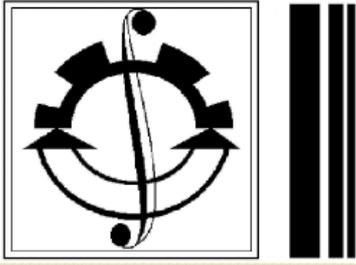


ISSN 1992-2752



# Вестник Сыктывкарского университета

*Серия 1:*  
Математика  
Механика  
Информатика

**4(57)** ВЫПУСК **25**

|  |  |  |
|--|--|--|
| Вестник<br>Сыктывкарского<br>университета<br>Основан в 1995 году<br>Выходит 4 раза в год | Серия 1:<br><i>Математика</i><br><i>Механика</i><br><i>Информатика</i> | 12+<br>ISSN 1992-2752<br>Выпуск 4 (57)<br>2025 |
|--|--|--|

**Учредитель и издатель:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

**Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года**

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2025. — 4 (57). 2025. — 94 с.

#### **Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.**

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по направлению «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

Журнал также публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)».

#### **The peer-reviewed journal was founded in 1995**

«Bulletin of Syktvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is in the list of peer-reviewed scientific journals which publish the main scientific results of dissertations for the scientific degree of Candidate of Sciences, for the scientific degree of Doctor of Sciences, in the direction «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)»

The journal also publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)»

*Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.*

АДРЕС РЕДАКЦИИ  
167001, РЕСПУБЛИКА КОМИ, г. СЫКТЫВКАР, ОКТЯБРЬСКИЙ ПРОСП., д. 55  
ТЕЛ. (8212)390-308.

ЭЛЕКТРОННЫЙ АДРЕС: [HTTP://VESTNIK-MMI.SYKTSU.RU/](http://vestnik-mm1.syktso.ru/)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

д.пед.н., доцент, ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»  
Сотникова О. А.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР:

Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой  
(СГУ им. Питирима Сорокина)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Аббасов М. Э., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)  
Беляева Н. А., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)  
Вечтомов Е. М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой (ВятГУ)  
Головач П. А., к.ф.-м.н., доцент, исследователь (Университет Бергена, Норвегия)  
Григорьев С. Г., член-корреспондент РАО, д.т.н., профессор, профессор (МГПУ)  
Дворяткина С. Н., д.пед.н., доцент, профессор (ЕГУ им. И. А. Бунина)  
Дорофеев С. Н., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ТолГУ)  
Калинин С. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ВятГУ)  
Колесников Г. Н., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)  
Колпак Е. П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ)  
Крылатов А. Ю., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)  
Махнев А. А., член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, главный научный  
сотрудник (ИММ УрО РАН)  
Одинец В. П., д.ф.-м.н., профессор  
Орлов В. В., д.пед.н., профессор, профессор (Российский государственный  
педагогический университет им. А. И. Герцена)  
Парилина Е. М., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)  
Певный А. Б., д.ф.-м.н., профессор  
Петров Н. Н., д.ф.-м.н., профессор, профессор (УдмГУ)  
Петраков А. П., д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой  
(СГУ им. Питирима Сорокина)  
Питухин Е. А., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)  
Попов Н. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой  
(СГУ им. Питирима Сорокина)  
Рудикова-Фронхёфер Л. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой  
(ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь)  
Тихомиров А. Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник  
(Коми НЦ УрО РАН)  
Чермных В. В., д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник  
(СГУ им. Питирима Сорокина)  
Щербатых С.В., д.пед.н., профессор, ректор ЕГУ им. И. А. Бунина

ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕДАКЦИЯ:

Руденко Л. Н., начальник редакционно-издательского отдела  
(СГУ им. Питирима Сорокина)  
Котелина Н. О., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)  
Мазур В. В., к.г.н., преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)  
Старцева Е. Н., ст. преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)

## Содержание

### Математика

- Вечтомов Е. М. *Деревья как графы Хассе конечных полурешеток с ретрактами* . . . . . 4

### Прикладная математика и механика

- Чернов В. Г. *Решение конфликтной ситуации с лингвистическими оценками параметров* . . . . . 15

### Информатика

- Гольчевский Ю. В., Захаров И. Д. *Анализ развития систем управления базами данных* . . . . . 38

### Математическое образование

- Сушков В. В. *Фундаментализация математического образования в контексте вызовов цифровой трансформации: теоретико-методический аспект* . . . . . 59

### Методические материалы

- Бабикина Н. Н., Котелина Н. О. *Сравнительный анализ алгоритмов речевого интеллекта: GWO и ChOA* . . . . . 73

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.*

*Выпуск 4 (57)*

*Bulletin of Syktovkar University.*

*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)*

Научная статья

УДК 512.558

[https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_4](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_4)

## ДЕРЕВЬЯ КАК ГРАФЫ ХАССЕ КОНЕЧНЫХ ПОЛУРЕШЕТОК С РЕТРАКТАМИ

**Евгений Михайлович Вечтомов**

Вятский государственный университет, [vecht@mail.ru](mailto:vecht@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматриваются элементы теории полурешеток. Главный результат работы — полурешеточная характеристика деревьев. Именно доказано, что произвольный граф является деревом тогда и только тогда, когда он изоморфен графу Хассе некоторой конечной полурешетки, все подполурешетки которой — ретракты.

**Ключевые слова:** полурешетка, ретракт, полурешетка с ретрактами, дерево, граф Хассе конечного упорядоченного множества

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

**Для цитирования:** Вечтомов Е. М. Деревья как графы Хассе конечных полурешеток с ретрактами // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2025. Вып. 4 (57). С. 4–14. [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_4](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_4)

Article

## TREES AS HASSE GRAPHS OF FINITE SEMILATTICES WITH RETRACTS

**Evgeny M. Vechtomov**

Vyatka State University, vecht@mail.ru

**Abstract.** The article considers the elements of the semilattices theory. The main result of the work is a semilattice characterization of trees. An arbitrary graph has been proved to be a tree if and only if it is isomorphic to the Hasse graph of some finite semilattice, with all subsemilattices being retracts.

**Keywords:** semilattice, retract, semilattice with retracts, tree, Hasse graph of a finite order set

**Funding.** The work was carried out with the support of the Russian Science Foundation, project 24-21-00117.

**For citation:** Vechtomov E. M. Trees as Hasse graphs of finite semilattices with retracts. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 4–14. (In Russ.) [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_4](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_4)

### 1. Введение. Исходные понятия

Статья посвящена теории полурешеток. Исследуются полурешетки с ретрактами, в которых, по определению, все подполурешетки являются ретрактами (теорема 1). Получены характеристики конечных полурешеток с ретрактами (теорема 2). Установлено, что деревья совпадают, с точностью до изоморфизма, с графами Хассе конечных полурешеток с ретрактами (теорема 3).

Напомним сначала некоторые базовые порядковые понятия [1–3].

Упорядоченное множество  $\langle A, \leq \rangle$  — это непустое множество  $A$  с заданным на нем бинарным отношением *порядка*  $\leq$ , которое  $(x, y, z \in A)$  рефлексивно ( $x \leq x$ ), транзитивно ( $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ) и антисимметрично ( $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$ ). Запись  $x < y$  означает  $x \leq y$  и  $x \neq y$ ,  $y \geq x \Leftrightarrow x \leq y$  и  $y > x \Leftrightarrow x < y$ .

Элементы  $x$  и  $y$  упорядоченного множества  $\langle A, \leq \rangle$  называются *сравнимыми*, если  $x \leq y$  или  $y \leq x$ , в противном случае — *несравнимыми*.

Упорядоченное множество называется *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Цепь называется *дискретной*, если она изоморфна подцепи цепи  $\mathbb{Z}$  всех целых чисел с естественным порядком.

Пусть  $A$  — упорядоченное множество и  $B$  — его непустое подмножество.

Элемент  $a \in A$  называется:

*наименьшим (наибольшим)* в  $A$ , если  $\forall x \in A a \leq x$  ( $\forall x \in A x \leq a$ );

*минимальным (максимальным)*, если в  $A$  нет элементов  $x < a$  ( $x > a$ );

*нижней (верхней) гранью* множества  $B$ , если  $\forall x \in B a \leq x$  ( $\forall x \in B x \leq a$ );

*точной нижней (точной верхней) гранью* множества  $B$ , если  $a$  является наибольшим (наименьшим) элементом множества всех нижних (верхних) граней множества  $B$ , в обозначениях  $a = \inf B$  ( $a = \sup B$ ).

Непустое подмножество упорядоченного множества  $A$  называется *ограниченным снизу (сверху)*, если оно имеет нижнюю (верхнюю) грань в  $A$ .

Для элемента  $a$  упорядоченного множества  $A$  положим:

$\langle a \rangle = \{x \in A : x \leq a\}$  — нижний конус элемента  $a$ ;

$\langle a \rangle = \{x \in A : x \geq a\}$  — верхний конус элемента  $a$ .

*Полурешеткой* называется идемпотентная коммутативная полугруппа  $A$ , которую будем обозначать аддитивно  $\langle A, + \rangle$ . Таким образом,  $\langle A, + \rangle$  есть алгебраическая структура с одной бинарной операцией, удовлетворяющей тождествам ассоциативности  $(x+y)+z = x+(y+z)$ , коммутативности  $x+y = y+x$  и идемпотентности  $x+x = x$ . Если на полурешетке  $A$  ввести бинарное отношение  $\leq$  по правилу:  $x \leq y \Leftrightarrow x+y = y$  для любых  $x, y \in A$ , то получим упорядоченное множество  $\langle A, \leq \rangle$ , любые элементы  $x, y$  которого имеют точную верхнюю грань, именно  $\sup\{x, y\} = x+y$ .

Упорядоченное множество, любые два элемента которого обладают точной верхней (точной нижней) гранью, называется *верхней (нижней) полурешеткой*. Если  $\langle A, \leq \rangle$  — верхняя полурешетка, то  $\langle A, + \rangle$  будет полурешеткой, если положить  $x+y = \sup\{x, y\}$  для всех элементов  $x, y \in A$ . Тем самым понятия полурешетки и верхней полурешетки эквивалентны [2, глава I, параграф 1].

Можно считать произвольную полурешетку  $A$  алгебраической системой  $\langle A, +, \leq \rangle$ , в которой операция сложения  $+$  и отношение порядка  $\leq$  связаны соотношениями  $x \leq y \Leftrightarrow x+y = y$  и  $x+y = \sup\{x, y\}$  для

любых  $x, y \in A$ , при этом неравенства можно почленно складывать:  $x \leq y \& u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$  для всех  $x, y, u, v \in A$ . Наибольший (наименьший) элемент полурешетки  $A$  часто обозначают  $1$  (соответственно,  $0$ ); элемент  $1$  (элемент  $0$ ) характеризуется условием  $1 + x = 1$  ( $0 + x = x$  соответственно) для всех  $x \in A$ .

Всякая конечная полурешетка обладает наибольшим элементом  $1$ , равным сумме всех ее элементов. Если полурешетка имеет максимальный элемент, то он будет ее наибольшим элементом.

Отображение  $f : A \rightarrow B$  полурешетки  $A$  в полурешетку  $B$  называется их *гомоморфизмом*, если  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  для любых элементов  $x, y \in A$ .

*Решеткой* называется алгебраическая структура  $\langle A, +, \cdot \rangle$  такая, что  $\langle A, + \rangle$  и  $\langle A, \cdot \rangle$  — полурешетки и операции сложения  $+$  и умножения  $\cdot$  связаны тождествами поглощения  $x + xy = x$  и  $x(x + y) = x$ . При порядковом подходе *решеткой* называется верхняя полурешетка  $\langle A, \leq \rangle$ , в которой для любых элементов  $x, y$  существует также точная нижняя грань  $\inf\{x, y\}$ . Алгебраическое и порядковое определения решетки равносильны [2, глава I, параграф 1]. Поэтому решетку  $A$  также можно считать алгебраической системой  $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$ , в которой операции и порядок связаны соотношениями  $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow xy = x$ ,  $x + y = \sup\{x, y\}$  и  $xy = \inf\{x, y\}$  для любых  $x, y \in A$ , причем неравенства можно почленно складывать и умножать.

Для непустых подмножеств  $X, Y$  полурешетки  $A$  положим  $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ ; при этом пишем  $x + Y$ , если  $X = \{x\}$ . Ясно, что  $x + A = [x]$ .

