ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.
Выпуск 4 (57)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)

Научная статья

УДК 519.816
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_15

РЕШЕНИЕ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ С ЛИНГВИСТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ПАРАМЕТРОВ

Владимир Георгиевич Чернов
Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых, vladimir.chernov44@mail.ru

Аннотация. В антагонистических играх, когда игроки преследуют противоположные цели, в их интересах сохранить в секрете возможные решения, и поэтому вполне возможна ситуация, когда участники игры не могут точно определить, какие действия предпримет противник и какие последствия за ними наступят. В этих условиях, в отличие от известных исследований, предполагается, что каждый из участников формирует свое представление игры, включая предположения о возможных действиях противоположной стороны и последствиях применяемых в ответ стратегиях, которые представляются нечеткими лингвистическими утверждениями. При этом предполагается, что игрок учитывает влияние его нечетких оценок возможности выбора противоположной стороной каких-то стратегий через изменение истинности его же предположений о последствиях собственного решения. Оценки результатов возможных стратегий игрока при любых стратегиях другого участника предполагается формировать в виде нечеткого множества с треугольной функцией принадлежности.

© Чернов В. Г., 2025.

Выбор наилучшей стратегии осуществляется на основе комплексной оценки, состоящей из произведения показателя размытости указанного нечеткого множества, вычисляемого по формуле логарифмической энтропии, и значения координаты центра тяжести его функции принадлежности на области определения элементов платежной матрицы.

Ключевые слова: антагонистическая игра, платежная матрица, нечеткое множество, лингвистическое значение, функция принадлежности

Для цитирования: Чернов В. Г. Решение конфликтной ситуации с лингвистическими оценками параметров // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2025. Вып. 4 (57). С. 15–37. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_15

Article

SOLVING A CONFLICT SITUATION WITH LINGUISTIC PARAMETER ESTIMATES

Vladimir G. Chernov
Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs, vladimir.chernov44@mail.ru

Abstract. In antagonistic games, where players pursue opposing goals, it is in their interests to keep possible decisions secret. Therefore, it is highly probable for players to be unable to accurately determine the opponent's actions and their consequences. In these settings, unlike existing research, it is assumed that each player forms their own representation of the game, including assumptions about the opponent's possible actions and the consequences of their counterstrategies, which are represented by fuzzy linguistic statements. Each player is also assumed to take into account the influence of their fuzzy assessments of the opponent's potential strategy choices by altering the validity of their own assumptions about the consequences of their own decision. Estimates of the outcomes of a player's possible strategies, given any strategy proposed by the other player, are assumed to be formed as a fuzzy set with a triangular membership function. The best strategy is selected based on a complex assessment consisting of the product of the fuzziness index of the fuzzy set, calculated using the logarithmic entropy formula, and the coordinate of the gravity center of its membership function on the domain of the payoff matrix elements.

Keywords: antagonistic game, payoff matrix, fuzzy set, linguistic value, membership function

For citation: Chernov V. G. Solving a conflict situation with linguistic parameter estimates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 15–37. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_15

1. Введение

Принятие решений является неотъемлемой частью практической деятельности в различных направлениях. Особое положение здесь занимают решения, связанные с конфликтными ситуациями, к которым, очевидно, можно отнести военные действия, борьбу с терроризмом, конкурентную борьбу на рынке и т. п. Сложность и ответственность таких ситуаций не позволяет при выработке наиболее рациональных решений опираться только на субъективные представления и предпочтения лиц, принимающих решения, и делает необходимым использование математических моделей для поддержки процесса принятия решений. Для конфликтных ситуаций такой моделью являются антагонистические игры. Традиционно антагонистическая игра может быть представлена тройкой $< A,\ B,\ G(A,B) >$, A, B — множества стратегий участников конфликта. В общем случае $G(A,B) = ||g(a_i, b_j)||$ — платежная матрица, элементами которой является оценки последствий выбора игроками стратегий. Поэтому антагонистическая игра часто называется матричной.

Классическая теория антагонистических игр основывается на принципе «общего знания», который гласит: игра со всеми правилами известна игрокам, и каждый из них знает, что все участники осведомлены о том, что известно остальным партнерам по игре [1; 2].

В практических условиях принцип «общего знания» нарушается, во-первых, из-за того, что при конфликтном характере ситуации, требующей принятия решений, игрокам целесообразно сохранять в секрете свои возможные решения, т. е. возникает (существует) первая неопределенность в знании возможных действий противника. Вторая неопределенность, которую можно рассматривать как следствие первой, — это неопределенность в оценке последствий возможных решений, значений элементов платежной матрицы.

Модель антагонистической игры, предложенная Дж. Харшаньи [3], является попыткой учесть первый тип неопределенности путем введения в формулировку игры, так называемый тип агента, предполагаемое распределение вероятностей, с которыми противоположный участник может выбирать свои стратегии.Тип агента можно создать либо на основе априорной информации из статистических наблюдений в прошлом, либо соответствующие оценки дают эксперты. Очевидно, что рассчитывать на получение заслуживающей доверия априорной информации можно, если ситуация, требующая принятия решения, возникает неоднократно при неизменных условиях, и тогда существует возможность формирования статистически значимого типа агента. Если эти условия отсутствуют, то соответствующие вероятности будут определяться экспертами. Экспертным оценкам принципиально свойственна неопределенность, которая имеет нестатистический характер, и поэтому корректность их применения в модели Дж. Харшаньи требует дополнительного обоснования. Как уже отмечалось, следующая неопределенность будет иметь место и при оценке значений элементов платежной матрицы, которая также нестатистическая по причинам, подробно рассмотренным в [4]. Адекватным вариантом формализации нестатистической неопределенности вполне обоснованно можно считать ее представление на основе теории нечетких множеств. Различные варианты решения антагонистических игр с нечеткими параметрами предложены в исследованиях [5–9]. Однако все они в той или иной степени остаются в рамках классической теории и принципа «общего знания». Неопределенности нестатистического характера в исходных данных, с одной стороны, нарушают принцип «общего знания», а с другой — становятся причиной видоизменения модели Дж. Харшаньи. Нечеткий аналог модели Дж. Харшаньи, основанный на использовании нечетких чисел, предложен в [10]. Другим вариантом моделирования неопределенности исходных данных является использование лингвистической (вербальной) формы их представления.

