in \mathcal{A}$. Отметим также, что если $A \sim_{\mathcal{N}} B$, то $A^c \sim_{\mathcal{N}} B^c$. Кроме этого, если семейство обладает свойством **(B)**, то объединение конечного числа $\mathcal{N}$-пренебрежимых множеств будет $\mathcal{N}$-пренебрежимым множеством. Последнее замечание позволяет нетрудно проверить, что $\mathcal{N}$-эквивалентность множеств является транзитивным свойством, а значит имеет место следующее утверждение.

**Лемма 4.** *Если семейство $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ удовлетворяет условию* **(B)**, *то свойство $\mathcal{N}$-эквивалентности является отношением эквивалентности на $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$.*

Пусть в $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ выделена некоторая $\sigma$-подалгебра $\mathcal{A}^o$. Будем говорить, что $\mathcal{A}^o$ плотна в $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{N}$ или, просто, $\mathcal{N}$-плотна в $\mathcal{A}$, если для каждого $E \in \mathcal{A}$ найдется множество $A \in \mathcal{A}^o$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E$. Будем также использовать следующее обозначение $\mathcal{N}^o \equiv \{E \in \mathcal{A}^o :$ существует $A \in \mathcal{N}$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E\}$. Выделим следующее полезное утверждение.

**Лемма 5.** *Пусть $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o$ плотна в $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{N}$, а семейство измеримых подмножеств $\mathcal{N}$ удовлетворяет условиям* **(B)** *и* **(C)**. *Если $F \in \mathcal{A}^o$, $E \notin \mathcal{N}$ и $F \sim_{\mathcal{N}} E$, то $F \notin \mathcal{N}^o$.*

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть $F \in \mathcal{N}^o$ и $F \sim_{\mathcal{N}} E$. Тогда по определению семейства $\mathcal{N}^o$ найдется такое множество $A \in \mathcal{N}$, что $F \sim_{\mathcal{N}} A$. В силу леммы 4 будет выполнено условие $A \sim_{\mathcal{N}} E$. Заметим, что $A \setminus E \in \mathcal{N}$ и $E \setminus A \in \mathcal{N}$, как подмножества $\mathcal{N}$-пренебрежимого множества $A \bigtriangleup E$. Тогда $A \cap E \in \mathcal{N}$. Действительно, если бы $A \cap E \notin \mathcal{N}$, то в силу свойства **(C)** мы бы имели $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E) \notin \mathcal{N}$. Осталось отметить, что в силу свойства **(B)** будем иметь $E = (A \cap E) \cup (E \setminus E) \in \mathcal{N}$. Получили противоречие с условием леммы.

Последнее утверждение может быть усилено и сформулировано в следующей форме.

**Лемма 6.** *Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ два фиксированных семейства множеств из $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условиям* **(B)** *и* **(C)**. *Пусть $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o$ плотна в $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{N}$. Если $F \in \mathcal{A}^o$, $E \notin \mathcal{M}$ и $F \sim_{\mathcal{N}} E$, то $F \notin \mathcal{M}^o$, где $\mathcal{M}^o \equiv \{E \in \mathcal{A}^o$ : существует $A \in \mathcal{M}$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E\}$.*

Следующие две леммы будут играть ключевую роль при доказательстве основного утверждения этого параграфа.

**Лемма 7.** *Пусть $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o$ плотна в $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{N}$, а семейство измеримых подмножеств $\mathcal{N}$ удовлетворяет условиям* **(B)** *и* **(C)**. *Для того чтобы $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество $A \in \mathcal{A}^o$ такое, что $A \in \mathcal{A}^o(\mathcal{N}^o)$ и $A \sim_{\mathcal{N}} E$.*

**Доказательство.** Пусть $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. В силу того, что $\mathcal{A}^o$ $\mathcal{N}$-плотна в $\mathcal{A}$, найдется $A \in \mathcal{A}^o$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E$. Покажем, что выделенное множество $A \in \mathcal{A}^o$ является атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}^o$ относительно $\mathcal{N}^o$. Прежде всего отметим, что $E \notin \mathcal{N}$, а значит $A \notin \mathcal{N}^o$ в силу леммы 5.