Непустое подмножество  $B$  полурешетки  $A$  называется:

*подполурешеткой*, если  $B + B \subseteq B$ ;

*идеалом* (*главным идеалом*), если  $B + A \subseteq B$  ( $B = b + A$  для некоторого элемента  $b \in B$ , при этом  $B = [b]$ );

*простым идеалом*, если  $B$  — собственный идеал ( $B \neq A$ ) и  $A \setminus B$  — подполурешетка;

*коидеалом* (*главным коидеалом*), если  $B$  — подполурешетка и  $(b] \subseteq B$  для любого элемента  $b \in B$  ( $B = (b]$  для некоторого  $b \in B$ );

*ретрактом*, если  $B$  — подполурешетка в  $A$  и существует такой гомоморфизм  $f$  полурешетки  $A$  на  $B$ , что  $f(b) = b$  для всех  $b \in B$ ; при этом гомоморфизм  $f$  можно назвать *ретракцией* полурешетки  $A$ .

Полурешетку назовем *полурешеткой с ретрактами*, если любая ее подполурешетка является ретрактом.

Полурешетку назовем *древесной*, если верхний конус любого ее элемента является цепью. Заметим, что нижние полурешетки, в которых нижние конусы элементов суть цепи, рассматривались при изучении решеток конгруэнций нижних полурешеток в работе [4], где они названы «tree».

**Замечание 1.** Мы рассматриваем полугрупповые идеалы полурешеток. Существует другой подход — «решеточный» [2, глава II, параграф 3]. Именно, идеалом полурешетки  $A$  называется непустое подмножество  $B$  в  $A$  такое, что  $x + y \in B$  тогда и только тогда, когда  $x, y \in B$ , то есть под идеалами понимаются коидеалы. Такой подход применил Гретцер [2, глава II, параграф 5] для обобщения представления Стоуна дистрибутивных решеток. Для этого он ввел понятие *дистрибутивной полурешетки* как полурешетки  $A$  с условием: для любых элементов  $x, y, z \in A$  если  $z \leq x + y$ , то в  $A$  найдутся такие элементы  $u \leq x$  и  $v \leq y$ , что  $z = u + v$ .

Очевидно, для любого наименьшего элемента  $a$  произвольной полурешетки  $A$  множество  $A_a = \{x \in A : \neg(x \leq a)\} = A \setminus (a]$  является простым идеалом в  $A$ .

Отношение эквивалентности  $\rho$  на полурешетке  $A$  называется *конгруэнцией* на  $A$ , если  $a\rho b$  и  $c\rho d$  влекут  $(a+c)\rho(b+d)$  для любых  $a, b, c, d \in A$  (достаточно брать  $c = d$ ). Классы  $a/\rho = \{x \in A : x\rho a\}$ ,  $a \in A$ , конгруэнции  $\rho$  на полурешетке  $A$  образуют ее *фактор-полурешетку*  $A/\rho$ .

Легко видеть, что любой простой идеал  $P$  полурешетки  $A$  индуцирует на ней конгруэнцию  $\rho(P)$  с двумя классами  $P$  и  $A \setminus P$  и фактор-полурешетка  $A/\rho(P)$  будет двухэлементной цепью. Если  $a$  — наименьший элемент полурешетки  $A$ , то разбиение  $\{A_a, (a)\}$  определяет двухклассовую конгруэнцию  $\rho_a$  на полурешетке  $A$ .

## 2. Вспомогательные утверждения

Докажем ряд лемм.

**Лемма 1.** *Если  $B$  — подполурешетка полурешетки  $A$  и  $\rho$  — конгруэнция на  $A$ , любой класс которой содержит ровно один элемент из  $B$ , то  $B$  — ретракт полурешетки  $A$ .*

В самом деле, сопоставляя каждому классу  $C$  конгруэнции  $\rho$  единственный элемент  $c \in C \cap B$ , получим ретракцию полурешетки  $A$ , образом которой служит подполурешетка  $B$ .

Следующая лемма очевидна.

**Лемма 2.** *Каждая подполурешетка полурешетки с ретрактами является полурешеткой с ретрактами.*

**Лемма 3.** *Конгруэнции  $\rho_a$  на любой неодноэлементной полурешетке  $A$  разделяют ее элементы.*

Действительно, для любых элементов  $x \neq y$  из  $A$  либо  $\neg(x \leq y)$ , либо  $\neg(y \leq x)$ . Поэтому элементы  $x, y$  разделяет конгруэнция  $\rho_y$  в первом случае и конгруэнция  $\rho_x$  во втором случае.

**Лемма 4.** *Любая древесная полурешетка  $A$ , в которой все цепи дискретны, обладает следующими свойствами:*

- (1) *если подполурешетка  $B$  полурешетки  $A$  ограничена сверху, то  $B$  имеет наибольший элемент;*
- (2) *если цепь  $Z$  в полурешетке  $A$  не ограничена сверху (снизу), то  $\bigcup\{[z] : z \in Z\} = A$  ( $\bigcap\{[z] : z \in Z\} = \emptyset$  соответственно);*
- (3) *нижние конусы любых двух несравнимых элементов полурешетки  $A$  не пересекаются.*

*Доказательство.* (1) Пусть  $a$  — верхняя грань множества  $B$  и  $b \in B$ . Рассмотрим верхний конус  $[b]$ . Тогда  $[b]$  — дискретная цепь и  $[b] \cap B \subseteq [a]$ . Поэтому множество  $[b] \cap B$  имеет наибольший элемент  $t$ . Если  $x \in B$ , то  $x + t \in [b] \cap B$ ,  $x + t = t$  и  $x \leq t$ . Значит,  $t$  является наибольшим элементом множества  $B$ .

(2) Предположим сначала, что цепь  $Z$  не ограничена сверху и  $b \in Z$ . Дискретная цепь  $[b] \cap Z$  также не ограничена сверху. Возьмем элемент  $a \in A$ . Легко видеть, что для элемента  $a$  найдется элемент  $z \in Z$ , больший элемента  $a + b$ . Значит,  $a \in [z]$ .

Если же цепь  $Z$  не ограничена снизу,  $b \in Z$  и  $a \in \bigcap\{[z] : z \in Z\}$ , то  $a$  будет нижней гранью строго убывающей дискретной цепи  $[b] \cap Z$ , что невозможно.

(3) Если  $a, b$  — несравнимые элементы полурешетки  $A$  и  $c \in [a] \cap [b]$ , то верхний конус  $[c]$  не будет цепью, противоречие.  $\square$

При доказательстве теоремы 1 нам понадобится следующий результат.

**Лемма 5** [5, теорема 2]. *Цепи с ретрактами суть в точности дискретные цепи.*

### 3. Основные результаты

Сначала докажем утверждение общего характера.

**Теорема 1.** *Произвольная полурешетка  $A$  является полурешеткой с ретрактами тогда и только тогда, когда  $A$  — древесная полурешетка и все цепи в ней дискретные.*

*Доказательство.* Пусть  $A$  — полурешетка с ретрактами. Предположим от противного, что множество  $[a]$ ,  $a \in A$ , содержит несравнимые элементы  $b$  и  $c$ . Рассмотрим в  $A$  подполурешетку  $\{b, c, b + c\}$ . Она будет ретрактом полурешетки  $A$  — образом соответствующего идемпотентного эндоморфизма  $f$ . Поскольку  $f(a) \in \{b, c, b + c\}$ ,  $a < b$  и  $a < c$ , то  $f(a) \leq b$  и  $f(a) \leq c$ , что невозможно. Значит, для любого  $a \in A$  множество  $\{x \in A : a \leq x\}$  будет цепью в  $A$ . По лемме 2 всякая цепь  $V$  в полурешетке  $A$  является полурешеткой с ретрактами, что в силу леммы 5 означает дискретность цепи  $V$ .

Обратно, пусть  $A$  — древесная полурешетка, все цепи в которой дискретные. Возьмем произвольную подполурешетку  $B$  в полурешетке  $A$ , которую можно считать неодноэлементной.

Для любого элемента  $b \in B$ , не являющегося наибольшим элементом в  $B$ , рассмотрим конгруэнцию  $\rho_b$  на полурешетке  $A$ . Пусть  $\rho$  — пересечение всех таких конгруэнций  $\rho_b$ . Покажем, что каждый класс конгруэнции  $\rho$  содержит ровно один элемент из  $B$ . Тогда, в силу леммы 1,  $B$  будет ретрактом полурешетки  $A$ .

По лемме 3 конгруэнции  $\rho_b$  на полурешетке  $A$ ,  $b$  — ненаибольший элемент из полурешетки  $B$ , разделяют элементы  $B$ . Поэтому ограничение конгруэнции  $\rho$  на  $B$  есть отношение равенства на  $B$ .

Произвольный класс  $C$  конгруэнции  $\rho$  есть непустое множество, являющееся пересечением множеств  $A_b$  для всех  $b$  из некоторого множества  $X \subseteq B$  и множеств  $(b]$  для всех  $b$  из множества  $Y = B \setminus X$ .

Возможен один из следующих трех случаев.

а)  $X = \emptyset$ . Тогда  $Y \neq \emptyset$  и  $C = \bigcap \{(b) : b \in Y\} \neq \emptyset$ . По лемме 4(3) множество  $Y$  является цепью в  $A$ . В силу леммы 4(2) дискретная цепь  $Y$  ограничена снизу, стало быть, обладает наименьшим элементом  $m$ . Поэтому  $C \cap A = \{m\}$ .

б)  $Y = \emptyset$ . Тогда  $X \neq \emptyset$  и  $C = \bigcap \{A_b : b \in X\}$ . Если подполурешетка  $B$  имеет наибольший элемент  $m$ , то  $m \in C$  и  $C \cap B = \{m\}$ . Пусть  $B$  не обладает наибольшим элементом. По лемме 4(1) подрешетка  $B$  не ограничена сверху. Допустим от противного, что  $C \cap B = \emptyset$ . Тогда каждый

элемент из  $B$  принадлежит нижнему конусу некоторого элемента из  $X$ . Значит, множество  $X$  также не ограничено сверху и, очевидно, содержит цепь  $Z$ , не ограниченную сверху. По лемме 4(2)  $A = \bigcup\{[z] : z \in Z\}$ . Следовательно, по закону де Моргана  $\bigcap\{A_b : b \in Z\} = \emptyset$ , откуда  $C = \emptyset$ , противоречие.

с)  $X \neq \emptyset$  и  $Y \neq \emptyset$ . Как и в случае а),  $Y$  будет цепью с наименьшим элементом  $m$ . Тогда  $\emptyset \neq C = \bigcap\{A_b : b \in X\} \cap [m]$  содержит элемент  $m$ , поскольку  $\{A_b : b \in X\}$  — идеал полурешетки  $A$ . Значит,  $C \cap B = \{m\}$ .

Теорема доказана.  $\square$

Напомним, что *деревом* называется связный неориентированный граф без циклов [6, параграф 2.1].

Любое конечное упорядоченное множество  $X$  изображается в виде *диаграммы Хассе* (см., например, [3, параграф 2.2]). Диаграмма Хассе для  $X$  представляет собой ориентированный граф, в котором элементы (вершины)  $a$  и  $b$  из  $X$  соединены дугой тогда и только тогда, когда  $a < b$  и интервал  $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$  не содержит элементов, отличных от  $a$  и  $b$ .

Диаграмму Хассе конечного упорядоченного множества, рассматриваемую как неориентированный граф, назовем *графом Хассе* данного упорядоченного множества.

**Теорема 2.** *Для любой конечной полурешетки  $A$  эквивалентны следующие условия:*

- 1)  $A$  — полурешетка с ретрактами;
- 2)  $A$  — древесная полурешетка;
- 3) граф Хассе полурешетки  $A$  является деревом.

*Доказательство.* Эквивалентность условий 1) и 2) является следствием теоремы 1.

2)  $\Rightarrow$  3). Рассмотрим граф Хассе  $H$  конечной древесной полурешетки  $A$ . Поскольку  $A$  имеет 1, то граф  $H$  связный. Отсутствие в  $H$  циклов установим индукцией по числу  $n$  элементов полурешетки  $A$ . Можно считать  $n \geq 2$ . Предположим от противного, что граф  $H$  содержит цикл  $C$ . Возьмем любой минимальный элемент  $a$  полурешетки  $A$ . Если  $a \notin C$ , то полурешетка  $A \setminus \{a\}$ , имеющая  $n - 1$  элемент, содержит цикл  $C$ , что противоречит индуктивному предположению. Если же  $a \in C$ , то с учетом того, что верхний конус  $[a]$  является цепью в  $A$ , стало быть, из  $a$  выходит ровно одно ребро, заключаем:  $C$  не может быть циклом в  $H$ .

3)  $\Rightarrow$  2). Пусть для конечной полурешетки  $A$  выполнено условие 3) и  $a \in A$ . Если элементы  $b, c \in [a)$  несравнимы, то получаем цикл, содержащий множество  $\{a, b, c, b + c\}$ , что невозможно. Значит,  $[a)$  — цепь, и  $A$  — древесная полурешетка.

Теорема доказана.  $\square$

Теперь можно получить критерий для графа быть деревом.

**Теорема 3.** *Для того чтобы произвольный граф являлся деревом, необходимо и достаточно, чтобы он был изоморфен графу Хассе некоторой конечной полурешетки с ретрактами.*

*Доказательство.* Достаточность вытекает из эквивалентности условий 1) и 3) теоремы 2.