2. Материалы и методы

Поскольку в антагонистической игре участвуют рационально действующие участники, то можно считать, что каждому из них известен список возможных стратегий противника, т. е. игроку A известно множество $B = [b_j : j = 1, \ldots, N]$, а игроку B — множество $A = [a_i : i = 1, \ldots, M]$. Нарушение принципа «общего знания» приводит к тому, что у каждого из участников будет свое представление как о возможном выборе другой стороны, так и его последствиях. Тогда первый игрок формирует множество оценок, характеризующих возможность выбора игроком B некоторой стратегии b_j, которую обозначим $Pos(B/A) = [pos(b_j/A) : j = 1, \ldots, N]$, а также его представление относительно последствий выбора им стратегии a_i при стратегии b_j второго игрока

$$G_A = \begin{vmatrix} g(A)_{11} & g(A)_{12} & \ldots & g(A)_{1N} \\ g(A)_{21} & g(A)_{22} & \ldots & g(A)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(A)_{M1} & g(A)_{M2} & \ldots & g(A)_{MN} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Аналогично, игрок B конструирует свою систему $Pos(A/B) = [pos(a_i/B) : i = 1, \ldots, M]$ и матрицу

$$G_B = \begin{vmatrix} g(B)_{11} & g(B)_{12} & \ldots & g(B)_{1N} \\ g(B21 & g(B)_{22} & \ldots & g(B)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(B)_{M1} & g(B)_{M2} & \ldots & g(B)_{MN} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Для оценок, характеризующих представления игроков о ситуациях, требующих от них принятия решений, должны быть сформированы соответствующие терм-множества:

$$\begin{aligned} &T[Pos(B/A)] = [\tau_k[pos(b_j/A)] : k = 1, \ldots, K_j], \\ &T[G_A] = [\tau_q(G_A) : q = 1, ..., Q_A], \\ &T[Pos(A/B)] = [\tau_k[pos(a_i/B)] : k = 1, ..., K_i], \\ &T[G_B] = [\tau_q(G_B) : q = 1, ..., Q_B]. \end{aligned}$$

В общем случае $K_i \neq K_j$.

Оценки $\tau_k[pos(b_j/A)]$, $\tau_k[pos(a_i/B)]$ формализуются нечеткими множествами, соответственно:

$$M_{(B/A)} = \{\mu^k_{B/A}(x) : k = \overline{1, K_i},\ x \in [0, 1]\}, \tag{3}$$

$$M_{(A/B)} = \{\mu^k_{A/B}(x) : k = \overline{1, K_j},\ x \in [0,1]\}, \tag{4}$$

$$M[G(A)] = \{\mu^A_q(y) : q = \overline{1, Q_A}\}, \tag{5}$$

$$M[G(B)] = \{\mu^B_q(y) : q = \overline{1, Q_B}\}, \tag{6}$$

где $[y_{\min}, y_{\max}]$ — области определения элементов матриц (1) и (2) соответственно. Возможно, что для участников конструирование игры непосредственно в форме лингвистических оценок окажется либо затруднительным, либо недостаточно убедительным. Тогда может использоваться следующая процедура (фаззификация).

Пусть выбрано терм-множество

$$T[Pos(B/A)] = [VS,\ Sm,\ M,\ HM,\ B] \tag{7}$$

(VS — очень малая возможность, Sm — малая возможность, M — средняя, HM — выше средней, B — значительная) и соответствующие нечеткие множества с функциями принадлежности (рис. 1).

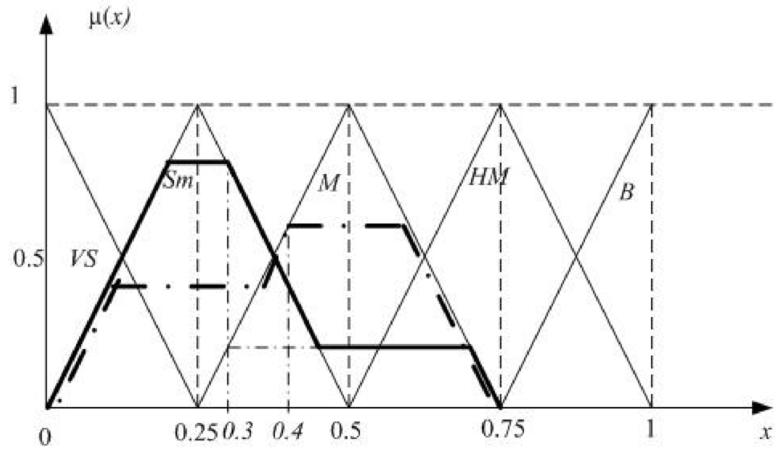

Рис. 1. Терм-множество $T[Pos(B/A)]$ и результаты фаззификации (утолщенные и пунктирные линии)

Например, игрок A выбирает точку на оси ординат, отражающую его примерную оценку возможности использования игроком B некоторой стратегии b_j. В общем случае в результате фаззификации получим лингвистическое значение $pos(b_j/A) = (LM \text{ or } M)$. Если, например, $\mu_{LM}(x) >> \mu_M(x)$ при $x = b_j$ или наоборот, то остается одна из лингвистических оценок. Аналогично поступаем и с оценками последствий возможных решений. Для простоты дальнейшего изложения предположим, что игроки используют одинаковые терм-множества оценок последствий сделанного выбора

$$T(a_i, b_j) = [L,\ LM,\ M,\ HM,\ B] \tag{8}$$

(L — последствия незначительные, LM — ниже среднего, M — средние, HM — выше среднего, B — существенные) (рис. 2).

