МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.*
*Выпуск 4 (57)*
*Bulletin of Syktyvkar University.*
*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)*

Научная статья

УДК 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_4

# ДЕРЕВЬЯ КАК ГРАФЫ ХАССЕ КОНЕЧНЫХ ПОЛУРЕШЕТОК С РЕТРАКТАМИ

**Евгений Михайлович Вечтомов**
Вятский государственный университет, vecht@mail.ru

***Аннотация.*** Рассматриваются элементы теории полурешеток. Главный результат работы — полурешеточная характеризация деревьев. Именно доказано, что произвольный граф является деревом тогда и только тогда, когда он изоморфен графу Хассе некоторой конечной полурешетки, все подполурешетки которой — ретракты.

***Ключевые слова:*** полурешетка, ретракт, полурешетка с ретрактами, дерево, граф Хассе конечного упорядоченного множества

***Финансирование.*** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

***Для цитирования:*** Вечтомов Е. М. Деревья как графы Хассе конечных полурешеток с ретрактами // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2025. Вып. 4 (57). С. 4–14. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_4

Article

## TREES AS HASSE GRAPHS OF FINITE SEMILATTICES WITH RETRACTS

**Evgeny M. Vechtomov**
Vyatka State University, vecht@mail.ru

***Abstract.*** The article considers the elements of the semilattices theory. The main result of the work is a semilattice characterization of trees. An arbitrary graph has been proved to be a tree if and only if it is isomorphic to the Hasse graph of some finite semilattice, with all subsemilattices being retracts.

***Keywords:*** semilattice, retract, semilattice with retracts, tree, Hasse graph of a finite order set

***Funding.*** The work was carried out with the support of the Russian Science Foundation, project 24-21-00117.

***For citation:*** Vechtomov E. M. Trees as Hasse graphs of finite semilattices with retracts. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 4−14. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_4

### 1. Введение. Исходные понятия

Статья посвящена теории полурешеток. Исследуются полурешетки с ретрактами, в которых, по определению, все подполурешетки являются ретрактами (теорема 1). Получены характеризации конечных полурешеток с ретрактами (теорема 2). Установлено, что деревья совпадают, с точностью до изоморфизма, с графами Хассе конечных полурешеток с ретрактами (теорема 3).

Напомним сначала некоторые базовые порядковые понятия [1–3].

*Упорядоченное множество* $\langle A, \leq \rangle$ — это непустое множество $A$ с заданным на нем бинарным отношением *порядка* $\leq$, которое $(x, y, z \in A)$ рефлексивно $(x \leq x)$, транзитивно $(x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ и антисимметрично $(x \leq y \leq x \Rightarrow x = y)$. Запись $x < y$ означает $x \leq y$ и $x \neq y$, $y \geq x$ $\Leftrightarrow x \leq y$ и $y > x \Leftrightarrow x < y$.

Элементы $x$ и $y$ упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ называются *сравнимыми*, если $x \leq y$ или $y \leq x$, в противном случае — *несравнимыми*.

Упорядоченное множество называется *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Цепь называется *дискретной*, если она изоморфна подцепи цепи $\mathbb{Z}$ всех целых чисел с естественным порядком.

Пусть $A$ — упорядоченное множество и $B$ — его непустое подмножество.

Элемент $a \in A$ называется:

*наименьшим* (*наибольшим*) в $A$, если $\forall x \in A\ a \leq x$ ($\forall x \in A\ x \leq a$);

*минимальным* (*максимальным*), если в $A$ нет элементов $x < a$ ($x > a$);

*нижней* (*верхней*) *гранью* множества $B$, если $\forall x \in B\ a \leq x$ ($\forall x \in B\ x \leq a$);

*точной нижней* (*точной верхней*) *гранью* множества $B$, если $a$ является наибольшим (наименьшим) элементом множества всех нижних (верхних) граней множества $B$, в обозначениях $a = \inf B$ ($a = \sup B$).