*Необходимость.* Покажем, что любое дерево  $A$  является графом Хассе полурешетки  $A$  с ретрактами и произвольно заданной вершиной в качестве наибольшего элемента. Проведем рассуждение индукцией по числу  $n$  вершин дерева  $A$ . Если  $n = 1$  или  $n = 2$ , то  $A$  будет неориентированным графом Хассе одноэлементной полурешетки или двухэлементной цепи соответственно.

Предположим, что  $n \geq 3$  и для любого натурального числа  $m < n$  все  $m$ -элементные деревья являются графами Хассе подходящих полурешеток. Возьмем произвольную вершину  $a$  дерева  $A$  и рассмотрим все ребра  $aa_1, \dots, aa_k$  графа  $A$ , выходящие из  $a$ . Удалив из  $A$  только одну вершину  $a$  и указанные ребра, получим, как легко видеть, граф, имеющий в точности компоненты связности  $A_1, \dots, A_k$ , содержащие вершины  $a_1, \dots, a_k$  соответственно. Очевидно, что подграфы  $A_1, \dots, A_k$  дерева  $A$  также будут деревьями, причем имеющими менее  $n$  вершин. По индуктивному предположению деревья  $A_1, \dots, A_k$  являются графами Хассе полурешеток  $\langle A_1, \leq \rangle, \dots, \langle A_k, \leq \rangle$  с наибольшими элементами  $a_1, \dots, a_k$  соответственно. Полагая  $a_1 < a, \dots, a_k < a$ , получаем полурешетку  $\langle A, \leq \rangle$  с наибольшим элементом  $a$ , граф Хассе которой совпадает с деревом  $A$ . Остается снова применить теорему 2.

Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 2.** С точностью до изоморфизма, одно и то же дерево может быть получено из неизоморфных древесных полурешеток. Например, трехэлементная цепь и трехэлементная полурешетка с двумя минимальными элементами имеют один и тот же граф Хассе.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
2. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1981. 456 с.
3. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Упорядоченные множества и решетки. СПб.: Лань, 2024. 248 с.
4. **Hamilton H. B.** Semilattices whose structure lattice is distributive // *Semigroup Forum*, 1974. Vol. 8. No 1. Pp. 245–253.
5. **Фофанова Т. С.** О ретрактах структуры // *Математические заметки*. 1970. Т. 7. Вып. 6. С. 687–692.
6. **Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб.: Лань, 2010, 368 с.

## References

1. **Birkhoff G.** *Teoriya reshetok* [Lattice Theory]. Moscow: Science, 1984. 568 p. (In Russ.)
2. **Gretzer, G.** *Obshchaya teoriya reshetok* [General Lattice Theory]. Moscow: Publishing House of the World, 1981. 456 p. (In Russ.)
3. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki* [Ordered Sets and Lattices]. St. Petersburg: Lan', 2024. 248 p. (In Russ.)
4. **Hamilton H. B.** Semilattices Whose Structure Lattice is Distributive. *Semigroup Forum*, 1974. Vol. 8. No 1. Pp. 245–253.
5. **Fofanova T. S.** On Structure Retracts. *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes]. 1970. Vol. 7. Issue 6. Pp. 687–692. (In Russ.)
6. **Asanov M. O., Baransky V. A., Rasin V. V.** *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms]. St. Petersburg: Lan', 2010. 368 pp. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author

Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeny M. Vechtomov

д.ф.-м.н., профессор, научный сотрудник / Doctor of Physical and  
Mathematical Sciences, Professor, Research Fellow

Вятский государственный университет / Vyatka State University

Россия, 610000, Киров, ул. Московская, д. 36 / 36, Moskovskaya St.,  
Kirov, 610000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 30.11.2025

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 03.12.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.*

*Выпуск 4 (57)*

*Bulletin of Syktuykar University.*

*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)*

Научная статья

УДК 519.816

[https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_15](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_15)

## РЕШЕНИЕ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ С ЛИНГВИСТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ПАРАМЕТРОВ

**Владимир Георгиевич Чернов**

Владимирский государственный университет

имени Александра Григорьевича

и Николая Григорьевича Столетовых, vladimir.chernov44@mail.ru

*Аннотация.* В антагонистических играх, когда игроки преследуют противоположные цели, в их интересах сохранить в секрете возможные решения, и поэтому вполне возможна ситуация, когда участники игры не могут точно определить, какие действия предпримет противник и какие последствия за ними наступят. В этих условиях, в отличие от известных исследований, предполагается, что каждый из участников формирует свое представление игры, включая предположения о возможных действиях противоположной стороны и последствиях применяемых в ответ стратегиях, которые представляются нечеткими лингвистическими утверждениями. При этом предполагается, что игрок учитывает влияние его нечетких оценок возможности выбора противоположной стороной каких-то стратегий через изменение истинности его же предположений о последствиях собственного решения. Оценки результатов возможных стратегий игрока при любых стратегиях другого участника предполагается формировать в виде нечеткого множества с треугольной функцией принадлежности.

Выбор наилучшей стратегии осуществляется на основе комплексной оценки, состоящей из произведения показателя размытости указанного нечеткого множества, вычисляемого по формуле логарифмической энтропии, и значения координаты центра тяжести его функции принадлежности на области определения элементов платежной матрицы.

**Ключевые слова:** антагонистическая игра, платежная матрица, нечеткое множество, лингвистическое значение, функция принадлежности

**Для цитирования:** Чернов В. Г. Решение конфликтной ситуации с лингвистическими оценками параметров // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2025. Вып. 4 (57). С. 15–37. [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_15](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_15)

Article

## SOLVING A CONFLICT SITUATION WITH LINGUISTIC PARAMETER ESTIMATES

Vladimir G. Chernov

Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs,  
vladimir.chernov44@mail.ru

**Abstract.** In antagonistic games, where players pursue opposing goals, it is in their interests to keep possible decisions secret. Therefore, it is highly probable for players to be unable to accurately determine the opponent's actions and their consequences. In these settings, unlike existing research, it is assumed that each player forms their own representation of the game, including assumptions about the opponent's possible actions and the consequences of their counterstrategies, which are represented by fuzzy linguistic statements. Each player is also assumed to take into account the influence of their fuzzy assessments of the opponent's potential strategy choices by altering the validity of their own assumptions about the consequences of their own decision. Estimates of the outcomes of a player's possible strategies, given any strategy proposed by the other player, are assumed to be formed as a fuzzy set with a triangular membership function. The best strategy is selected based on a complex assessment consisting of the product of the fuzziness index of the fuzzy set, calculated using the logarithmic entropy

formula, and the coordinate of the gravity center of its membership function on the domain of the payoff matrix elements.

**Keywords:** antagonistic game, payoff matrix, fuzzy set, linguistic value, membership function

**For citation:** Chernov V. G. Solving a conflict situation with linguistic parameter estimates. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 15–37. (In Russ.) [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_15](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_15)

## 1. Введение

Принятие решений является неотъемлемой частью практической деятельности в различных направлениях. Особое положение здесь занимают решения, связанные с конфликтными ситуациями, к которым, очевидно, можно отнести военные действия, борьбу с терроризмом, конкурентную борьбу на рынке и т. п. Сложность и ответственность таких ситуаций не позволяет при выработке наиболее рациональных решений опираться только на субъективные представления и предпочтения лиц, принимающих решения, и делает необходимым использование математических моделей для поддержки процесса принятия решений. Для конфликтных ситуаций такой моделью являются антагонистические игры. Традиционно антагонистическая игра может быть представлена тройкой  $\langle A, B, G(A, B) \rangle$ ,  $A, B$  — множества стратегий участников конфликта. В общем случае  $G(A, B) = \|g(a_i, b_j)\|$  — платежная матрица, элементами которой является оценки последствий выбора игроками стратегий. Поэтому антагонистическая игра часто называется матричной.

Классическая теория антагонистических игр основывается на принципе «общего знания», который гласит: игра со всеми правилами известна игрокам, и каждый из них знает, что все участники осведомлены о том, что известно остальным партнерам по игре [1; 2].

В практических условиях принцип «общего знания» нарушается, во-первых, из-за того, что при конфликтном характере ситуации, требующей принятия решений, игрокам целесообразно сохранять в секрете свои возможные решения, т. е. возникает (существует) первая неопределенность в знании возможных действий противника. Вторая неопределенность, которую можно рассматривать как следствие первой, — это

неопределенность в оценке последствий возможных решений, значений элементов платежной матрицы.

Модель антагонистической игры, предложенная Дж. Харшаньи [3], является попыткой учесть первый тип неопределенности путем введения в формулировку игры, так называемый тип агента, предполагаемое распределение вероятностей, с которыми противоположный участник может выбирать свои стратегии. Тип агента можно создать либо на основе априорной информации из статистических наблюдений в прошлом, либо соответствующие оценки дают эксперты. Очевидно, что рассчитывать на получение заслуживающей доверия априорной информации можно, если ситуация, требующая принятия решения, возникает неоднократно при неизменных условиях, и тогда существует возможность формирования статистически значимого типа агента. Если эти условия отсутствуют, то соответствующие вероятности будут определяться экспертами. Экспертным оценкам принципиально свойственна неопределенность, которая имеет нестатистический характер, и поэтому корректность их применения в модели Дж. Харшаньи требует дополнительного обоснования. Как уже отмечалось, следующая неопределенность будет иметь место и при оценке значений элементов платежной матрицы, которая также нестатистическая по причинам, подробно рассмотренным в [4]. Адекватным вариантом формализации нестатистической неопределенности вполне обоснованно можно считать ее представление на основе теории нечетких множеств. Различные варианты решения антагонистических игр с нечеткими параметрами предложены в исследованиях [5–9]. Однако все они в той или иной степени остаются в рамках классической теории и принципа «общего знания». Неопределенности нестатистического характера в исходных данных, с одной стороны, нарушают принцип «общего знания», а с другой — становятся причиной видоизменения модели Дж. Харшаньи. Нечеткий аналог модели Дж. Харшаньи, основанный на использовании нечетких чисел, предложен в [10]. Другим вариантом моделирования неопределенности исходных данных является использование лингвистической (вербальной) формы их представления.

## 2. Материалы и методы

Поскольку в антагонистической игре участвуют рационально действующие участники, то можно считать, что каждому из них известен список возможных стратегий противника, т. е. игроку  $A$  из-

вестно множество  $B = [b_j : j = 1, \dots, N]$ , а игроку  $B$  — множество  $A = [a_i : i = 1, \dots, M]$ . Нарушение принципа «общего знания» приводит к тому, что у каждого из участников будет свое представление как о возможном выборе другой стороны, так и его последствиях. Тогда первый игрок формирует множество оценок, характеризующих возможность выбора игроком  $B$  некоторой стратегии  $b_j$ , которую обозначим  $Pos(B/A) = [pos(b_j/A) : j = 1, \dots, N]$ , а также его представление относительно последствий выбора им стратегии  $a_i$  при стратегии  $b_j$  второго игрока

$$G_A = \begin{vmatrix} g(A)_{11} & g(A)_{12} & \dots & g(A)_{1N} \\ g(A)_{21} & g(A)_{22} & \dots & g(A)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(A)_{M1} & g(A)_{M2} & \dots & g(A)_{MN} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Аналогично, игрок  $B$  конструирует свою систему  $Pos(A/B) = [pos(a_i/B) : i = 1, \dots, M]$  и матрицу

$$G_B = \begin{vmatrix} g(B)_{11} & g(B)_{12} & \dots & g(B)_{1N} \\ g(B)_{21} & g(B)_{22} & \dots & g(B)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(B)_{M1} & g(B)_{M2} & \dots & g(B)_{MN} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Для оценок, характеризующих представления игроков о ситуациях, требующих от них принятия решений, должны быть сформированы соответствующие терм-множества:

$$\begin{aligned} T[Pos(B/A)] &= [\tau_k[pos(b_j/A)] : k = 1, \dots, K_j], \\ T[G_A] &= [\tau_q(G_A) : q = 1, \dots, Q_A], \\ T[Pos(A/B)] &= [\tau_k[pos(a_i/B)] : k = 1, \dots, K_i], \\ T[G_B] &= [\tau_q(G_B) : q = 1, \dots, Q_B]. \end{aligned}$$

В общем случае  $K_i \neq K_j$ .