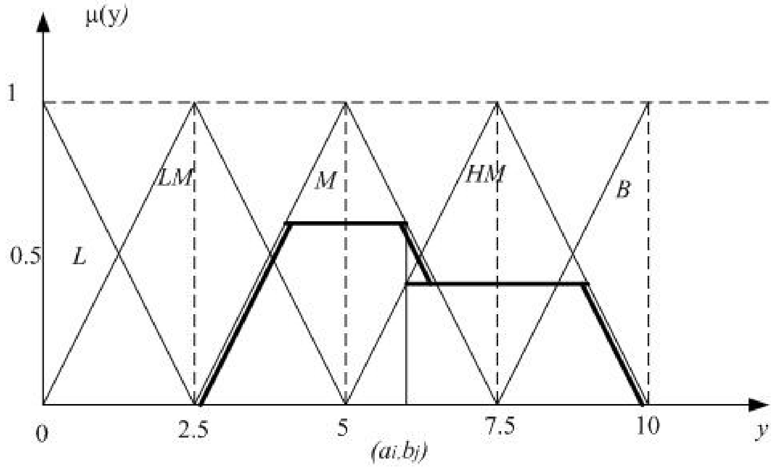

Рис. 2. Терм-множество оценок последствий возможного выбора, утолщенными линиями представлен результат фаззификации последствий выбора игроками пары стратегий (a_i, b_j)

В результате формируются множества нечетких оценок для первого игрока

$$\widetilde{Pos}(A/B) = \{\mu_{(b_j,A)}(x) : j = \overline{1,N}\} \quad \text{и} \quad \widetilde{G}(A) = \left|\left|\mu^A_{ij}(y)\right|\right|,$$

для второго

$$\widetilde{Pos}(B/A) = \{\mu_{(a_i,B)}(x) : j = \overline{1,M}\}, \quad \widetilde{G}(B) = \left|\left|\mu^B_{ij}(z)\right|\right|.$$

Дальнейшие преобразования рассматриваются на примере игрока A, действия B будут аналогичными.

Нарушение принципа «общего знания» делает невозможным использование методов классической теории антагонистических игр для нахождения наилучших стратегий. Поэтому в рассматриваемой ситуации игрокам целесообразно основываться на следующем положении: при имеющемся характере неопределенностей наиболее полезной будет стратегия, обеспечивающая наилучший результат независимо от выбора другой стороны. В этом случае игроки для нахождения таких стратегий должны оценивать последствия возможных решений с учетом истинности их предположений о возможном выборе противника, т. е. построить на основе соотношений (3–6) нечеткие отображения

$$\widetilde{\Gamma}_A : \widetilde{M}(B/A) \to \widetilde{M}[G(A)] \tag{9}$$

для игрока A и для игрока B

$$\widetilde{\Gamma}_B : \widetilde{M}(A/B) \to \widetilde{M}[G(B)]. \tag{10}$$

Пусть некоторому элементу матрицы (1) $\mu_{ij}^A(y)$ соответствует $\mu_{(b_j/A)}(x)$ нечеткая оценка игроком A возможности выбора игроком B стратегии b_j. С помощью генератора случайных чисел генерируется множество пар (y_p, x_r), $p = \overline{(1, P)}$, $r = \overline{(1, R)}$. Вычисляются функции принадлежности нечетких отображений (7)

$$\widetilde{\mu}_{ij}^A(y_p) = \mu_{ij}^A(y_p) \cap \mu_{(b_j/A)}(x_r) = \min[\mu_{ij}^A(y_p),\ \mu_{(b_j/A)}(x_r)] \tag{11}$$

и (8)

$$\widetilde{\mu}_{ij}^B(z_p) = \mu_{ij}^B(z_p) \cap \mu_{a_i/B}(x_i) = \min[\mu_{ij}^B(z_p),\ \mu_{(a_i/B)}(x_r)]. \tag{12}$$

Указать заранее необходимое количество пар невозможно, так как оно во многом зависит от вида функций принадлежности соответствующих нечетких оценок. Количество пар подбирается экспериментально так, чтобы последующие преобразования обеспечили надежное распознавание получаемых нечетких оценок последствий возможных решений. Для треугольных функций принадлежности достаточное число пар не более 10: $P = R = 10$. В результате будут получены дискретные нечеткие множества, характеризующие последствия выбора игроком A стратегии a_i с учетом истинности предположения о выборе игроком B стратегии b_j (9) и последствия выбора игроком B стратегии b_j с учетом истинности предположения о выборе игроком A стратегии a_i. Описанная процедура применяется ко всем элементам матриц (1) и (2). В результате матрицы (1) и (2) будут преобразованы в матрицы

$$\widetilde{G'}(A) = \left|\left|\widetilde{\mu}_{ij}^A\right|\right|, \tag{13}$$

$$\widetilde{G}'(B) = ||\widetilde{\mu}_{ij}^B|| \tag{14}$$

соответственно.

В ситуациях, представленных матрицами (13), (14), в качестве наиболее выгодных будут те стратегии, которые обеспечат игрокам наилучший результат, не зависящий от выбора другого участника. Для определения таких стратегий, например, игрок A должен для каждой своей стратегии $a_i \in A$ вычислить интегральную оценку ее последствий по всему множеству стратегий игрока B и затем сравнить полученные результаты. Аналогично игрок B для каждой стратегии $b_j \in B$ вычисляет интегральную оценку ее последствий по всему множеству стратегий игрока A.

Для получения интегральной оценки предлагается рассматривать совокупность дискретных множеств строк матрицы (13)

$$[\widetilde{\mu}_{i1}^A,\ \widetilde{\mu}_{i2}^A,\ \ldots,\ \widetilde{\mu}_{iN}^A],\quad i = \overline{1, M}$$

как единое дискретное нечеткое множество $\widetilde{M}_i^A$. Аналогично для множества строк матрицы (14) $[\widetilde{\mu}_{j1}^B,\ \widetilde{\mu}_{j2}^B,\ \ldots,\ \widetilde{\mu}_{jM}^B]$, $j = \overline{1, N}$ — $\widetilde{M}_j^B$.