Непустое подмножество упорядоченного множества $A$ называется *ограниченным снизу* (*сверху*), если оно имеет нижнюю (верхнюю) грань в $A$.

Для элемента $a$ упорядоченного множества $A$ положим:

$(a] = \{x \in A : x \leq a\}$ — нижний конус элемента $a$;

$[a) = \{x \in A : x \geq a\}$ — верхний конус элемента $a$.

*Полурешеткой* называется идемпотентная коммутативная полугруппа $A$, которую будем обозначать аддитивно $\langle A, +\rangle$. Таким образом, $\langle A, +\rangle$ есть алгебраическая структура с одной бинарной операцией, удовлетворяющей тождествам ассоциативности $(x+y)+z = x+(y+z)$, коммутативности $x + y = y + x$ и идемпотентности $x + x = x$. Если на полурешетке $A$ ввести бинарное отношение $\leq$ по правилу: $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y$ для любых $x, y \in A$, то получим упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$, любые элементы $x$, $y$ которого имеют точную верхнюю грань, именно $\sup\{x, y\} = x + y$.

Упорядоченное множество, любые два элемента которого обладают точной верхней (точной нижней) гранью, называется *верхней* (*нижней*) *полурешеткой*. Если $\langle A, \leq\rangle$ — верхняя полурешетка, то $\langle A, +\rangle$ будет полурешеткой, если положить $x + y = \sup\{x, y\}$ для всех элементов $x, y \in A$. Тем самым понятия полурешетки и верхней полурешетки эквивалентны [2, глава I, параграф 1].

Можно считать произвольную полурешетку $A$ алгебраической системой $\langle A, +, \leq\rangle$, в которой операция сложения $+$ и отношение порядка $\leq$ связаны соотношениями $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y$ и $x + y = \sup\{x, y\}$ для любых $x, y \in A$, при этом неравенства можно почленно складывать: $x \leq y \,\&\, u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$ для всех $x, y, u, v \in A$. Наибольший (наименьший) элемент полурешетки $A$ часто обозначают 1 (соответственно, 0); элемент 1 (элемент 0) характеризуется условием $1 + x = 1$ ($0 + x = x$ соответственно) для всех $x \in A$.

Всякая конечная полурешетка обладает наибольшим элементом 1, равным сумме всех ее элементов. Если полурешетка имеет максимальный элемент, то он будет ее наибольшим элементом.

Отображение $f : A \to B$ полурешетки $A$ в полурешетку $B$ называется их *гомоморфизмом*, если $f(x+y) = f(x)+f(y)$ для любых элементов $x, y \in A$.

*Решеткой* называется алгебраическая структура $\langle A, +, \cdot \rangle$ такая, что $\langle A, + \rangle$ и $\langle A, \cdot \rangle$ — полурешетки и операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ связаны тождествами поглощения $x + xy = x$ и $x(x + y) = x$. При порядковом подходе *решеткой* называется верхняя полурешетка $\langle A, \leq \rangle$, в которой для любых элементов $x$, $y$ существует также точная нижняя грань $\inf\{x, y\}$. Алгебраическое и порядковое определения решетки равносильны [2, глава I, параграф 1]. Поэтому решетку $A$ также можно считать алгебраической системой $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$, в которой операции и порядок связаны соотношениями $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow xy = x$, $x + y = \sup\{x, y\}$ и $xy = \inf\{x, y\}$ для любых $x, y \in A$, причем неравенства можно почленно складывать и умножать.

Для непустых подмножеств $X$, $Y$ полурешетки $A$ положим $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$; при этом пишем $x + Y$, если $X = \{x\}$. Ясно, что $x + A = [x)$.