Оценки  $\tau_k[pos(b_j/A)]$ ,  $\tau_k[pos(a_i/B)]$  формализуются нечеткими множествами, соответственно:

$$M_{(B/A)} = \{\mu_{B/A}^k(x) : k = \overline{1, K_i}, x \in [0, 1]\}, \quad (3)$$

$$M_{(A/B)} = \{\mu_{A/B}^k(x) : k = \overline{1, K_j}, x \in [0, 1]\}, \quad (4)$$

$$M[G(A)] = \{\mu_q^A(y) : q = \overline{1, Q_A}\}, \quad (5)$$

$$M[G(B)] = \{\mu_q^B(y) : q = \overline{1, Q_B}\}, \quad (6)$$

где  $[y_{\min}, y_{\max}]$  — области определения элементов матриц (1) и (2) соответственно. Возможно, что для участников конструирование игры непосредственно в форме лингвистических оценок окажется либо затруднительным, либо недостаточно убедительным. Тогда может использоваться следующая процедура (фаззификация).

Пусть выбрано терм-множество

$$T[Pos(B/A)] = [VS, Sm, M, HM, B] \quad (7)$$

(*VS* — очень малая возможность, *Sm* — малая возможность, *M* — средняя, *HM* — выше средней, *B* — значительная) и соответствующие нечеткие множества с функциями принадлежности (рис. 1).

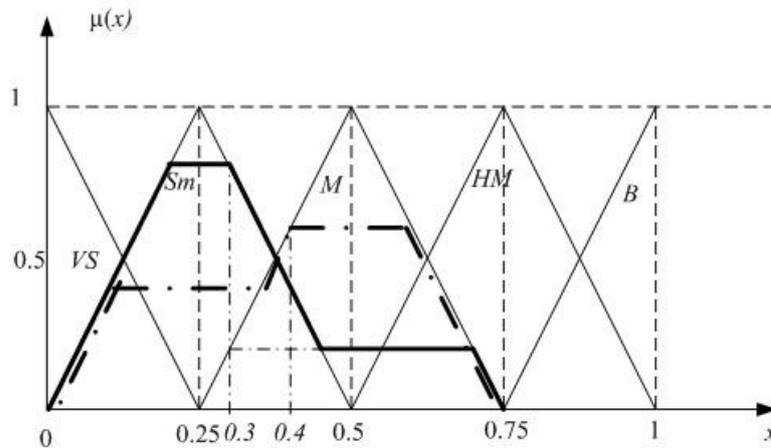


Рис. 1. Терм-множество  $T[Pos(B/A)]$  и результаты фаззификации (утолщенные и пунктирные линии)

Например, игрок *A* выбирает точку на оси ординат, отражающую его примерную оценку возможности использования игроком *B* некоторой стратегии  $b_j$ . В общем случае в результате фаззификации получим лингвистическое значение  $pos(b_j/A) = (LM \text{ or } M)$ . Если, например,  $\mu_{LM}(x) \gg \mu_M(x)$  при  $x = b_j$  или наоборот, то остается одна из лингвистических оценок. Аналогично поступаем и с оценками последствий

возможных решений. Для простоты дальнейшего изложения предположим, что игроки используют одинаковые терм-множества оценок последствий сделанного выбора

$$T(a_i, b_j) = [L, LM, M, HM, B] \quad (8)$$

( $L$  — последствия незначительные,  $LM$  — ниже среднего,  $M$  — средние,  $HM$  — выше среднего,  $B$  — существенные) (рис. 2).

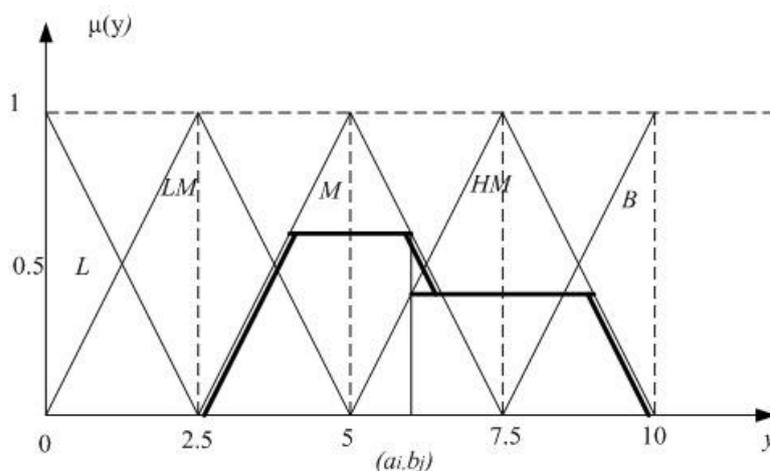


Рис. 2. Терм-множество оценок последствий возможного выбора, утолщенными линиями представлен результат фаззификации последствий выбора игроками пары стратегий  $(a_i, b_j)$

В результате формируются множества нечетких оценок для первого игрока

$$\widetilde{Pos}(A/B) = \{\mu_{(b_j, A)}(x) : j = \overline{1, N}\} \quad \text{и} \quad \widetilde{G}(A) = \|\mu_{ij}^A(y)\|,$$

для второго

$$\widetilde{Pos}(B/A) = \{\mu_{(a_i, B)}(x) : i = \overline{1, M}\}, \quad \widetilde{G}(B) = \|\mu_{ij}^B(z)\|.$$

Дальнейшие преобразования рассматриваются на примере игрока  $A$ , действия  $B$  будут аналогичными.

Нарушение принципа «общего знания» делает невозможным использование методов классической теории антагонистических игр для нахождения наилучших стратегий. Поэтому в рассматриваемой ситуа-

ции игрокам целесообразно основываться на следующем положении: при имеющемся характере неопределенностей наиболее полезной будет стратегия, обеспечивающая наилучший результат независимо от выбора другой стороны. В этом случае игроки для нахождения таких стратегий должны оценивать последствия возможных решений с учетом истинности их предположений о возможном выборе противника, т. е. построить на основе соотношений (3–6) нечеткие отображения

$$\tilde{\Gamma}_A : \tilde{M}(B/A) \rightarrow \tilde{M}[G(A)] \quad (9)$$

для игрока  $A$  и для игрока  $B$

$$\tilde{\Gamma}_B : \tilde{M}(A/B) \rightarrow \tilde{M}[G(B)]. \quad (10)$$

Пусть некоторому элементу матрицы (1)  $\mu_{ij}^A(y)$  соответствует  $\mu_{(b_j/A)}(x)$  нечеткая оценка игроком  $A$  возможности выбора игроком  $B$  стратегии  $b_j$ . С помощью генератора случайных чисел генерируется множество пар  $(y_p, x_r)$ ,  $p = \overline{(1, P)}$ ,  $r = \overline{(1, R)}$ . Вычисляются функции принадлежности нечетких отображений (7)

$$\tilde{\mu}_{ij}^A(y_p) = \mu_{ij}^A(y_p) \cap \mu_{(b_j/A)}(x_r) = \min[\mu_{ij}^A(y_p), \mu_{(b_j/A)}(x_r)] \quad (11)$$

и (8)

$$\tilde{\mu}_{ij}^B(z_p) = \mu_{ij}^B(z_p) \cap \mu_{(a_i/B)}(x_i) = \min[\mu_{ij}^B(z_p), \mu_{(a_i/B)}(x_i)]. \quad (12)$$

Указать заранее необходимое количество пар невозможно, так как оно во многом зависит от вида функций принадлежности соответствующих нечетких оценок. Количество пар подбирается экспериментально так, чтобы последующие преобразования обеспечили надежное распознавание получаемых нечетких оценок последствий возможных решений. Для треугольных функций принадлежности достаточное число пар не более 10:  $P = R = 10$ . В результате будут получены дискретные нечеткие множества, характеризующие последствия выбора игроком  $A$  стратегии  $a_i$  с учетом истинности предположения о выборе игроком  $B$  стратегии  $b_j$  (9) и последствия выбора игроком  $B$  стратегии  $b_j$  с учетом истинности предположения о выборе игроком  $A$  стратегии  $a_i$ . Описанная процедура применяется ко всем элементам матриц (1) и (2). В результате матрицы (1) и (2) будут преобразованы в матрицы

$$\tilde{G}'(A) = ||\tilde{\mu}_{ij}^A||, \quad (13)$$

$$\tilde{G}'(B) = \|\|\tilde{\mu}_{ij}^B\|\| \quad (14)$$

соответственно.

В ситуациях, представленных матрицами (13), (14), в качестве наиболее выгодных будут те стратегии, которые обеспечат игрокам наилучший результат, не зависящий от выбора другого участника. Для определения таких стратегий, например, игрок  $A$  должен для каждой своей стратегии  $a_i \in A$  вычислить интегральную оценку ее последствий по всему множеству стратегий игрока  $B$  и затем сравнить полученные результаты. Аналогично игрок  $B$  для каждой стратегии  $b_j \in B$  вычисляет интегральную оценку ее последствий по всему множеству стратегий игрока  $A$ .

Для получения интегральной оценки предлагается рассматривать совокупность дискретных множеств строк матрицы (13)

$$[\tilde{\mu}_{i1}^A, \tilde{\mu}_{i2}^A, \dots, \tilde{\mu}_{iN}^A], \quad i = \overline{1, M}$$

как единое дискретное нечеткое множество  $\widetilde{M}_i^A$ . Аналогично для множества строк матрицы (14)  $[\tilde{\mu}_{j1}^B, \tilde{\mu}_{j2}^B, \dots, \tilde{\mu}_{jM}^B], j = \overline{1, N} - \widetilde{M}_j^B$ .

Функции принадлежности таких множеств будут представляться набором их дискретных, вообще говоря, произвольных, значений, дальнейшие преобразования над которыми окажутся весьма сложными. Поэтому предлагается к множествам  $\widetilde{M}_i^A$  и  $\widetilde{M}_j^B$  применить преобразование FztoTriangle, определенное в нечеткой электронной таблице FuzyCalc фирмы FuzyWare. Суть этого преобразования состоит в замене произвольного нечеткого множества эквивалентным с треугольной функцией принадлежности, которое имеет одинаковые с исходным величину носителя и значение координаты центра тяжести. Координата модального значения определяется из известного соотношения для координаты центра тяжести треугольника, тогда для игрока  $A$   $x_{\text{mod}_i} = 3CG_{Eq_i} - (x_{\text{max}_i} + x_{\text{min}_i})$ , где  $CG_{Eq_i}$  — координата центра тяжести эквивалентного множества, соответствующего  $i$ -ой строке матрицы (13),  $[x_{\text{max}_i}, x_{\text{min}_i}]$  — границы носителя нечеткого множества  $\widetilde{M}_i^A$ , для игрока  $B$   $z_{\text{mod}_i} = 3CG_{Eq_i} - (z_{\text{max}_i} + z_{\text{min}_i})$ , где  $CG_{Eq_i}$  — координата центра тяжести эквивалентного множества, соответствующего  $i$ -ой строке матрицы (14),  $[z_{\text{max}_i}, z_{\text{min}_i}]$  — границы носителя нечеткого множества  $\widetilde{M}_i^B$ . Значение функции принадлежности эквивалентного нечеткого множества в точке  $x_{\text{mod}_i}$  в зависимости от предпочтений

игрока может определяться либо как  $\max_i [\tilde{\mu}_{i1}^A, \tilde{\mu}_{i2}^A, \dots, \tilde{\mu}_{iN}^A]$ ,  $i = \overline{1, M}$  ( $\max_j [\tilde{\mu}_{j1}^B, \tilde{\mu}_{j2}^B, \dots, \tilde{\mu}_{jM}^B]$ ), либо как средневзвешенное.

Таким образом, каждой строке матриц (13), (14) будет поставлено в соответствие эквивалентное нечеткое множество  $\tilde{E}(a_i)$ ,  $\tilde{E}(b_j)$  соответственно, а в совокупности каждый из игроков получит для принятия решений вектора нечетких оценок последствий возможного выбора

$$\tilde{E}(A) = \begin{vmatrix} \tilde{E}(a_1) \\ \tilde{E}(a_2) \\ \vdots \\ \tilde{E}(a_M) \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$\tilde{E}(B) = \begin{vmatrix} \tilde{E}(b_1) \\ \tilde{E}(b_2) \\ \vdots \\ \tilde{E}(b_N) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Для выбора наилучшего решения необходимо сравнение нечетких координат векторов  $\tilde{E}(A)$  (15),  $\tilde{E}(B)$  (16). Предлагаемые в [11–13] методы сравнения нечетких чисел в решаемой задаче оказываются недостаточными. Дело в том, что для принятия решения в данном случае необходим учет двух параметров, уровня неопределенности (размытости) и положения нечеткой оценки на области определения.