Функции принадлежности таких множеств будут представляться набором их дискретных, вообще говоря, произвольных, значений, дальнейшие преобразования над которыми окажутся весьма сложными. Поэтому предлагается к множествам $\widetilde{M}_i^A$ и $\widetilde{M}_j^B$ применить преобразование FztoTriangle, определенное в нечеткой электронной таблице FuzyCalc фирмы FuzyWare. Суть этого преобразования состоит в замене произвольного нечеткого множества эквивалентным с треугольной функцией принадлежности, которое имеет одинаковые с исходным величину носителя и значение координаты центра тяжести. Координата модального значения определяется из известного соотношения для координаты центра тяжести треугольника, тогда для игрока A $x_{\mathrm{mod}_i} = 3CG_{Eq_i} - (x_{\max_i} + x_{\min_i})$, где CG_{Eq_i} — координата центра тяжести эквивалентного множества, соответствующего i-ой строке матрицы (13), $[x_{\max_i},\ x_{\min_i}]$ — границы носителя нечеткого множества $\widetilde{M}_i^A$, для игрока B $z_{\mathrm{mod}_i} = 3CG_{Eq_i} - (z_{\max_i} + z_{\min_i})$, где CG_{Eq_i} — координата центра тяжести эквивалентного множества, соответствующего i-ой строке матрицы (14), $[z_{\max_i},\ z_{\min_i}]$ — границы носителя нечеткого множества $\widetilde{M}_i^B$. Значение функции принадлежности эквивалентного нечеткого множества в точке x_{mod_i} в зависимости от предпочтений игрока может определяться либо как $\max\limits_i[\widetilde{\mu}_{i1}^A,\ \widetilde{\mu}_{i2}^A,\ \ldots,\ \widetilde{\mu}_{iN}^A]$, $i=\overline{1,M}$ ($\max\limits_j[\widetilde{\mu}_{j1}^B,\ \widetilde{\mu}_{j2}^B,\ \ldots,\ \widetilde{\mu}_{jM}^B]$), либо как средневзвешенное.

Таким образом, каждой строке матриц (13), (14) будет поставлено в соответствие эквивалентное нечеткое множество $\widetilde{E}(a_i)$, $\widetilde{E}(b_j)$ соответственно, а в совокупности каждый из игроков получит для принятия решений вектора нечетких оценок последствий возможного выбора

$$\widetilde{E}(A)=\begin{vmatrix}\widetilde{E}(a_1)\\ \widetilde{E}(a_2)\\ \vdots\\ \widetilde{E}(a_M)\end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$\widetilde{E}(B)=\begin{vmatrix}\widetilde{E}(b_1)\\ \widetilde{E}(b_2)\\ \vdots\\ \widetilde{E}(b_N)\end{vmatrix}. \tag{16}$$

Для выбора наилучшего решения необходимо сравнение нечетких координат векторов $\widetilde{E}(A)$ (15), $\widetilde{E}(B)$ (16). Предлагаемые в [11–13] методы сравнения нечетких чисел в решаемой задаче оказываются недостаточными. Дело в том, что для принятия решения в данном случае необходим учет двух параметров, уровня неопределенности (размытости) и положения нечеткой оценки на области определения.

Оценка размытости нечеткого множества представляет собой отдельную, достаточно сложную задачу, различные методы решения которой описаны в [14]. В работе [15] отмечается, что можно выделить несколько аспектов, связанных с понятием размытости нечетких множеств, среди которых для решаемой задачи существенным является интерпретация показателя размытости как характеристики уровня внутренней неопределенности, обусловленной неполной, частичной информацией о соответствии возможного решения условиям наилучшего выбора. Очевидно, что функции принадлежности $0<\mu_{\widetilde{E}(a_i)}(y)<1$ или $0<\mu_{\widetilde{E}(b_i)}(y)<1$ указывают на то, что $\forall a_i\in A$ или $\forall b_j\in B$ лишь в частичной мере удовлетворяют условию быть наилучшим. В общем случае показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функционала $F(\omega)\in R^+$, где $\omega=y$ или z, свойства которого определены в [15]. В [16] при конечном числе элементов нечеткого множества предлагается функционал в следующем виде:

$$F(\omega) = \sum_i \varphi_i(\mu_{\widetilde{E}}(\omega)), \tag{17}$$

где φ_i — вещественнозначная функция $\mu_{\widetilde{E}(a_i)}(y)$ или $\mu_{\widetilde{E}(b_j)}(z)$ в зависимости от того, для какого игрока проводятся вычисления. В качестве такой функции по аналогии с шенноновской энтропией теории информации может использоваться логарифмическая энтропия нечеткого множества

$$\varphi = -q\ln q - (1-q)\ln(1-q), \tag{18}$$

где $q = \mu_{\widetilde{E}(a_i)}(y)$ или $q = \mu_{\widetilde{E}(b_j)}(z)$. Другой вариант определения размытости нечетких множеств предложен в [17]

$$F(\omega) = \sum_i \mu_{\widetilde{E}}(\omega_i)(1 - \mu(\omega_i)). \tag{19}$$

Однако ни один из известных методов не учитывает положение нечеткой оценки на области ее определения. Этой оценкой для нечеткого множества с треугольной функцией принадлежности может стать координата либо ее максимального значения, либо центра тяжести. При выборе одного из этих параметров можно руководствоваться следующими соображениями: координата максимального значения определяется проще, чем координата центра тяжести, с другой стороны, если рассматривать функцию принадлежности как совокупность точек с массами, равными ее значениям, координата центра тяжести является обобщенной характеристикой такой совокупности. Поскольку возможны различные сочетания значений показателей размытости, то для выбора наилучшего варианта необходима композиционная оценка, которая должна формироваться исходя из логики принятия решений игроками.

В антагонистических играх без ограничения общности предполагается, что первый игрок выигрывает, а второй проигрывает. Тогда логика выбора решения игроком A может быть следующей. Наилучшим будет такое решение, у которого желательны минимальная неопределенность и наибольшее значение координаты максимума или центра тяжести функции принадлежности. Тогда наиболее выгодной стратегией будет

$$a_i^* \to \min_i \left[\frac{F_{\widetilde{E}(a_i)}(y)}{\max\limits_y \mu_{\widetilde{E}(a_i)}(y)} \right]$$

или

$$a_i^* \to \min_i \left[\frac{F_{\widetilde{E}(a_i)}(y)}{CG[\mu_{\widetilde{E}(a_i)}(y)]} \right], \qquad (20)$$

где $F_{\widetilde{E}(a_i)}(y)$ — показатель размытости нечеткой оценки $\widetilde{E}(a_i)$, вычисленный по соотношению (18) или (и) (19); $CG[\mu_{\widetilde{E}_{a_i}}(y)]$ — координата центра тяжести функции принадлежности $\mu_{\widetilde{E}_{a_i}}(y)$, $i = \overline{1, M}$.