Непустое подмножество $B$ полурешетки $A$ называется:

*подполурешеткой*, если $B + B \subseteq B$;

*идеалом* (*главным идеалом*), если $B + A \subseteq B$ ($B = b + A$ для некоторого элемента $b \in B$, при этом $B = [b)$);

*простым идеалом*, если $B$ — собственный идеал ($B \neq A$) и $A \setminus B$ — подполурешетка;

*коидеалом* (*главным коидеалом*), если $B$ — подполурешетка и $(b] \subseteq B$ для любого элемента $b \in B$ ($B = (b]$ для некоторого $b \in B$);

*ретрактом*, если $B$ — подполурешетка в $A$ и существует такой гомоморфизм $f$ полурешетки $A$ на $B$, что $f(b) = b$ для всех $b \in B$; при этом гомоморфизм $f$ можно назвать *ретракцией* полурешетки $A$.

Полурешетку назовем *полурешеткой с ретрактами*, если любая ее подполурешетка является ретрактом.

Полурешетку назовем *древесной*, если верхний конус любого ее элемента является цепью. Заметим, что нижние полурешетки, в которых нижние конусы элементов суть цепи, рассматривались при изучении решеток конгруэнций нижних полурешеток в работе [4], где они названы «tree».

**Замечание 1.** Мы рассматриваем полугрупповые идеалы полурешеток. Существует другой подход — «решеточный» [2, глава II, параграф 3]. Именно, идеалом полурешетки $A$ называется непустое подмножество $B$ в $A$ такое, что $x+y \in B$ тогда и только тогда, когда $x, y \in B$, то есть под идеалами понимаются коидеалы. Такой подход применил Гретцер [2, глава II, параграф 5] для обобщения представления Стоуна дистрибутивных решеток. Для этого он ввел понятие *дистрибутивной полурешетки* как полурешетки $A$ с условием: для любых элементов $x, y, z \in A$ если $z \leq x+y$, то в $A$ найдутся такие элементы $u \leq x$ и $v \leq y$, что $z = u+v$.

Очевидно, для любого ненаибольшего элемента $a$ произвольной полурешетки $A$ множество $A_a = \{x \in A : \neg(x \leq a)\} = A \setminus (a]$ является простым идеалом в $A$.

Отношение эквивалентности $\rho$ на полурешетке $A$ называется *конгруэнцией* на $A$, если $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ для любых $a, b, c, d \in A$ (достаточно брать $c = d$). Классы $a/\rho = \{x \in A : x\rho a\}$, $a \in A$, конгруэнции $\rho$ на полурешетке $A$ образуют ее *фактор-полурешетку* $A/\rho$.

Легко видеть, что любой простой идеал $P$ полурешетки $A$ индуцирует на ней конгруэнцию $\rho(P)$ с двумя классами $P$ и $A \setminus P$ и фактор-полурешетка $A/\rho(P)$ будет двухэлементной цепью. Если $a$ — ненаибольший элемент полурешетки $A$, то разбиение $\{A_a, (a]\}$ определяет двухклассовую конгруэнцию $\rho_a$ на полурешетке $A$.

## 2. Вспомогательные утверждения

Докажем ряд лемм.

**Лемма 1.** *Если $B$ — подполурешетка полурешетки $A$ и $\rho$ — конгруэнция на $A$, любой класс которой содержит ровно один элемент из $B$, то $B$ — ретракт полурешетки $A$.*

В самом деле, сопоставляя каждому классу $C$ конгруэнции $\rho$ единственный элемент $c \in C \cap B$, получим ретракцию полурешетки $A$, образом которой служит подполурешетка $B$.

Следующая лемма очевидна.

**Лемма 2.** *Каждая подполурешетка полурешетки с ретрактами является полурешеткой с ретрактами.*

**Лемма 3.** *Конгруэнции $\rho_a$ на любой неодноэлементной полурешетке $A$ разделяют ее элементы.*

Действительно, для любых элементов $x \neq y$ из $A$ либо $\neg(x \leq y)$, либо $\neg(y \leq x)$. Поэтому элементы $x$, $y$ разделяет конгруэнция $\rho_y$ в первом случае и конгруэнция $\rho_x$ во втором случае.