Оценка размытости нечеткого множества представляет собой отдельную, достаточно сложную задачу, различные методы решения которой описаны в [14]. В работе [15] отмечается, что можно выделить несколько аспектов, связанных с понятием размытости нечетких множеств, среди которых для решаемой задачи существенным является интерпретация показателя размытости как характеристики уровня внутренней неопределенности, обусловленной неполной, частичной информацией о соответствии возможного решения условиям наилучшего выбора. Очевидно, что функции принадлежности  $0 < \mu_{\tilde{E}(a_i)}(y) < 1$  или  $0 < \mu_{\tilde{E}(b_j)}(z) < 1$  указывают на то, что  $\forall a_i \in A$  или  $\forall b_j \in B$  лишь в частичной мере удовлетворяют условию быть наилучшим. В общем случае показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функционала  $F(\omega) \in R^+$ , где  $\omega = y$  или  $z$ , свойства которого определе-

ны в [15]. В [16] при конечном числе элементов нечеткого множества предлагается функционал в следующем виде:

$$F(\omega) = \sum_i \varphi_i(\mu_{\tilde{E}}(\omega)), \quad (17)$$

где  $\varphi_i$  — вещественнозначная функция  $\mu_{\tilde{E}(a_i)}(y)$  или  $\mu_{\tilde{E}(b_j)}(z)$  в зависимости от того, для какого игрока проводятся вычисления. В качестве такой функции по аналогии с шенноновской энтропией теории информации может использоваться логарифмическая энтропия нечеткого множества

$$\varphi = -q \ln q - (1 - q) \ln (1 - q), \quad (18)$$

где  $q = \mu_{\tilde{E}(a_i)}(y)$  или  $q = \mu_{\tilde{E}(b_j)}(z)$ . Другой вариант определения размытости нечетких множеств предложен в [17]

$$F(\omega) = \sum_i \mu_{\tilde{E}}(\omega_i)(1 - \mu(\omega_i)). \quad (19)$$

Однако ни один из известных методов не учитывает положение нечеткой оценки на области ее определения. Этой оценкой для нечеткого множества с треугольной функцией принадлежности может стать координата либо ее максимального значения, либо центра тяжести. При выборе одного из этих параметров можно руководствоваться следующими соображениями: координата максимального значения определяется проще, чем координата центра тяжести, с другой стороны, если рассматривать функцию принадлежности как совокупность точек с массами, равными ее значениям, координата центра тяжести является обобщенной характеристикой такой совокупности. Поскольку возможны различные сочетания значений показателей размытости, то для выбора наилучшего варианта необходима композиционная оценка, которая должна формироваться исходя из логики принятия решений игроками.

В антагонистических играх без ограничения общности предполагается, что первый игрок выигрывает, а второй проигрывает. Тогда логика выбора решения игроком  $A$  может быть следующей. Наилучшим будет такое решение, у которого желательны минимальная неопределенность и наибольшее значение координаты максимума или центра тяжести функции принадлежности. Тогда наиболее выгодной стратегией будет

$$a_i^* \rightarrow \min_i \left[ \frac{F_{\tilde{E}(a_i)}(y)}{\max_y \mu_{\tilde{E}(a_i)}(y)} \right]$$

или

$$a_i^* \rightarrow \min_i \left[ \frac{F_{\tilde{E}(a_i)}(y)}{CG[\mu_{\tilde{E}(a_i)}(y)]} \right], \quad (20)$$

где  $F_{\tilde{E}(a_i)}(y)$  — показатель размытости нечеткой оценки  $\tilde{E}(a_i)$ , вычисленный по соотношению (18) или (и) (19);  $CG[\mu_{\tilde{E}(a_i)}(y)]$  — координата центра тяжести функции принадлежности  $\mu_{\tilde{E}(a_i)}(y)$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

Второй игрок также заинтересован в оценке с минимальной неопределенностью, которая также рассчитывается по соотношению (18) или (и) (19), но с наименьшим значением координаты максимума функции принадлежности или ее центра тяжести. Тогда для него наиболее выгодной будет стратегия

$$b_J^* \rightarrow \min_j \left[ F_{\tilde{E}(b_j)}(z) \cdot \max_z [\mu_{\tilde{E}(b_j)}(z)] \right]$$

или

$$b_J^* \rightarrow \min_j [F_{\tilde{E}(b_j)}(z) \cdot CG[\mu_{\tilde{E}(b_j)}(z)]], \quad (21)$$

где  $F_{\tilde{E}(b_j)}(y)$  — показатель размытости нечеткой оценки  $\tilde{E}(b_j)$ , вычисленный по соотношению (18) или (и) (19);  $CG[\mu_{\tilde{E}(b_j)}(y)]$  — координата центра тяжести функции принадлежности,  $j = \overline{1, N}$ .

### 3. Результаты

Проиллюстрируем изложенное упрощенным примером. Выбор игроками наилучших стратегий выполняется в несколько этапов.

*Этап 1.* Формирование исходных данных. Игроки определяют множества возможных стратегий, оценки их применения, а также возможности выбора другим участником каких-то стратегий. Обычно первоначальная модель ситуации, требующей принятия решений, задается в числовой форме, например табл. 1 для игрока  $A$  и табл. 2 для  $B$ .

*Этап 2.* Фаззификация исходных данных. Учитывая возможную неопределенность, числовые данные подвергаются фаззификации. Для этого каждый из игроков формирует терм-множества лингвистических оценок для последствий возможных решений и возможности выбора другим участником некоторых стратегий. Для упрощения изложения

Таблица 1

Представление игры со стороны игрока *A*

|            |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| $Pos(B/A)$ | 0.3   | 0.1   | 0.4   | 0.2   |
| $A/B$      | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
| $a_1$      | 3     | 3     | 8     | 4     |
| $a_2$      | 5     | 1     | 6     | 5     |
| $a_3$      | 7     | 3     | 3     | 6     |

Таблица 2

Представление игры со стороны игрока *B*

|            |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|
| $Pos(A/B)$ | 0.3   | 0.5   | 0.2   |
| $B/A$      | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $b_1$      | 3     | 8     | 5     |
| $b_2$      | 1     | 4     | 6     |
| $b_3$      | 7     | 5     | 3     |
| $b_4$      | 4     | 3     | 4     |

предполагается, что игроки используют одинаковые терм-множества для последствий возможных решений, представленные соотношением (8). Один из вариантов результата фаззификации для пар стратегий  $(a_3, b_1)$ ,  $(a_3, b_4)$  приведен на рис. 3. Аналогичной процедуре подвергаются и первоначальные оценки игроков возможности использования каких-то стратегий другим участником (рис. 1). В отличие от первого игрока второй использует для  $POS(A/B)$  терм-множество из трех лингвистических значений  $T[POS(A/B)] = [Sm, M, B]$  ( $Sm$  — малая возможность,  $M$  — средняя,  $B$  — значительная) (рис. 4). Результаты второго этапа представлены в табл. 3 и 4. Хотя в табл. 3 присутствуют одинаковые лингвистические значения, например для пар стратегий  $(a_3, b_1)$ ,  $(a_3, b_4)$ , они имеют различные функции принадлежности (рис. 3). Аналогичная ситуация будет и для совпадающих по обозначениям элементов табл. 4.

В результате фаззификации табл. 1 и 2 преобразуются к виду табл. 3 и 4.

*Этап 3.* Формируются итоговые оценки последствий возможных решений с учетом истинности предположений игроков о возможном

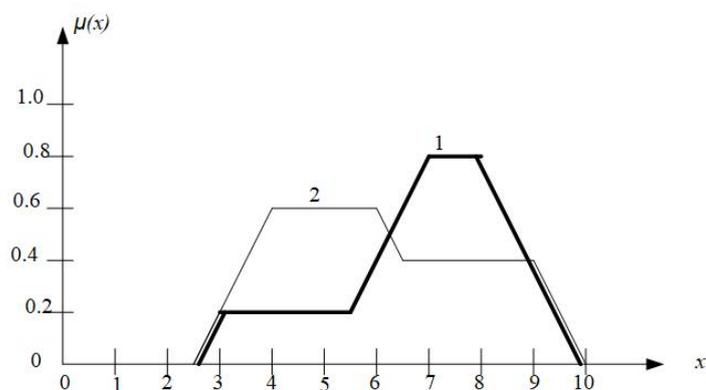


Рис. 3. Функции принадлежности нечетких оценок для пар стратегий  $(a_3, b_1) - 1$ ,  $(a_3, b_4) - 2$

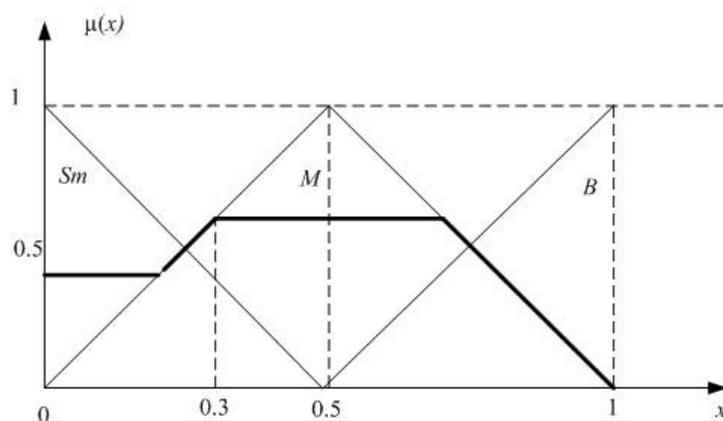


Рис. 4. Функции принадлежности элементов терм-множества  $T[Pos(A/B)]$  и результат фаззфикации (утолщенные линии)

Таблица 3

**Fuzzy-представление игры игрока A**

| $Pos(B/A)$ | $Sm$ or $M$ | $VS$ or $Sm$ | $Sm$ or $M$ | $Sm$        |
|------------|-------------|--------------|-------------|-------------|
| $A/B$      | $b_1$       | $b_2$        | $b_3$       | $b_4$       |
| $a_1$      | $LM$ or $M$ | $L$ or $LM$  | $HM$ or $B$ | $LM$ or $M$ |
| $a_2$      | $M$         | $L$ or $M$   | $M$ or $HM$ | $M$         |
| $a_3$      | $M$ or $HM$ | $LM$ or $M$  | $L$ or $LM$ | $M$ or $HM$ |

Таблица 4

Fuzzy-представление игры игрока  $B$ 

| $Pos(A/B)$ | $Sm$ or $M$ | $M$         | $Sm$ or $M$ |
|------------|-------------|-------------|-------------|
| $B/A$      | $a_1$       | $a_2$       | $a_3$       |
| $b_1$      | $LM$ or $M$ | $HM$ or $H$ | $M$         |
| $b_2$      | $L$ or $LM$ | $LM$ or $M$ | $M$ or $HM$ |
| $b_3$      | $HM$ or $H$ | $M$         | $LM$ or $M$ |
| $b_4$      | $LM$ or $M$ | $LM$ or $M$ | $LM$ or $M$ |

выборе противника. Строятся нечеткие отображения (9) и (10) и соответствующие функции принадлежности (11), (12). В результате для каждой строки табл. 3, 4 формируется рассматриваемое как единое, нечеткое множество, функция принадлежности которого представляется набором дискретных, вообще говоря, произвольных значений, что очень сильно усложняет принятие окончательного решения.

*Этап 4.* Построение эквивалентных нечетких множеств. Каждое нечеткое множество, полученное на предыдущем этапе, преобразуется по описанным выше правилам в эквивалентные нечеткие множества с треугольными функциями принадлежности. В результате оценки последствий возможных решений представляются векторами, нечеткие координаты которых имеют треугольные функции принадлежности, что существенно упрощает процедуры принятия окончательного решения. В результате описанных выше преобразований для каждой строки матриц, представленных табл. 3, 4, будут получены эквивалентные нечеткие множества (рис. 5).

*Этап 5.* Выбор наилучшего решения. Для каждой нечеткой координаты векторов, полученных на предыдущем этапе, вычисляются интегральные оценки возможных решений по соотношениям (18–21) и выбирается наиболее выгодное.

В табл. 5, 6 для данных задачи, используемой как пример, представлены результаты расчетов по соотношениям (18) и (19). Для подтверждения корректности полученных результатов расчеты проводились по обоим соотношениям (20) и (21). В обеих таблицах индекс 18 означает, что расчеты размытости нечетких оценок выполнялись по соотношению (18), 19 – по формуле (19).