Второй игрок также заинтересован в оценке с минимальной неопределенностью, которая также рассчитывается по соотношению (18) или (и) (19), но с наименьшим значением координаты максимума функции принадлежности или ее центра тяжести. Тогда для него наиболее выгодной будет стратегия

$$b_J^* \to \min_j \left[F_{\widetilde{E}(b_j)}(z) \cdot \max_z [\mu_{\widetilde{E}(b_j)}(z)] \right]$$

или

$$b_J^* \to \min_j [F_{\widetilde{E}(b_j)}(z)] \cdot CG[\mu_{\widetilde{E}(b_j)}(z)], \qquad (21)$$

где $F_{\widetilde{E}(b_j)}(y)$ — показатель размытости нечеткой оценки $\widetilde{E}(b_j)$, вычисленный по соотношению (18) или (и) (19); $CG[\mu_{\widetilde{E}_{b_j}}(y)]$ — координата центра тяжести функции принадлежности, $j = \overline{1, N}$.

3. Результаты

Проиллюстрируем изложенное упрощенным примером. Выбор игроками наилучших стратегий выполняется в несколько этапов.

Этап1. Формирование исходных данных. Игроки определяют множества возможных стратегий, оценки их применения, а также возможности выбора другим участником каких-то стратегий. Обычно первоначальная модель ситуации, требующей принятия решений, задается в числовой форме, например табл. 1 для игрока A и табл. 2 для B.

Этап 2. Фаззификация исходных данных. Учитывая возможную неопределенность, числовые данные подвергаются фаззификации. Для этого каждый из игроков формирует терм-множества лингвистических оценок для последствий возможных решений и возможности выбора другим участником некоторых стратегий. Для упрощения изложения

Таблица 1

Представление игры со стороны игрока A

$Pos(B/A)$	0.3	0.1	0.4	0.2
A/B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	3	3	8	4
a_2	5	1	6	5
a_3	7	3	3	6

Таблица 2

Представление игры со стороны игрока B

$Pos(A/B)$	0.3	0.5	0.2
B/A	a_1	a_2	a_3
b_1	3	8	5
b_2	1	4	6
b_3	7	5	3
b_4	4	3	4

предполагается, что игроки используют одинаковые терм-множества для последствий возможных решений, представленные соотношением (8). Один из вариантов результата фаззификации для пар стратегий (a_3, b_1), (a_3, b_4) приведен на рис. 3. Аналогичной процедуре подвергаются и первоначальные оценки игроков возможности использования каких-то стратегий другим участником (рис. 1). В отличие от первого игрока второй использует для $POS(A/B)$ терм-множество из трех лингвистических значений $T[POS(A/B)] = [Sm, M, B]$ (Sm — малая возможность, M — средняя, B — значительная) (рис. 4). Результаты второго этапа представлены в табл. 3 и 4. Хотя в табл. 3 присутствуют одинаковые лингвистические значения, например для пар стратегий (a_3, b_1), (a_3, b_4), они имеют различные функции принадлежности (рис. 3). Аналогичная ситуация будет и для совпадающих по обозначениям элементов табл. 4.

В результате фаззификации табл. 1 и 2 преобразуются к виду табл. 3 и 4.

Этап 3. Формируются итоговые оценки последствий возможных решений с учетом истинности предположений игроков о возможном

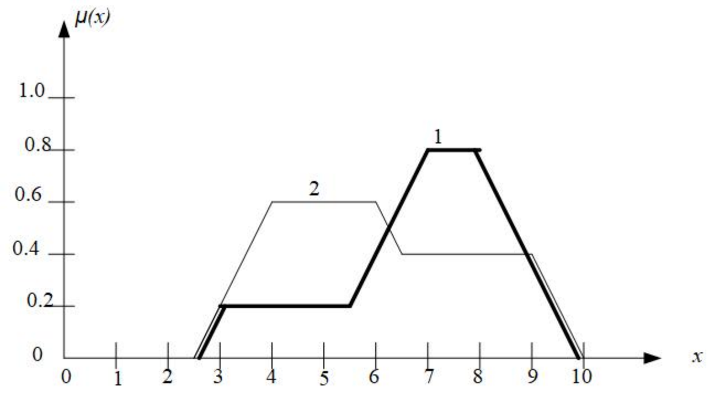

Рис. 3. Функции принадлежности нечетких оценок
для пар стратегий (a_3, b_1) — 1, (a_3, b_4) — 2

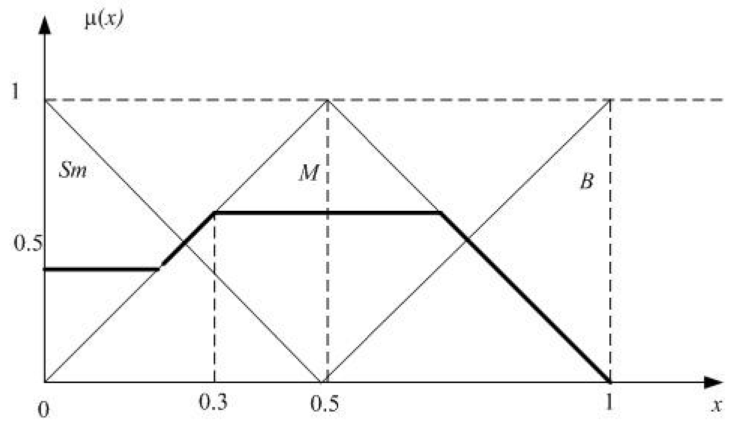

Рис. 4. Функции принадлежности элементов терм-множества $T[Pos(A/B)]$
и результат фаззфикации (утолщенные линии)

Таблица 3

Fuzzy-представление игры игрока A

$Pos(B/A)$	Sm or M	VS or Sm	Sm or M	Sm
A/B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	LM or M	L or LM	HM or B	LM or M
a_2	M	L or M	M or HM	M
a_3	M or HM	LM or M	L or LM	M or HM

Таблица 4

Fuzzy-представление игры игрока B

$Pos(A/B)$	Sm or M	M	Sm or M
B/A	a_1	a_2	a_3
b_1	LM or M	HM or H	M
b_2	L or LM	LM or M	M or HM
b_3	HM or H	M	LM or M
b_4	LM or M	LM or M	LM or M

выборе противника. Строятся нечеткие отображения (9) и (10) и соответствующие функции принадлежности (11), (12). В результате для каждой строки табл. 3, 4 формируется рассматриваемое как единое, нечеткое множество, функция принадлежности которого представляется набором дискретных, вообще говоря, произвольных значений, что очень сильно усложняет принятие окончательного решения.