**Лемма 4.** *Любая древесная полурешетка $A$, в которой все цепи дискретны, обладает следующими свойствами*:

(1) *если подполурешетка $B$ полурешетки $A$ ограничена сверху, то $B$ имеет наибольший элемент*;

(2) *если цепь $Z$ в полурешетке $A$ не ограничена сверху* (*снизу*), *то* $\bigcup\{(z] : z \in Z\} = A$ ($\bigcap\{(z] : z \in Z\} = \varnothing$ *соответственно*);

(3) *нижние конусы любых двух несравнимых элементов полурешетки $A$ не пересекаются.*

*Доказательство.* (1) Пусть $a$ — верхняя грань множества $B$ и $b \in B$. Рассмотрим верхний конус $[b)$. Тогда $[b)$ — дискретная цепь и $[b) \cap B \subseteq (a]$. Поэтому множество $[b) \cap B$ имеет наибольший элемент $m$. Если $x \in B$, то $x + m \in [b) \cap B$, $x + m = m$ и $x \leq m$. Значит, $m$ является наибольшим элементом множества $B$.

(2) Предположим сначала, что цепь $Z$ не ограничена сверху и $b \in Z$. Дискретная цепь $[b) \cap Z$ также не ограничена сверху. Возьмем элемент $a \in A$. Легко видеть, что для элемента $a$ найдется элемент $z \in Z$, больший элемента $a + b$. Значит, $a \in (z]$.

Если же цепь $Z$ не ограничена снизу, $b \in Z$ и $a \in \bigcap\{(z] : z \in Z\}$, то $a$ будет нижней гранью строго убывающей дискретной цепи $(b] \cap Z$, что невозможно.

(3) Если $a$, $b$ — несравнимые элементы полурешетки $A$ и $c \in (a] \cap (b]$, то верхний конус $(c]$ не будет цепью, противоречие. □

При доказательстве теоремы 1 нам понадобится следующий результат.

**Лемма 5** [5, теорема 2]. *Цепи с ретрактами суть в точности дискретные цепи.*

**3. Основные результаты**

Сначала докажем утверждение общего характера.

**Теорема 1.** *Произвольная полурешетка $A$ является полурешеткой с ретрактами тогда и только тогда, когда $A$ — древесная полурешетка и все цепи в ней дискретные.*

*Доказательство.* Пусть $A$ — полурешетка с ретрактами. Предположим от противного, что множество $[a)$, $a \in A$, содержит несравнимые элементы $b$ и $c$. Рассмотрим в $A$ подполурешетку $\{b, c, b + c\}$. Она будет ретрактом полурешетки $A$ — образом соответствующего идемпотентного эндоморфизма $f$. Поскольку $f(a) \in \{b, c, b + c\}$, $a < b$ и $a < c$, то $f(a) \leq b$ и $f(a) \leq c$, что невозможно. Значит, для любого $a \in A$ множество $\{x \in A : a \leq x\}$ будет цепью в $A$. По лемме 2 всякая цепь $B$ в полурешетке $A$ является полурешеткой с ретрактами, что в силу леммы 5 означает дискретность цепи $B$.

Обратно, пусть $A$ — древесная полурешетка, все цепи в которой дискретные. Возьмем произвольную подполурешетку $B$ в полурешетке $A$, которую можно считать неодноэлементной.

Для любого элемента $b \in B$, не являющегося наибольшим элементом в $B$, рассмотрим конгруэнцию $\rho_b$ на полурешетке $A$. Пусть $\rho$ — пересечение всех таких конгруэнций $\rho_b$. Покажем, что каждый класс конгруэнции $\rho$ содержит ровно один элемент из $B$. Тогда, в силу леммы 1, $B$ будет ретрактом полурешетки $A$.

По лемме 3 конгруэнции $\rho_b$ на полурешетке $A$, $b$ — ненаибольший элемент из полурешетки $B$, разделяют элементы $B$. Поэтому ограничение конгруэнции $\rho$ на $B$ есть отношение равенства на $B$.