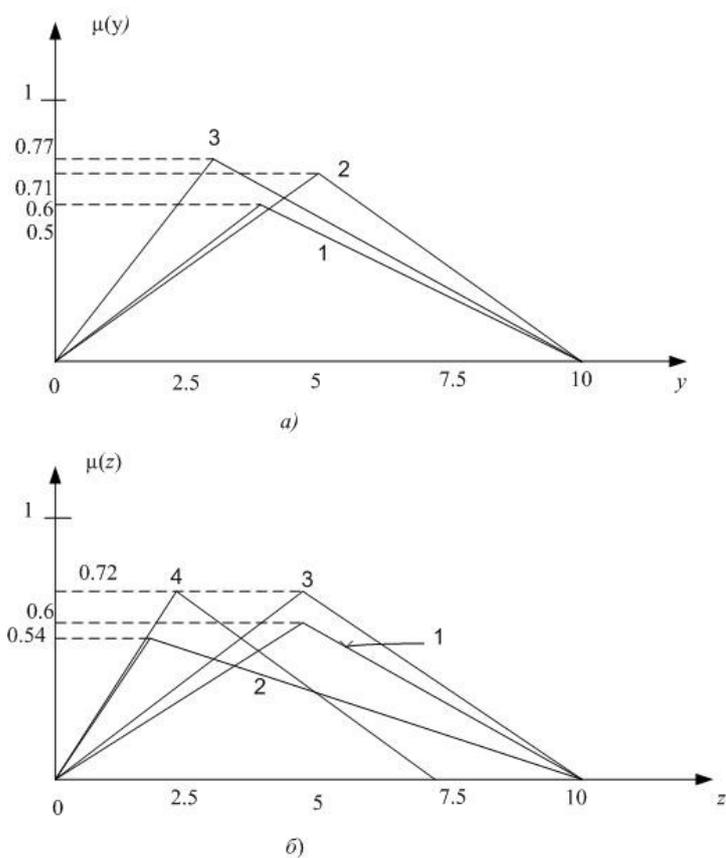


Рис. 5. Нечеткие оценки последствий возможного выбора игроков:

а) для игрока  $A$ :  $\tilde{E}(a_1) - 1$ ,  $\tilde{E}(a_2) - 2$ ,  $\tilde{E}(a_3) - 3$ ;б) для игрока  $B$ :  $\tilde{E}(b_1) - 1$ ,  $\tilde{E}(b_2) - 2$ ,  $\tilde{E}(b_3) - 3$ ,  $\tilde{E}(b_4) - 4$ 

Таблица 5

Оценки возможных стратегий игрока  $A$ 

| $F/A$             | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|-------------------|-------|-------|-------|
| $F_{18}$          | 4.94  | 25.08 | 5.15  |
| $F_{18} \cdot CG$ | 1.19  | 0.98  | 1.1   |
| $F_{19}$          | 3.65  | 3.28  | 3.71  |
| $F_{19} \cdot CG$ | 0.87  | 0.634 | 0.79  |

Согласно сформулированным условиям оба метода расчетов указывают, что для игрока  $A$  наилучшим решением будет выбор стратегии  $a_2$ .

Таблица 6

Оценки возможных стратегий игрока  $B$ 

| F/B               | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| $F_{18}$          | 4.36  | 4.09  | 4.17  | 3.185 |
| $F_{18} \cdot CG$ | 20.78 | 15.06 | 20.21 | 9.98  |
| $F_{19}$          | 2.81  | 3.58  | 3.91  | 2.18  |
| $F_{19} \cdot CG$ | 13.7  | 9.5   | 14.08 | 6.91  |

Аналогично для игрока  $B$  оба метода расчетов указывают, что наилучшим будет выбор стратегии  $b_4$ . Совпадение результатов двух независимых методов расчета подтверждают корректность найденных решений. В результате выбранным наилучшим решениям  $a_i^*$  (в примере  $a_2$ ) и  $b_j^*$  ( $b_4$ ) будут соответствовать нечеткие множества, представляющие распределение возможности получения некоторого результата, в том числе и возможно наилучшего, на области определения значений элементов платежных матриц (11, 12).

Для антагонистических игр важным параметром является цена игры, которая достигается, если игроки используют наилучшие (оптимальные) стратегии. Поскольку нечеткие множества  $\tilde{E}(a_i^*)$  и  $\tilde{E}(b_j^*)$  — это нечеткие результаты применения игроками наиболее выгодных (удачных) стратегий, которые для первого игрока  $A$  обеспечивают ему наибольший ожидаемый выигрыш, не зависящий от решений другого участника, для второго ( $B$ ) — наименьший ожидаемый проигрыш, также не зависящий от действий противника, то должна существовать и нечеткая цена игры, которая очевидно будет представляться общей областью этих множеств, т. е.

$$\tilde{\nu} = \tilde{E}(a_i^* \cap \tilde{E}(b_j^*)) = \mu_{\tilde{E}(a_i^*)} \cap \mu_{\tilde{E}(b_j^*)}$$

или

$$\tilde{\nu} = \mu_{\tilde{E}(a_i^*)} \cdot \mu_{\tilde{E}(b_j^*)}.$$

Нечеткая нижняя цена игры  $\tilde{\alpha} = \tilde{E}(a_i^0) \cap \tilde{E}(b_j^*)$ , где  $a_i^0$  — самая неудачная стратегия игрока  $A$ , т. е. стратегия с наименьшей интегральной оценкой ожидаемого выигрыша. Нечеткая верхняя цена игры  $\tilde{\beta} = \tilde{E}(a_i^*) \cap \tilde{E}(b_j^0)$ , где  $b_j^0$  — самый неудачный выбор игрока  $B$ , т. е. выбор стратегии с наибольшим ожидаемым проигрышем (рис. 6).

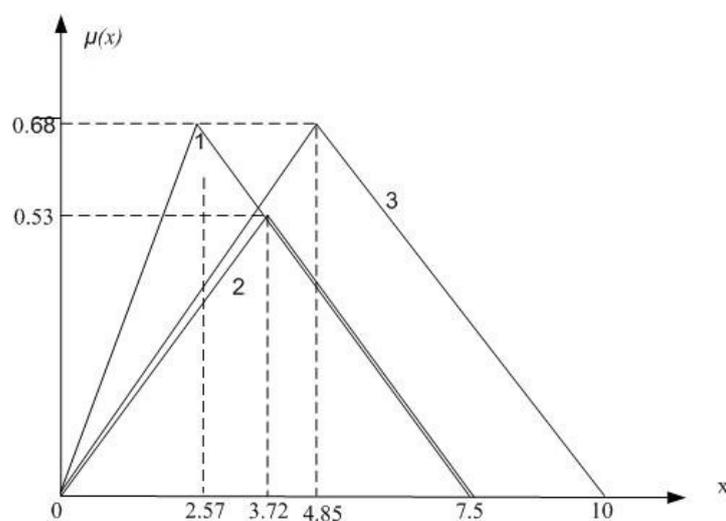


Рис. 6. Нечеткая нижняя цена игры — 1, нечеткая цена игры — 2, нечеткая верхняя цена игры — 3

Естественно возникает вопрос о корректности предложенного метода решения рассматриваемой задачи, ответить на который можно следующим образом. Нечеткие множества считаются обобщением классических множеств. Применительно к рассматриваемой задаче предлагаемый метод ее решения должен дать, по крайней мере, непротиворечивый результат в частном случае, когда от нечеткой формулировки возвращаемся к четкой. Будем рассматривать ситуацию для каждого игрока в отдельности. Тогда для каждого из участников возникает ситуация, аналогичная играм с природой, где в качестве природы выступает его противник. В этом случае для оценки возможных решений может использоваться байесовский принцип. Возможны два варианта возврата к четкой постановке. Первый — использовать для проверки данные, с которых начиналось рассмотрение задачи. Здесь и дальше с целью сокращения объема статьи ограничимся только конечными результатами. Оценивая возможные последствия по известной формуле

$$s_i = \sum_j g_{ij} p_j, \quad (22)$$

где  $g_{ij}$ ,  $p_{ij}$  — соответствующие элементы табл. 1, 2, из табл. 1 и 2 получим следующие оценки стратегий игрока A:  $a_1 = 5.1$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 4.4$ ,

для игрока  $B$ :  $b_1 = 5.9$ ,  $b_2 = 3.5$ ,  $b_3 = 5.2$ ,  $b_4 = 2.4$ . Как было определено выше, игрок  $A$  заинтересован в наибольшем результате (выигрыше), и, соответственно, для него наилучшей будет стратегия  $a_1$ , игрок  $B$  — в наименьшем (проигрыш), и для него лучшей будет стратегия  $b_4$ . Некоторое расхождение с нечетким вариантом можно объяснить близостью оценок стратегий  $a_1$  и  $a_2$ .

Второй вариант основан на операции дефаззификации элементов матриц, представленных табл. 3, 4, например по методу центра тяжести. Полученные значения обрабатываются по соотношению (19). В результате получены  $a_1 = 5.4$ ,  $a_2 = 5.6$ ,  $a_3 = 5.25$ , для игрока  $B$ :  $b_1 = 7.2$ ,  $b_2 = 5.4$ ,  $b_3 = 6.9$ ,  $b_4 = 4.9$ , соответственно, лучшими будут стратегии  $a_2$  и  $b_4$ , что совпадает с нечетким вариантом. Отметим, что все полученные таким образом оценки принадлежат и соответствующим эквивалентным нечетким множествам.

#### 4. Заключение

Предлагаемый метод решения конфликтной ситуации, формализуемой как антагонистическая матричная игра, позволяет находить наиболее выгодные стратегии ее участниками в условиях нарушения принципа «общего знания», обусловленного неопределенностью знаний о возможных решениях противоположного участника, из-за чего исходные данные представляются в виде нечетких лингвистических утверждений. Необходимо отметить, что, хотя в иллюстрациях только для простоты графического представления использовались треугольные функции принадлежности нечетких величин, сам метод нахождения наиболее выгодных решений не накладывает ограничений на вид используемых функций принадлежности.

## Список источников

1. **Myerson R. B.** Game theory: analysis of conflict. London. Harvard: Harvard University Press, 1997. 584 p.
2. **Geanakoplos J.** Common Knowledge // Handbook of Game Theory / ed. by R. Aumann and S. Hart. Netherlands: Elsevier Science B. V, 1994. Vol. 2. Pp. 1437–1496.
3. **Харшаньи Д., Зельтен Р.** Общая теория выбора равновесия в играх : пер. с англ. СПб.: Экономическая школа, 2001. 424 с.

4. **Сигал А. В.** Теория игр для принятия экономических решений. Симферополь: Диайпи, 2014. 303 с.
5. **Krishnaveni G., Ganesan K.** A new approach for the solution of fuzzy games // *National Conference on Mathematical Techniques and its Applications (NCMTA 18) IOP Publishing IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1000*. 2018. Pp. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/1000/1/012017.
6. **Khalifa A.** On Solving Two-Person Zero-Sum Fuzzy Matrix Games via Linear Programming Approach // *International Journal of Research in Industrial Engineering*. 2019. Vol. 8. No 1. Pp. 17–27.
7. **Xia Zh., Hao S., X. Jin, Moses O. E.** On characterization of equilibrium strategy for matrix games with L-R fuzzy payoffs // *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2021. Vol. 64. Issue 3. Pp. 158–174.
8. **Maschenko S. O.** On a value of matrix game with fuzzy sets of player strategies // *Fuzzy Sets and Systems*. 2024. Vol. 477. Article no 108798. DOI: 10.1016/j.fss.2023.108798.
9. **Orlova L.** Combined use of statistical and Antagonistic Games // *Computer and Industrial Engineering*. November 2021. Vol. 161. P.7–19.
10. **Чернов В. Г.** Выбор решений в конфликтной ситуации с нечеткими типами участников // *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2022. № 4. С. 24–36.
11. **Воронцов Я. А., Матвеев М. Г.** Методы параметризованного сравнения нечетких и трапециевидных чисел // *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2014. № 2. С. 90–97.
12. **Ухоботов В. И., Стабулит И. С., Кудрявцев К. Н.** Сравнение нечетких чисел треугольного типа // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 197–210. DOI: 10.20537/vm190205logo.
13. **Rao P. P. V., Shankar N. R.** Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spread and weight // *International Journal of Applied Science and Engineering*. 2012. Vol. 1. No 10. Pp. 41–57.

14. **Ибрагимов В. А.** Элементы нечеткой математики. Баку: Изд-во АГПУ, 2010. 392 с.
15. **Dubois D., Prade H.** New results about properties and semantics of fuzzy-set-theoretic operators // *Fuzzy Sets* / ed. by P. P. Wang and S. K. Chang. N.Y.: Plenum Press, 1980. Pp.59–75.
16. **Yager F. F.** On solving fuzzy mathematical relationships // *Information and Control*. 1970. Vol. 41. No 1. Pp. 29–55.
17. **Capocelli R., De Luca A.** Fuzzy sets and decision theory // *Information and Control*. 1973. Vol. 23. Pp. 44–47.

## References

1. **Myerson R. B.** *Game theory: analysis of conflict*. London. Harvard: Harvard University Press. 1997. 584 p.
2. **Geanakoplos J.** Common Knowledge. *Handbook of Game Theory*. Ed. by R. Aumann and S. Hart. Netherlands: Elsevier Science B. V, 1994. Vol. 2. Pp. 1437–1496.
3. **Harsanyi D., Selten R.** *Obshchaya teoriya vybora ravnovesiya v igrakh : per. s angl.* [General Theory of Equilibrium Choice in Games : translated from English]. St. Petersburg: Economic School, 2001. 424 p. (In Russ.)
4. **Sigal A. V.** *Teoriya igr dlya prinyatiya ekonomicheskikh resheniy* [Game Theory for Economic Decision Making]. Simferopol: Diaipi, 2014. 303 p. (In Russ.)
5. **Krishnaveni G., Ganesan K.** A new approach for the solution of fuzzy games. *National Conference on Mathematical Techniques and its Applications (NCMTA 18) IOP Publishing IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1000*. 2018. Pp. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/1000/1/012017.
6. **Khalifa A.** On Solving Two-Person Zero-Sum Fuzzy Matrix Games via Linear Programming Approach. *International Journal of Research in Industrial Engineering*. 2019. Vol. 8. No 1. Pp. 17–27.