Этап 4. Построение эквивалентных нечетких множеств. Каждое нечеткое множество, полученное на предыдущем этапе, преобразуется по описанным выше правилам в эквивалентные нечеткие множества с треугольными функциями принадлежности. В результате оценки последствий возможных решений представляются векторами, нечеткие координаты которых имеют треугольные функции принадлежности, что существенно упрощает процедуры принятия окончательного решения. В результате описанных выше преобразований для каждой строки матриц, представленных табл. 3, 4, будут получены эквивалентные нечеткие множества (рис. 5).

Этап 5. Выбор наилучшего решения. Для каждой нечеткой координаты векторов, полученных на предыдущем этапе, вычисляются интегральные оценки возможных решений по соотношениям (18–21) и выбирается наиболее выгодное.

В табл. 5, 6 для данных задачи, используемой как пример, представлены результаты расчетов по соотношениям (18) и (19). Для подтверждения корректности полученных результатов расчеты проводились по обоим соотношениям (20) и (21). В обеих таблицах индекс 18 означает, что расчеты размытости нечетких оценок выполнялись по соотношению (18), 19 – по формуле (19).

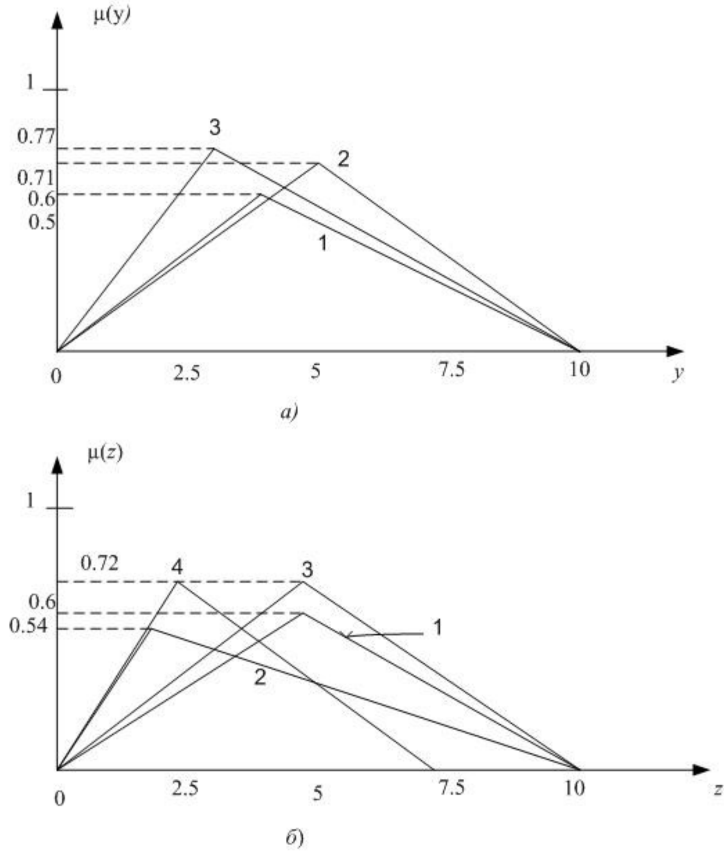

Рис. 5. Нечеткие оценки последствий возможного выбора игроков:
а) для игрока A: $\widetilde{E}(a_1)$ —1, $\widetilde{E}(a_2)$ — 2, $\widetilde{E}(a_3)$ — 3;
б) для игрока B: $\widetilde{E}(b_1)$ — 1, $\widetilde{E}(b_2)$ — 2, $\widetilde{E}(b_3)$ — 3, $\widetilde{E}(b_4)$ — 4

Таблица 5

Оценки возможных стратегий игрока A

F/A	a_1	a_2	a_3
F_{18}	4.94	25.08	5.15
$F_{18} \cdot CG$	1.19	0.98	1.1
F_{19}	3.65	3.28	3.71
$F_{19} \cdot CG$	0.87	0.634	0.79

Согласно сформулированным условиям оба метода расчетов указывают, что для игрока A наилучшим решением будет выбор стратегии a_2.

Таблица 6

Оценки возможных стратегий игрока B

F/B	b_1	b_2	b_3	b_4
F_{18}	4.36	4.09	4.17	3.185
$F_{18} \cdot CG$	20.78	15.06	20.21	9.98
F_{19}	2.81	3.58	3.91	2.18
$F_{19} \cdot CG$	13.7	9.5	14.08	6.91

Аналогично для игрока B оба метода расчетов указывают, что наилучшим будет выбор стратегии b_4. Совпадение результатов двух независимых методов расчета подтверждают корректность найденных решений. В результате выбранным наилучшим решениям a_i^* (в примере a_2) и b_j^* (b_4) будут соответствовать нечеткие множества, представляющие распределение возможности получения некоторого результата, в том числе и возможно наилучшего, на области определения значений элементов платежных матриц (11, 12).