Произвольный класс $C$ конгруэнции $\rho$ есть непустое множество, являющееся пересечением множеств $A_b$ для всех $b$ из некоторого множества $X \subseteq B$ и множеств $(b]$ для всех $b$ из множества $Y = B \setminus X$.

Возможен один из следующих трех случаев.

a) $X = \varnothing$. Тогда $Y \neq \varnothing$ и $C = \bigcap\{(b] : b \in Y\} \neq \varnothing$. По лемме 4(3) множество $Y$ является цепью в $A$. В силу леммы 4(2) дискретная цепь $Y$ ограничена снизу, стало быть, обладает наименьшим элементом $m$. Поэтому $C \cap A = \{m\}$.

b) $Y = \varnothing$. Тогда $X \neq \varnothing$ и $C = \bigcap\{A_b : b \in X\}$. Если подполурешетка $B$ имеет наибольший элемент $m$, то $m \in C$ и $C \cap B = \{m\}$. Пусть $B$ не обладает наибольшим элементом. По лемме 4(1) подрешетка $B$ не ограничена сверху. Допустим от противного, что $C \cap B = \varnothing$. Тогда каждый элемент из $B$ принадлежит нижнему конусу некоторого элемента из $X$. Значит, множество $X$ также не ограничено сверху и, очевидно, содержит цепь $Z$, не ограниченную сверху. По лемме 4(2) $A = \bigcup\{(z] : z \in Z\}$. Следовательно, по закону де Моргана $\bigcap\{A_b : b \in Z\} = \varnothing$, откуда $C = \varnothing$, противоречие.

c) $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Как и в случае a), $Y$ будет цепью с наименьшим элементом $m$. Тогда $\varnothing \neq C = \bigcap\{A_b : b \in X\} \cap (m]$ содержит элемент $m$, поскольку $\{A_b : b \in X\}$ — идеал полурешетки $A$. Значит, $C \cap B = \{m\}$.

Теорема доказана. □

Напомним, что *деревом* называется связный неориентированный граф без циклов [6, параграф 2.1].

Любое конечное упорядоченное множество $X$ изображается в виде *диаграммы Хассе* (см., например, [3, параграф 2.2]). Диаграмма Хассе для $X$ представляет собой ориентированный граф, в котором элементы (вершины) $a$ и $b$ из $X$ соединены дугой тогда и только тогда, когда $a < b$ и интервал $[a,\ b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ не содержит элементов, отличных от $a$ и $b$.

Диаграмму Хассе конечного упорядоченного множества, рассматриваемую как неориентированный граф, назовем *графом Хассе* данного упорядоченного множества.

**Теорема 2.** *Для любой конечной полурешетки $A$ эквивалентны следующие условия*:

1) $A$ — *полурешетка с ретрактами*;

2) $A$ — *древесная полурешетка*;

3) *граф Хассе полурешетки $A$ является деревом.*

*Доказательство.* Эквивалентность условий 1) и 2) является следствием теоремы 1.

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим граф Хассе $H$ конечной древесной полурешетки $A$. Поскольку $A$ имеет 1, то граф $H$ связный. Отсутствие в $H$ циклов установим индукцией по числу $n$ элементов полурешетки $A$. Можно считать $n \geq 2$. Предположим от противного, что граф $H$ содержит цикл $C$. Возьмем любой минимальный элемент $a$ полурешетки $A$. Если $a \notin C$, то полурешетка $A \setminus \{a\}$, имеющая $n-1$ элемент, содержит цикл $C$, что противоречит индуктивному предположению. Если же $a \in C$, то с учетом того, что верхний конус $[a)$ является цепью в $A$, стало быть, из $a$ выходит ровно одно ребро, заключаем: $C$ не может быть циклом в $H$.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть для конечной полурешетки $A$ выполнено условие 3) и $a \in A$. Если элементы $b, c \in [a)$ несравнимы, то получаем цикл, содержащий множество $\{a, b, c, b + c\}$, что невозможно. Значит, $[a)$ — цепь, и $A$ — древесная полурешетка.