7. **Xia Zh., Hao S., X. Jin, Moses O. E.** On characterization of equilibrium strategy for matrix games with L-R fuzzy payoffs. *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2021. Vol. 64. Issue 3. Pp. 158–174.
8. **Maschenko S. O.** On a value of matrix game with fuzzy sets of player strategies. *Fuzzy Sets and Systems*. 2024. Vol. 477. Article no 108798. DOI: 10.1016/j.fss.2023.108798.
9. **Orlova L.** Combined use of statistical and Antagonistic Games. *Computer and Industrial Engineering*. November 2021. Vol. 161. Pp. 7–19.
10. **Chernov V.G.** Decision Making in a Conflict Situation with Fuzzy Types of Participants. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatiye resheniy* [Artificial Intelligence and Decision Making]. 2022. No 4. Pp. 24–36. (In Russ.)
11. **Voroncov Ya. A., Matveev M. G.** Methods of parameterized comparison of fuzzy and trapezoidal numbers. *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologi* [VSU Bulletin. Series: Systems Analysis and Information Technology]. 2014. No 2. Pp. 90–97. (In Russ.)
12. **Ukhobotov V. I., Stabulit I. S., Kudryavtsev K. N.** Comparison of fuzzy numbers of triangular type. *Vestnik Udmurtskogo uni versiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2019. Vol. 29. Issue 2. Pp. 197–210. (In Russ.)
13. **Rao P. P. B., Shankar N. R.** Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spread and weight. *International Journal of Applied Science and Engineering*. 2012. Vol. 1. No 10. Pp. 41–57.
14. **Ibragimov V. A.** *Elementy nechetkoy matematiki* [Fuzzy math elements]. Baku: Armavir State Pedagogical University Publ., 2010. 392 p. (In Russ.)
15. **Dubois D., Prade H.** New results about properties and semantics of fuzzy-set-theoretic operators. *Fuzzy Sets*. Ed. by P. P. Wang and S. K. Chang. N.Y.: Plenum Press, 1980. Pp. 59–75.

16. **Yager R. R.** On solving fuzzy mathematical relationships. *Information and Control*. 1970. Vol. 41. No 1. Pp. 29–55.
17. **Capocelli R., De Luca A.** Fuzzy sets and decision theory. *Information and Control*. 1973. Vol. 23. Pp. 44–47.

Сведения об авторе / Information about author

Чернов Владимир Георгиевич / Vladimir G. Chernov

д.э.н., профессор, профессор кафедры вычислительной техники и систем управления / Doctor of Economics, Professor, Professor of the Department of Computer Science and Control Systems

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых / Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs

Россия, 600000, Владимирская область, г. Владимир, ул. Горького, 87 / 87, Gorky street, Vladimir city, Vladimir region, 600000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 21.09.2025

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 09.11.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025

ИНФОРМАТИКА

COMPUTER SCIENCES

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.*

*Выпуск 4 (57)*

*Bulletin of Syktovkar University.*

*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)*

Научная статья

УДК 004.5

[https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_38](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_38)

## АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ БАЗАМИ ДАННЫХ

**Юрий Валентинович Гольчевский,**

**Иван Дмитриевич Захаров**

Сыктывкарский государственный университет

имени Питирима Сорокина, yurygol@mail.ru, zakharovid@syktsu.ru

**Аннотация.** Требования бизнеса, приведшие к значительному увеличению объёмов накапливаемой и обрабатываемой информации, обусловили необходимость перехода от технологий, использовавшихся в простых системах управления базами данных, к технологиям для работы с платформами больших данных. Понимание истории развития технологий баз данных и дальнейшее прогнозирование их развития является важной задачей для обеспечения качественного обучения будущих ИТ-специалистов, проведения актуальных исследований и развития отечественного программного обеспечения. В данной работе представлены этапы трансформации взглядов и технологий систем управления базами данных.

**Ключевые слова:** системы управления базами данных, развитие баз данных, тенденции развития, отечественный рынок СУБД

**Для цитирования:** Гольчевский Ю. В., Захаров И. Д. Анализ развития систем управления базами данных // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2025. Вып. 4 (57). С. 38–58. [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_38](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_38)

Article

## DEVELOPMENT OF DATABASE MANAGEMENT SYSTEMS ANALYSIS

Yuriy V. Golchevskiy, Ivan D. Zakharov

Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,  
yurygol@mail.ru, zakharovid@syktsu.ru

**Abstract.** Business demands have become one of the most important challenges in the development of databases and necessitated a transition from technologies used in simple database management systems to technologies for working with big data platforms. Comprehension of the database technologies history and further forecasting their development is an important task to ensure high-quality training for future IT-professionals, to conduct relevant research and development of domestic software and to design competitive domestic software products. This paper presents the transformation stages of views and technologies of database management systems.

**Keywords:** database management systems, database development, development trends, domestic DBMS market

**For citation:** Golchevskiy Yu. V., Zakharov I. D. Development of database management systems analysis. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 38–58. (In Russ.) [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_38](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_38)

### 1. Введение

Любое современное программное обеспечение в процессе своей работы активно взаимодействует с различными данными. Таким образом, возникает потребность в организации данных, их хранении и предоставлении удобного доступа к ним. Чаще всего для этого используются

базы данных (БД). База данных — это коллекция хорошо организованных данных, где они хранятся в структурированном виде с четко определёнными взаимосвязями между ними [1]. Для управления большими БД необходимы надёжные, безопасные и удобные в использовании инструменты. Эти возможности предоставляет система управления базами данных (СУБД).

СУБД заменили файловые системы, предоставив общее хранилище данных, которое одновременно может использоваться многочисленными приложениями и пользователями. С 1960 года было разработано множество моделей БД и их активное развитие продолжается до сих пор. Ограничиваясь размером статьи, остановимся на наиболее важных, на наш взгляд, аспектах.

Цель данной статьи — выполнить анализ истории развития систем управления базами данных, обобщить актуальные данные о них и выявить возможные направления развития отечественного рынка СУБД. Отдельно хотелось бы отметить, что в рамки данного исследования не входят вопросы, связанные с появлением и развитием подходов к управлению данными на основе разработки хранилищ данных и озёр данных, которым было уделено внимание в работе [2] и которые являются самостоятельным большим аспектом, требующим отдельного представления и обсуждения.

## **2. Развитие баз данных: от файлов до реляционной модели**

В период активного развития вычислительной техники во второй половине XX века значительно повысилась необходимость в организации и хранении данных. В начале 1960-х годов данные хранились на магнитных лентах и управлялись с помощью перфокарт, что было медленно, неудобно и требовало значительных усилий для управления данными. Были необходимы более эффективные способы работы, что привело к разработке первых СУБД [3].

Первая модель базы данных — иерархическая, была разработана в 1960-х годах. В иерархической модели данные организованы в виде дерева, где каждый узел имеет один родитель и множество потомков. Такая структура обеспечивает быстрый доступ к данным, но ограничивает гибкость, так как каждый элемент данных может иметь только одну связь типа «родитель – потомок». Таким образом, можно было реализовать только отношения «один-ко-многим» или «один-к-одному». Примером иерархической СУБД является IMS (Information Management

System), разработанная IBM для поддержки коммерческих приложений, например системы управления запасами и бухгалтерский учёт.

Следующим шагом в развитии стала сетевая модель данных, опубликованная как спецификация модели CODASYL (Conference on Data Systems Languages). Основное отличие сетевой модели от иерархической состояло в том, что она позволила реализовать между элементами данных связи «многие-ко-многим». Это обеспечивало большую гибкость по сравнению с иерархической моделью и давало возможность проектировать и использовать структуры данных большей сложности. Однако сетевая модель решала не все имевшиеся проблемы. В частности, оставались нерешёнными некоторые вопросы, связанные с согласованностью и безопасностью данных.

В 1970 году была предложена реляционная модель данных, в которой данные представляются в виде таблиц, являющихся естественным для человека способом структурирования данных. Эта модель отделила логическую структуру данных от их физического хранения, что позволило пользователям задавать запросы на высоком уровне абстракции с помощью «языка структурированных запросов» (SQL). Впервые он был стандартизирован в 1985 году [4]. SQL стал стандартом для работы с реляционными базами данных, что упростило их внедрение и использование в различных приложениях.

Также реляционные СУБД (РСУБД) обеспечивают надёжную и предсказуемую работу благодаря четырём принципам ACID, которые были сформированы в конце 1970-х годов Джимом Греем. К этим принципам относятся: атомарность, согласованность, изоляция и устойчивость. РСУБД получили широкое распространение. Согласно рейтингу популярности сайта DB-Engines (<https://db-engines.com/en/ranking>), первые места занимают представители этого вида СУБД.

В 1980-х годах начала развиваться концепция объектно-ориентированных баз данных (ООБД). Они интегрировали принципы объектно-ориентированного программирования с возможностями БД, что позволило лучше управлять сложными данными и их взаимосвязями. В отличие от реляционных моделей ООБД поддерживали хранение объектов, включающих как данные, так и методы их обработки, что позволяло разработчикам работать с данными в тех же терминах, что и в их программных приложениях.

Самой большой проблемой ООБД была миграция существующей БД на ООБД, так как для перехода требуется полная перестройка «с нуля»,

а также обычно привязка к определённому языку программирования, что несколько снижает гибкость такого подхода.

Создание объектно-реляционной базы данных (ОРБД) стало попыткой преодоления разрыва между реляционными БД и техниками, используемыми в объектно-ориентированных языках программирования. ОРБД объединили преимущества обеих моделей. С одной стороны, они предоставили востребованные возможности реляционной модели — простоту и мощь SQL. С другой — предоставили поддержку объектно-ориентированной концепции: наследования и инкапсуляции. Это в конечном счете дало пользователям возможность создавать сложные иерархии объектов и одновременно использовать возможности РСУБД для управления данными и выполнения сложных запросов.

### **3. Переход к масштабируемым моделям данных (NoSQL, NewSQL)**

Быстрое развитие интернет-технологий и вызванное им увеличение объёмов обрабатываемых данных в начале XXI века привело к пониманию того, что РСУБД не могут эффективно справляться с новыми задачами. Растущие интернет-компании столкнулись с проблемой обработки огромных массивов данных в реальном времени. Это требовало новых подходов к управлению данными и привело к появлению Not Only SQL (NoSQL)-подходов, предлагающих альтернативные методы хранения и обработки данных [5; 6].

Современное значение NoSQL-системы получили в 2009 году в результате обсуждения open-source распределённых БД. Термин NoSQL не имеет общепризнанного определения и обозначает нереляционное распределённое хранилище данных, которое не обеспечивает гарантии ACID. Not Only SQL БД разделяются по различным типам хранения данных: ключ-значение, документо-ориентированные, графовые и иные.

NoSQL-системы разработаны для решения проблем масштабируемости и производительности в распределённых системах. Оптимизация операций добавления и извлечения привела к заметному росту производительности при работе с большими объёмами данных. Эти БД часто используются для приложений, требующих высокой доступности и горизонтального масштабирования, таких, например, как социальные сети, интернет-магазины и системы аналитики данных.

NewSQL БД появились в начале 2010-х годов и стали попыткой объединить преимущества РСУБД, заключающиеся в поддержке ACID-транзакций и использование SQL, с возможностями горизонтального масштабирования, присущими NoSQL-системам. Подобные системы используют такие технологии, как распределённые транзакции и согласованное реплицирование для обеспечения высокой производительности и надёжности данных. Примеров NewSQL-систем относительно немного в силу того, что они пока не успели получить широкое распространение из-за своей новизны, повышенной сложности разработки и внедрения. Примерно в это же время формулируются подходы к построению систем, не основывающиеся на принципах ACID. Появляются теорема CAP и теорема PACELC, описывающие ограничения и компромиссные решения распределённых БД в отношении согласованности, доступности и допустимости разделения.

Таким образом, эволюция СУБД от иерархических и сетевых моделей к реляционным, а затем к NoSQL и NewSQL, отражает динамику изменений в потребностях управления данными и технологических возможностях. Примеры СУБД, реализующие упомянутые модели данных, представлены в табл.