Для антагонистических игр важным параметром является цена игры, которая достигается, если игроки используют наилучшие (оптимальные) стратегии. Поскольку нечеткие множества $\widetilde{E}(a_i^*)$ и $\widetilde{E}(b_j^*)$ — это нечеткие результаты применения игроками наиболее выгодных (удачных) стратегий, которые для первого игрока A обеспечивают ему наибольший ожидаемый выигрыш, не зависящий от решений другого участника, для второго (B) — наименьший ожидаемый проигрыш, также не зависящий от действий противника, то должна существовать и нечеткая цена игры, которая очевидно будет представляться общей областью этих множеств, т. е.

$$\widetilde{\nu} = \widetilde{E}(a_i^* \cap \widetilde{E}(b_J^*) = \mu_{\widetilde{E}(a_i^*)} \cap \mu_{\widetilde{E}(b_J^*)}$$

или

$$\widetilde{\nu} = \mu_{\widetilde{E}(a_i^*)} \cdot \mu_{\widetilde{E}(b_J^*)} \, .$$

Нечеткая нижняя цена игры $\widetilde{\alpha} = \widetilde{E}(a_i^0) \cap \widetilde{E}(b_j^*)$, где a_i^0 — самая неудачная стратегия игрока A, т. е. стратегия с наименьшей интегральной оценкой ожидаемого выигрыша. Нечеткая верхняя цена игры $\widetilde{\beta} = \widetilde{E}(a_i^*) \cap \widetilde{E}(b_j^0)$, где b_j^0 — самый неудачный выбор игрока B, т. е. выбор стратегии с наибольшим ожидаемым проигрышем (рис. 6).

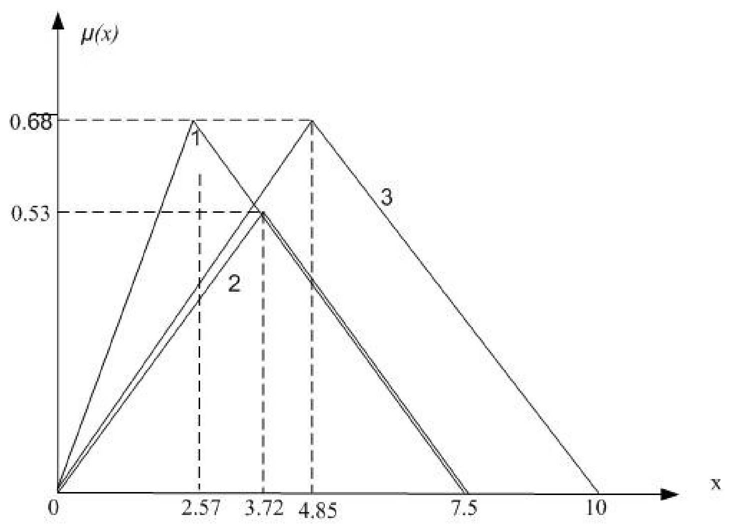

Рис. 6. Нечеткая нижняя цена игры — 1, нечеткая цена игры — 2, нечеткая верхняя цена игры — 3

Естественно возникает вопрос о корректности предложенного метода решения рассматриваемой задачи, ответить на который можно следующим образом. Нечеткие множества считаются обобщением классических множеств. Применительно к рассматриваемой задаче предлагаемый метод ее решения должен дать, по крайней мере, непротиворечивый результат в частном случае, когда от нечеткой формулировки возвращаемся к четкой. Будем рассматривать ситуацию для каждого игрока в отдельности. Тогда для каждого из участников возникает ситуация, аналогичная играм с природой, где в качестве природы выступает его противник. В этом случае для оценки возможных решений может использоваться байесовский принцип. Возможны два варианта возврата к четкой постановке. Первый — использовать для проверки данные, с которых начиналось рассмотрение задачи. Здесь и дальше с целью сокращения объема статьи ограничимся только конечными результатами. Оценивая возможные последствия по известной формуле

$$s_i = \sum_j g_{ij} p_j, \tag{22}$$

где g_{ij}, p_{ij} — соответствующие элементы табл. 1, 2, из табл. 1 и 2 получим следующие оценки стратегий игрока A: $a_1 = 5.1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 4.4$, для игрока B: $b_1 = 5.9$, $b_2 = 3.5$, $b_3 = 5.2$, $b_4 = 2.4$. Как было определено выше, игрок A заинтересован в наибольшем результате (выигрыше), и, соответственно, для него наилучшей будет стратегия a_1, игрок B — в наименьшем (проигрыш), и для него лучшей будет стратегия b_4. Некоторое расхождение с нечетким вариантом можно объяснить близостью оценок стратегий a_1 и a_2.

Второй вариант основан на операции дефаззификации элементов матриц, представленных табл. 3, 4, например по методу центра тяжести. Полученные значения обрабатываются по соотношению (19). В результате получены $a_1 = 5.4$, $a_2 = 5.6$, $a_3 = 5.25$, для игрока B: $b_1 = 7.2$, $b_2 = 5.4$, $b_3 = 6.9$, $b_4 = 4.9$, соответственно, лучшими будут стратегии a_2 и b_4, что совпадает с нечетким вариантом. Отметим, что все полученные таким образом оценки принадлежат и соответствующим эквивалентным нечетким множествам.

4. Заключение

Предлагаемый метод решения конфликтной ситуации, формализуемой как антагонистическая матричная игра, позволяет находить наиболее выгодные стратегии ее участниками в условиях нарушения принципа «общего знания», обусловленного неопределенностью знаний о возможных решениях противоположного участника, из-за чего исходные данные представляются в виде нечетких лингвистических утверждений. Необходимо отметить, что, хотя в иллюстрациях только для простоты графического представления использовались треугольные функции принадлежности нечетких величин, сам метод нахождения наиболее выгодных решений не накладывает ограничений на вид используемых функций принадлежности.

Список источников

1. **Myerson R. B.** Game theory: analysis of conflict. London. Harvard: Harvard University Press, 1997. 584 p.

2. **Geanakoplos J.** Common Knowledge // Handbook of GameTheory / ed. by R. Aumann and S. Hart. Netherlands: Elsiever Science B. V, 1994. Vol. 2. Pp. 1437–1496.

3. **Харшаньи Д., Зельтен Р.** Общая теория выбора равновесия в играх : пер. с англ. СПб.: Экономическая школа, 2001. 424 с.

4. **Сигал А. В.** Теория игр для принятия экономических решений. Симферополь: Диайпи, 2014. 303 с.

5. **Krishnaveni G., Ganesan K.** A new approach for the solution of fuzzy games // *National Conference on Mathematical Techniques and its Applications (NCMTA 18) IOP Publishing IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1000*. 2018. Pp. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/1000/1/012017.