Теорема доказана. $\square$

Теперь можно получить критерий для графа быть деревом.

**Теорема 3.** *Для того чтобы произвольный граф являлся деревом, необходимо и достаточно, чтобы он был изоморфен графу Хассе некоторой конечной полурешетки с ретрактами.*

*Доказательство. Достаточность* вытекает из эквивалентности условий 1) и 3) теоремы 2.

*Необходимость.* Покажем, что любое дерево $A$ является графом Хассе полурешетки $A$ с ретрактами и произвольно заданной вершиной в качестве наибольшего элемента. Проведем рассуждение индукцией по числу $n$ вершин дерева $A$. Если $n = 1$ или $n = 2$, то $A$ будет неориентированным графом Хассе одноэлементной полурешетки или двухэлементной цепи соответственно.

Предположим, что $n \geq 3$ и для любого натурального числа $m < n$ все $m$-элементные деревья являются графами Хассе подходящих полурешеток. Возьмем произвольную вершину $a$ дерева $A$ и рассмотрим все ребра $aa_1, \ldots, aa_k$ графа $A$, выходящие из $a$. Удалив из $A$ только одну вершину $a$ и указанные ребра, получим, как легко видеть, граф, имеющий в точности компоненты связности $A_1, \ldots, A_k$, содержащие вершины $a_1, \ldots, a_k$ соответственно. Очевидно, что подграфы $A_1, \ldots, A_k$ дерева $A$ также будут деревьями, причем имеющими менее $n$ вершин. По индуктивному предположению деревья $A_1, \ldots, A_k$ являются графами Хассе полурешеток $\langle A_1, \leq \rangle, \ldots, \langle A_k, \leq \rangle$ с наибольшими элементами $a_1, \ldots, a_k$ соответственно. Полагая $a_1 < a, \ldots, a_k < a$, получаем полурешетку $\langle A, \leq \rangle$ с наибольшим элементом $a$, граф Хассе которой совпадает с деревом $A$. Остается снова применить теорему 2.

Теорема доказана. $\square$

**Замечание 2.** С точностью до изоморфизма, одно и то же дерево может быть получено из неизоморфных древесных полурешеток. Например, трехэлементная цепь и трехэлементная полурешетка с двумя минимальными элементами имеют один и тот же граф Хассе.

## Список источников

1. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

2. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1981. 456 с.

3. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Упорядоченные множества и решетки. СПб.: Лань, 2024. 248 с.

4. **Hamilton H. B.** Semilattices whose structure lattice is distributive // *Semigroup Forum*, 1974. Vol. 8. No 1. Pp. 245–253.

5. **Фофанова Т. С.** О ретрактах структуры // *Математические заметки.* 1970. Т. 7. Вып. 6. С. 687–692.

6. **Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб.: Лань, 2010, 368 с.

## References

1. **Birkhoff G.** *Teoriya reshetok* [Lattice Theory]. Moscow: Science, 1984. 568 p. (In Russ.)

2. **Gretzer, G.** *Obshchaya teoriya reshetok* [General Lattice Theory]. Moscow: Publishing House of the World, 1981. 456 p. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki* [Ordered Sets and Lattices]. St. Petersburg: Lan', 2024. 248 p. (In Russ.)

4. **Hamilton H. B.** Semilattices Whose Structure Lattice is Distributive. *Semigroup Forum*, 1974. Vol. 8. No 1. Pp. 245–253.

5. **Fofanova T. S.** On Structure Retracts. *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes]. 1970. Vol. 7. Issue 6. Pp. 687–692. (In Russ.)

6. **Asanov M. O., Baransky V. A., Rasin V. V.** *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms]. St. Petersburg: Lan', 2010. 368 pp. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeny M. Vechtomov
д.ф.-м.н., профессор, научный сотрудник / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Research Fellow
Вятский государственный университет / Vyatka State University
Россия, 610000, Киров, ул. Московская, д. 36 / 36, Moskovskaya St., Kirov, 610000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 30.11.2025
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 03.12.2025
Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025