Пусть теперь $F \in \mathcal{A}^o$ произвольное множество и пусть $A \cap F \notin \mathcal{N}^o$. Поскольку $A \sim_{\mathcal{N}} E$ и семейство $\mathcal{N}$ обладает свойством **(B)**, то $(A \cap F) \sim_{\mathcal{N}} (E \cap F)$ и $(A \cap F^c) \sim_{\mathcal{N}} (E \cap F^c)$. Так как $F \cap A \notin \mathcal{N}^o$, то по определению семейства $\mathcal{N}^o$ будем иметь $E \cap F \notin \mathcal{N}$. Следовательно, в силу условия $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ будем выполнено включение $E \cap F^c \in \mathcal{N}$, а значит $A \cap F^c \in \mathcal{N}^o$. Но это и означает, что $A \in \mathcal{A}^o(\mathcal{N}^o)$. Необходимость условия проверена.

Проверим достаточность. Пусть $E \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}^o$ такое, что $A \in \mathcal{A}^o(\mathcal{N}^o)$ и $A \sim_{\mathcal{N}} E$. Покажем, что $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Так как $A \in \mathcal{A}^o(\mathcal{N}^o)$, то $A \notin \mathcal{N}^o$ и по определению семейства $\mathcal{N}^o$ будем иметь $E \notin \mathcal{N}$.

Пусть теперь $F \in \mathcal{A}$ произвольное множество и $E \cap F \notin \mathcal{N}$. Покажем, что $E \cap F^c \in \mathcal{N}$. Так как $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o$ плотна в $\mathcal{A}$, то найдется $G \in \mathcal{A}^o$ такое, что $G \sim_{\mathcal{N}} F$. Тогда будет выполнена следующая цепочка эквивалентностей $(F \cap E) \sim_{\mathcal{N}} (G \cap E) \sim_{\mathcal{N}} (G \cap A)$. Учитывая, что $G \cap E \in \mathcal{A}^o$ и $E \cap F \notin \mathcal{N}$, по лемме 5 будем иметь $G \cap A \notin \mathcal{N}^o$. Так как множество $A$ является $\mathcal{N}^o$-атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}^o$, то $A \cap G^c \in \mathcal{N}^o$. Учитывая цепочку $(A \cap G^c) \sim_{\mathcal{N}} (A \cap F^c) \sim_{\mathcal{N}} (E \cap F^c)$ и результат леммы 5, приходим к выводу, что $E \cap F^c \in \mathcal{N}$. Значит $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ и лемма доказана.

**Лемма 8.** *Пусть в $\mathcal{A}$ зафиксированы два семейства множеств $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, удовлетворяющих условиям* **(B)** *и* **(C)***. Пусть далее $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o$ плотна в $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{N}$. Тогда, если $\mathcal{A}$ имеет атомы относительно семейства $\mathcal{M}$, то $\mathcal{A}^o$ имеет атомы относительно семейства $\mathcal{M}^o$, где $\mathcal{M}^o \equiv \{E \in \mathcal{A}^o :$ существует $A \in \mathcal{M}$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E\}$.*

**Доказательство.** Пусть $A \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$. В силу того, что $\mathcal{A}^o$ $\mathcal{N}$-плотна в $\mathcal{A}$, найдется $E \in \mathcal{A}^o$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E$. Покажем, что выделенное множество $A \in \mathcal{A}^o$ является атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}^o$ относительно $\mathcal{M}^o$. Так как $A \notin \mathcal{M}$, то $E \notin \mathcal{M}^o$ в силу леммы 6. Пусть теперь $F \in \mathcal{A}^o$ произвольное множество и пусть $E \cap F \notin \mathcal{M}^o$. Так как $(E \cap F) \sim_{\mathcal{N}} (A \cap F)$, то по определению семейства $\mathcal{M}^o$ будем иметь $A \cap F \notin \mathcal{M}$. Но тогда $A \cap F^c \in \mathcal{M}$, а значит $E \cap F^c \in \mathcal{M}^o$. Но это и означает, что $E \in \mathcal{A}^o(\mathcal{M}^o)$.

Для изложения основного результата этого параграфа введем еще одно понятие. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ фиксированное семейство измеримых множеств. Будем называть $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}$ $\mathcal{N}$-существенно счетно порожденной, если в ней существует счетно порожденная $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o$, которая является плотной в $\mathcal{A}$ относительно семейства $\mathcal{N}$.