6. **Khalifa A.** On Solving Two-Person Zero-Sum Fuzzy Matrix Games via Linear Programming Approach // *International Journal of Research in Industrial Engineering*. 2019. Vol. 8. No 1. Pp. 17–27.

7. **Xia Zh., Hao S., X. Jin, Moses O. E.** On characterization of equilibrium strategy for matrix games with L-R fuzzy payoffs // *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2021. Vol. 64. Issue 3. Pp. 158–174.

8. **Maschenko S. O.** On a value of matrix game with fuzzy sets of player strategies // *Fuzzy Sets and Systems*. 2024. Vol. 477. Article no 108798. DOI: 10.1016/j.fss.2023.108798.

9. **Orlova L.** Combined use of statistical and Antagonistic Games // *Computer and Industrial Engineering*. November 2021. Vol. 161. P.7–19.

10. **Чернов В. Г.** Выбор решений в конфликтной ситуации с нечеткими типами участников // *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2022. № 4. С. 24–36.

11. **Воронцов Я. А., Матвеев М. Г.** Методы параметризованного сравнения нечетких и трапециевидных чисел // *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2014. № 2. С. 90–97.

12. **Ухоботов В. И., Стабулит И. С., Кудрявцев К. Н.** Сравнение нечетких чисел треугольного типа // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 197–210. DOI: 10.20537/vm190205logo.

13. **Rao P. P. B., Shankar N. R.** Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spread and weight // *International Journal of Applied Science and Engineering*. 2012. Vol. 1. No 10. Pp. 41–57.

14. **Ибрагимов В. А.** Элементы нечеткой математики. Баку: Изд-во АГПУ, 2010. 392 с.

15. **Dubois D., Prade H.** New results about properties andsemantics of fuzzy-set-theoretic operators // *Fuzzy Sets* / ed. by P. P. Wang and S. K. Change. N.Y.: Plenum Press, 1980. Pp.59–75.

16. **Yager F. F.** On solving fuzzy mathematical relationships // *Information and Control.* 1970. Vol. 41. No 1. Pp. 29–55.

17. **Capocelli R., De Luca A.** Fuzzy sets and decision theory // *Information and Control.* 1973. Vol. 23. Pp. 44–47.

References

1. **Myerson R. B.** *Game theory: analysis of conflict.* London. Harvard: Harvard University Press. 1997. 584 p.

2. **Geanakoplos J.** Common Knowledge. *Handbook of GameTheory.* Ed. by R. Aumann and S. Hart. Netherlands: Elsiever Science B. V, 1994. Vol. 2. Pp. 1437–1496.

3. **Harsanyi D., Selten R.** *Obshchaya teoriya vybora ravnovesiya v igrakh : per. s angl.* [General Theory of Equilibrium Choice in Games : translated from English]. St. Petersburg: Economic School, 2001. 424 p. (In Russ.)

4. **Sigal A. V.** *Teoriya igr dlya prinyatiya ekonomicheskikh resheniy* [Game Theory for Economic Decision Making]. Simferopol: Diaipi, 2014. 303 p. (In Russ.)

5. **Krishnaveni G., Ganesan K.** A new approach for the solution of fuzzy games. *National Conference on Mathematical Techniques and its Applications (NCMTA 18) IOP Publishing IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1000.* 2018. Pp. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/1000/1/012017.

6. **Khalifa A.** On Solving Two-Person Zero-Sum Fuzzy Matrix Games via Linear Programming Approach. *International Journal of Research in Industrial Engineering.* 2019. Vol. 8. No 1. Pp. 17–27.

7. **Xia Zh., Hao S., X. Jin, Moses O. E.** On characterization of equilibrium strategy for matrix games with L-R fuzzy payoffs. *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2021. Vol. 64. Issue 3. Pp. 158–174.

8. **Maschenko S. O.** On a value of matrix game with fuzzy sets of player strategies. *Fuzzy Sets and Systems*. 2024. Vol. 477. Article no 108798. DOI: 10.1016/j.fss.2023.108798.

9. **Orlova L.** Combined use of statistical and Antagonistic Games. *Computer and Industrial Engineering*. November 2021. Vol. 161. Pp. 7–19.

10. **Chernov V.G.** Decision Making in a Conflict Situation with Fuzzy Types of Participants. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy* [Artificial Intelligence and Decision Making]. 2022. No 4. Pp. 24–36. (In Russ.)

11. **Voroncov Ya. A., Matveev M. G.** Methods of parameterized comparison of fuzzy and trapezoidal numbers. *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologi* [VSU Bulletin. Series: Systems Analysis and Information Technology]. 2014. No 2. Pp. 90–97. (In Russ.)

12. **Ukhobotov V. I., Stabulit I. S., Kudryavtsev K. N.** Comparison of fuzzy numbers of triangular type. *Vestnik Udmurtskogo uni versiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2019. Vol. 29. Issue 2. Pp. 197–210. (In Russ.)

13. **Rao P. P. B., Shankar N. R.** Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spread and weight. *International Journal of Applied Science and Engineering*. 2012. Vol. 1. No 10. Pp. 41–57.

14. **Ibragimov V. A.** *Elementy nechetkoy matematiki* [Fuzzy math elements]. Baku: Armavir State Pedagogical University Publ., 2010. 392 p. (In Russ.)

15. **Dubois D., Prade H.** New results about properties andsemantics of fuzzy-set-theoretic operators. *Fuzzy Sets*. Ed. by P. P. Wang and S. K. Change. N.Y.: Plenum Press, 1980. Pp. 59–75.

16. **Yager R. R.** On solving fuzzy mathematical relationships. *Information and Control.* 1970. Vol. 41. No 1. Pp. 29–55.

17. **Capocelli R., De Luca A.** Fuzzy sets and decision theory. *Information and Control.* 973. Vol. 23. Pp. 44–47.

Сведения об авторе / Information about author
Чернов Владимир Георгиевич / Vladimir G. Chernov
д.э.н., профессор, профессор кафедры вычислительной техники и систем управления / Doctor of Economics, Professor, Professor of the Department of Computer Science and Control Systems
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых / Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs
Россия, 600000, Владимирская область, г. Владимир, ул. Горького, 87 / 87, Gorky street, Vladimir city, Vladimir region, 600000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 21.09.2025
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 09.11.2025
Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025