**Теорема 3.** *Пусть $\mathcal{A}$ - $\sigma$-алгебра и $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ - два семейства измеримых множеств, которые удовлетворяют условиям* $(\mathbf{B_1})$ *и* **(C)***, причем $\varnothing \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{A}$ является $\mathcal{N}$-существенно счетно порожденной $\sigma$-алгеброй. Тогда, если $\mathcal{A}$ является $\mathcal{N}$-неатомической, то $\mathcal{A}$ является $\mathcal{M}$-неатомической $\sigma$-алгеброй.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{A}^o$ - счетно порожденная $\sigma$-алгебра, которая является плотной в $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ относительно семейства $\mathcal{N}$ и пусть $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$. Тогда по лемме 8 найдется множество $E \in \mathcal{A}^o$, являющееся атомом $\mathcal{A}^o$ относительно семейства $\mathcal{M}^o \equiv \{E \in \mathcal{A}^o :$ существует $A \in \mathcal{M}$ такое, что $A \sim_{\mathcal{N}} E\}$. Так как $\mathcal{A}^o$ - счетно порожденная $\sigma$-алгебра, то по теореме 2 существует $E_o \subset E$, являющееся атомом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}^o$, причем $E_o \in \mathcal{A}^o(\mathcal{M}^o)$. Но так как $\mathcal{N}^o \subset \mathcal{M}^o$ и $E_o \notin \mathcal{M}^o$, то $E_o \notin \mathcal{N}^o$. Поскольку $\mathcal{N}_o = \{\varnothing\} \subset \mathcal{N}^o$, то по лемме 3 любой атом $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}_o$, то есть $\mathcal{N}_o$-атом, будет являться атомом $\mathcal{A}_o$ относительно семейства $\mathcal{N}^o$, если он не является элементом семейства $\mathcal{N}^o$. Таким образом, $E_o \in \mathcal{A}^o(\mathcal{N}^o)$. Осталось заметить, что в силу леммы 7 будем иметь $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Итак, если $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$, то существует $E_o \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, что и доказывает утверждение теоремы.

**4. Неатомичность некоторых конструкций векторных мер.** Здесь мы сформулируем основные следствия из результатов предыдущего параграфа, касающиеся свойства неатомичности векторных мер. Близкие по содержанию результаты приводятся в работе [5]. Однако, здесь они получены, как частный случай более общих утверждений предыдущего параграфа.

Пусть $m : \mathcal{A} \to X$ - векторная мера и $\mathcal{N}$ - семейство всех нуль-мерных множеств $m$, то есть $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A} : \ m(E) = \mathbb{O}_X\}$. Множество $E \in \mathcal{A}$ называется $m$-пренебрежимым, если $E$ является $N$-пренебрежимым относительно семейства $\mathcal{N}$, то есть $m(A) = \mathbb{O}_X$ для любого $A \in E \cap \mathcal{A}$. Множества $E$ и $F$ называются $m$-эквивалентными, если множество $E \bigtriangleup F$ является $m$-пренебрежимым. Через $[E]_m$ обозначается класс всех измеримых множеств, $m$-эквивалентных множеству $E \in \mathcal{A}$. Обозначим $\mathcal{A}_m = \{[E]_m : \ E \in \mathcal{A}\}$.

Будем назвать $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}$ $m$-существенно счетно порожденной, если существует счетно порожденная $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}^o \subset \mathcal{A}$ такая, что для любого $E \in \mathcal{A}$ найдется $A \in \mathcal{A}^o$ со свойством $E \in [A]_m$. В этом случае, очевидно, $\mathcal{A}_m = \{[E]_m : \ E \in \mathcal{A}^o\}$. Заметим, что понятия $m$-существенно счетной порожденности и $\mathcal{N}$-существенно счетной порожденности будут совпадать.

Пусть $X, \ Y$ - топологические векторные пространства и $\varphi : X \to Y$ некоторый линейный и непрерывный оператор. Очевидно, что функция $n : \mathcal{A} \to Y$, определяемая равенством $n(E) = \varphi(m(E))$, будет также являться векторной мерой.

**Теорема 4.** *([5]) Пусть $\mathcal{A}$ - $\sigma$-алгебра, $m : \mathcal{A} \to X$ - неатомическая векторная мера, причем $\mathcal{A}$ является $m$-существенно счетно порожденной. Тогда для любого линейного непрерывного оператора $\varphi : X \to Y$ векторная мера $n = \varphi \circ m$ также является неатомической.*

**Доказательство.** Обозначим $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{A} : \ m(E) = \mathbb{O}_X\}$ и $\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{A} : \ n(E) = \varphi(m(E)) = \mathbb{O}_Y\}$. Очевидно, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ и каждое из семейств обладает свойствами $(\mathbf{B_1})$ и **(C)**. Заметим также, что $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{N}$-существенно счетно порожденной. Неатомичность меры $m$ означает отсутствие $\mathcal{N}$-атом в $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 и, значит, $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}$ не имеет $\mathcal{M}$-атомов. Последнее равносильно отсутствию атомов векторной меры $n = \varphi \circ m$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что условие счетной порожденности $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ в теоремах 3 и 4 является существенным.

**Пример 3.** Пусть $P$ - бесконечное и несчетное множество, $\mathcal{B}_p$ - $\sigma$-алгебра лебеговских подмножеств отрезка $[0, \ 1]$ для каждого $p \in P$.

Положим $T = [0,\ 1]^P$ и $\mathcal{A} = \bigotimes\limits_{p \in P} \mathcal{B}_p$ - произведение $\sigma$-алгебр $\mathcal{B}_p$. Заметим, что точки из множества $T$ не будут измеримыми множествами.

Обозначим $X = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$ и будем рассматривать в $X$ произведение топологий на $\mathbf{R}$. Можно считать, что $X$ есть пространство всевозможных вещественнозначных функций, заданных на множестве $T$, с топологией поточечной сходимости. Топология в $X$ является слабейшей из всех топологий, в которых будут непрерывными все оценочные функционалы, то есть функционалы $F_t : \ X \to \mathbf{R}$, задаваемые равенством $F_t(x(s)) = x(t)$.

Определим $m : \mathcal{A} \to X$, задав ее формулой $m(E) = K_E$, где $K_E$ - индикатор множества $E \in \mathcal{A}$. Легко понять, что $m$ является векторной мерой и она не имеет атомов. Но, если взять произвольный оценочный функционал $F_t$ и построить новую меру $n(E) = F_t(m(E))$, то $n : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ будет являться атомической скалярной мерой. Множество $T$, будет атомом меры $n$.

Пример показывает, что условие $m$-существенно счетной порожденности $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ является существенным в теореме 4. Последнее также подтверждает, что утверждение теоремы 3 без условия $\mathcal{N}$-существенно счетной порожденности $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ не будет выполнено.

В заключение приведем формулировку еще одного утверждения из работы [5]. Оно может быть получено, как следствие из теоремы 4, а, значит, является частным случаем доказанной нами теоремы 3.

**Теорема 5.** *([5]) Пусть $X$ метризуемое локально выпуклое пространство и $m : \mathcal{A} \to X$ - неатомическая векторная мера. Тогда для любого линейного непрерывного оператора $\varphi : X \to Y$ векторная мера $n = \varphi \circ m$ также является неатомической.*

Если выполнены условия приведенной выше теоремы, то векторная мера $m : \mathcal{A} \to X$ имеет контролирующую ее скалярную меру $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbf{R}^+$, причем меру $\lambda$ можно построить так, что она также будет неатомической мерой. Несложно проверить, что мера $\lambda$ будет также контролировать меру $n = \varphi \circ m$. Неатомичность контролирующей скалярной меры влечет отсутствие атомов самой векторной меры. Именно так выглядит ход доказательства последней теоремы в работе [5].

Отметим, что связь свойств неатомичности векторной меры и контролирующей ее скалярной меры можно также установить в самом общем случае, доказав это утверждение для атомов классов множеств.

# Литература

1. **Capek P.** The atoms of a contable sum set functions // *Math. Slovaca. 39. 1989. №1. P. 81-89.*

2. **Баженов И.И.** Неатомичность некоторых конструкций из неатомических векторных мер // *Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер.1: Мат. Мех. Инф. 1999. Вып.3. С. 5-14.*

3. **Баженов И.И.** Атомы классов множеств и векторных мер // *Вестник Сыктывкарск.ун-та. Сер.1: Мат. Мех. Инф. 2001. Вып.4. С. 5-12.*

4. **Ляпунов А.А.** О вполне аддитивных вектор-функциях // *Известия АН СССР. Сер. матем. 1940. Т.4. №6. С. 465-478*

5. **Kluvanek I.** The range of vector-valued measure // *Math. Sistems Theory. 1973. V.7. №1. P. 44-54.*

6. **Turpin Ph.** On the range of atomless vector measures // *Annales Socitetis Mathematicae Polonae, series 1: Commentationes Mathematicae XXIII. 1983. V.23. №1. P. 155-171.*

**Summary**

**Bazhenov I.I.** The property of nonatomicity for set families and vector measures

We introduce the new concept of atom for family of subsets of some set. This notion coincides with the notion of atom of vector measure if the family in question contains only sets of zero measure. Sufficient conditions of nonatomicity of family of sets are given for one special case. We also establish sufficient conditions of nonatomicity of the vector measure $n(E) = \phi(m(E))$ constructed by means of linear and continuous operator $\phi$ and vector measure $m$ with values in topological vector space.

*Сыктывкарский университет* *Поступила 24.02.2006*