Таблица

Примеры СУБД на основе различных моделей данных

| Модели данных            | СУБД   |
|--------------------------|--|
| Иерархические            | IBM IMS, RDM   |
| Сетевые                  | Интегрированное хранилище данных (IDS),<br>Интегрированная система управления базами данных (IDMS) |
| Реляционные              | MySQL, MariaDB, Oracle, SQL Server   |
| Объектно-ориентированные | Realm, Objectivity/DB  |
| Объектно-реляционные     | IBM's DB2, Oracle Database, PostgreSQL   |
| NoSQL                    | MongoDB, Cassandra DB  |
| NewSQL                   | VoltDB, MemSQL, NuoDB  |

Термин «многовариантное хранение» появился в 2011 году, а в 2016 году аналитики Gartner сформулировали тезис, что будущее СУБД, архитектур и способов использования за мультимодельностью — использованием реляционных и нереляционных моделей в составе единой платформы. Действительно, восемь из топ-10 в рейтинге СУБД

DB-Engines Ranking за июль 2025 года позиционируют себя как мультимодельные.

Мультимодельные БД поддерживают различные типы данных (реляционные таблицы, документы, графы, ключ-значение), что позволяет эффективно управлять разнородной информацией в одной системе. Одним из основных их достоинств является использование одного движка для обработки различных типов данных и предоставление единого языка запросов и API для всех поддерживаемых моделей данных. Это упрощает интеграцию и сокращает затраты на разработку и обслуживание. Некоторые СУБД предлагают движки, способные поддерживать различные модели данных, другие имеют многоуровневую архитектуру с отдельными компонентами для каждой модели. Например, Oracle изначально работала с реляционными БД, а сейчас работает так же, как графовая и документная. ArangoDB поддерживает графы, документы JSON и модель «ключ-значение» в качестве основного функционала и использует унифицированный язык запросов AQL (ArangoDB Query Language).

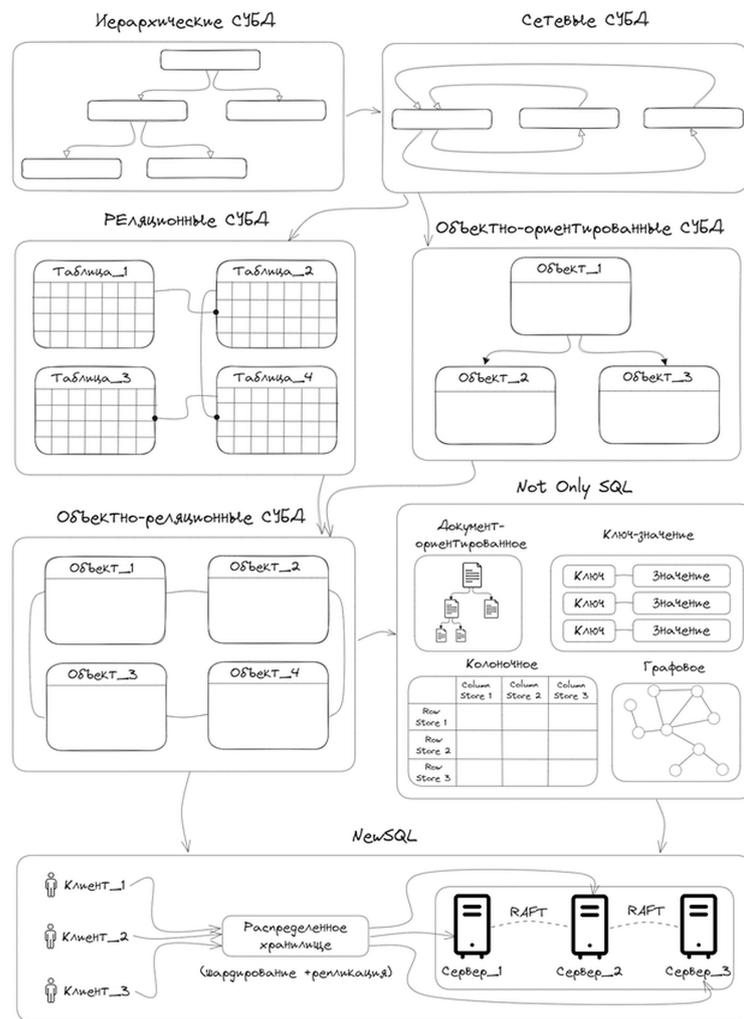
Мультимодельные СУБД часто используются в приложениях, требующих интеграции данных из различных источников, например текстовых документов, изображений, данных социальных сетей и т. п.

Каждая новая модель данных отвечала новым специфическим требованиям, обеспечивая большую эффективность и гибкость управления данными. Описанная эволюция моделей данных представлена на рис.

#### **4. Анализ современных тенденций развития СУБД**

Современные информационные потребности, приводящие к постоянному увеличению объемов данных, требуют новых подходов для обеспечения высокой производительности, масштабируемости и гибкости. Эти требования начали формироваться в начале 2010-х годов, когда стало понятно, что традиционные подходы становятся неэффективными и требуются новые решения. В 2010 году в качестве основных приоритетных направлений исследования были выделены [7]:

- проектирование архитектуры новых моделей данных и СУБД для того, чтобы преодолеть ограничения существующих РСУБД, показывающих низкое соотношение цена / производительность;
- поддержка независимости данных, декларативного программирования для новых платформ;



Эволюция моделей данных

- разработка методик эффективного управления коллекциями разнородных структурированных, полуструктурированных и неструктурированных данных, распределённых по разнообразным репозиториям, что в дальнейшем вылилось в развитие концепций и технологий хранилищ данных и озёр данных;
- исследования в области улучшения управляемости облачных баз данных и интегрированных облачных архитектур;
- управление огромными объёмами разнообразных пользовательских данных, включая виртуальные миры, и сервисы в реальном времени.

Тенденции, заложенные в 2010 году, не только сохранили свою актуальность, но и усилились. Развитие интернета вещей, социальных сетей и облачных вычислений требует постоянного обновления технологий для эффективного управления растущими объёмами данных. Например, мультимодельные и облачные БД продолжают развиваться и в последние годы уже стали стандартом де-факто в индустрии [8].

Реляционный подход ориентирован на вертикальное масштабирование, что означает увеличение мощности одного сервера для обработки больших объёмов данных. Однако такое решение становится дорогим и технически сложным по мере роста количества информации и увеличения требований к производительности. Поэтому сейчас чаще обращаются к более современным решениям, способным удовлетворять высокие требования по объёму, скорости и разнообразию данных [9].

В последнее десятилетие большую популярность приобрела микросервисная архитектура, позволяющая разрабатывать системы, где каждый сервис получает собственную, оптимально настроенную базу данных [10]. Например, модуль авторизации использует небольшую БД для выполнения операций проверки прав и токенизации, а подсистема аналитики работает с базой, ориентированной на сложные аналитические запросы. Такой подход обеспечивает независимость компонентов, упрощая масштабирование и позволяя внедрять новый функционал, сохраняя устойчивость всей системы.

Дополнительная гибкость микросервисной архитектуры обеспечивается контейнеризацией (Docker и другие платформы). Она даёт возможность быстро развернуть несколько экземпляров баз данных и динамически перераспределять нагрузку. Управлять подобными контейнеризованными инфраструктурами помогают системы оркестрации (Kubernetes, Docker Swarm), в то время как балансировщики (например, NGINX или HAProxy) позволяют равномерно распределять запросы и гарантировать высокую доступность [11].

Для повышения производительности и уменьшения нагрузки на СУБД активно применяются брокеры сообщений, например Apache Kafka и RabbitMQ. Асинхронная передача данных помогает масштабировать систему и более эффективно проходить пиковые нагрузки. Например, аналитические данные могут поступать в базу постепенно, без перегрузки центрального сервера, что позволяет достичь высокой производительности системы в целом.

Облачные технологии оказывают огромное влияние на развитие современных СУБД, предлагая такие преимущества, как высокая доступность, масштабируемость и гибкость, поддержка реляционных и NoSQL-моделей, а также мультимодельных БД. Они предоставляют услуги в формате «База данных как сервис» (Database as a Service, DBaaS), что освобождает организации от необходимости самостоятельного управления инфраструктурой данных и позволяет сосредоточиться на развитии своих приложений.

Один из наиболее заметных современных трендов — интеграция искусственного интеллекта в СУБД. Однако исследования и разработки в области их интеграции ещё требуют усилий. Некоторые методы их объединения представлены в работах [12], [13]. Например, искусственный интеллект способен автоматизировать рутинные задачи, такие как очистка, трансформации и интеграции данных, индексация и генерация отчётов, создание научных БД [14] и т. п. Это значительно упрощает подготовку данных для последующего анализа. Также он может автоматически накапливать и анализировать данные о рабочей нагрузке и на их основании масштабировать и распределять ресурсы для повышения производительности БД. Informatica Intelligent Data Management Cloud использует искусственный интеллект для автоматизации управления данными на протяжении всего их жизненного цикла, включая предсказательное обслуживание для предотвращения сбоев и оптимизацию рабочих нагрузок.

Ещё одна сфера применения — улучшение качества данных, например идентификация и исправление несоответствий, ошибок и дубликатов, обеспечение безопасности. Так, платформа Immuta использует инструменты автоматизации отслеживания происхождения различных данных для обеспечения безопасности.

Искусственный интеллект также активно используется для оптимизации запросов на основе использования методов обработки естественного языка. Пользователи могут задавать вопросы на естественном языке и получать требуемые данные без необходимости написания сложных SQL-запросов.

## 5. Российский рынок СУБД

История развития отечественных технологий БД тесно связана с общемировыми достижениями и технологическими решениями. В СССР множеством научно-исследовательских институтов разрабатывались

разные типы СУБД для актуальных на тот момент отечественных и зарубежных компьютерных архитектур и операционных систем. В качестве примера можно привести такие продукты, как СУБД-Р — одну из первых отечественных РСУБД, созданную на основе модели Кодда, разработанную для обработки больших объёмов данных и документации автоматизированную систему комплексного документооборота АСКД, семейство совместимых РСУБД ПАЛЬМА для платформ ЕС ЭВМ, СМ ЭВМ и IBM-совместимых персональных компьютеров. Подробнее этот вопрос представлен в книге М. Р. Когаловского [15].

Современный российский рынок СУБД претерпевает значительные изменения, особенно в свете текущей политической ситуации и развития тенденций к импортозамещению. С 2022 года в России наблюдается значительное сокращение закупок иностранного программного обеспечения, что привело к увеличению доли отечественных продуктов. Так, доля контрактов с российскими поставщиками СУБД составила около 96 % от общего объёма государственных закупок, в то время как в 2021 году эта цифра была около 85 % в пользу зарубежных продуктов [16]. В целом объём российского рынка СУБД в 2023 году составил более 29 млрд рублей, из которых почти 58,5 % приходилось на российских вендоров [17]. В 2023 году на зарубежные продукты приходилось менее 20 % российского рынка СУБД, причём основная доля этого значения определялась необходимостью поддержки приобретённых ранее иностранных решений. Подчеркнём, что здесь и далее мы не будем рассматривать облачные отечественные решения и сервисы для промышленного интернета вещей и для работы с большими данными.

Лидером рынка отечественных СУБД является компания Postgres Professional (ООО «ППП»), которая использует проект с открытым исходным кодом PostgreSQL в качестве основы для своей СУБД Postgres Pro (<https://postgrespro.ru/>). На рынке разработчиков СУБД России представлена более 10 лет, и на сегодняшний день по разным оценкам доля компании составляет до четверти рынка.

Она обеспечивает надёжную быструю обработку данных под большой нагрузкой за счёт использования многоверсионности. Обеспечение хорошей горизонтальной масштабируемости за счёт автоматического распределения данных и запросов по кластеру с сохранением доступности и согласованности. Имеются различные инструменты управления жизненным циклом информации, снижающие затраты на хранение данных и сохраняющие производительность БД, используя встро-

енный механизм сжатия данных. Автоматизация переноса данных и кода приложений БД с Oracle на Postgres Pro: сканирование структуры, генерация SQL-скриптов для миграции. Графическая платформа обеспечивает простое управление СУБД; отображает ключевые процессы, позволяет создавать БД, управлять ими, выполнять настройку и конфигурирование СУБД, проводить мониторинг работы СУБД.

СУБД совместима с более чем четырьмястами российскими решениями, включая популярные аппаратные платформы и операционные системы и различное прикладное программное обеспечение (более подробную информацию по совместимости можно найти на сайте продукта).

Компания вообще уделяет значительное внимание развитию российской отрасли СУБД: выпускает книги, разрабатывает и свободно распространяет курсы для высшего и дополнительного профессионального образования, проводит сертификацию специалистов по PostgreSQL, переводит на русский язык и публикует техническую документацию к новым версиям PostgreSQL. Также ежегодно организует крупнейшую в России отраслевую техническую конференцию PGConf.Russia, а с прошлого года — ещё ежегодную практическую конференцию PGConf.Academy для сотрудников и преподавателей, осуществляющих подготовку ИТ-специалистов.

Линтер (Linter) — полностью отечественная РСУБД, разработанная АО НПП «Релэкс» (<https://relex.ru/ru/dbms/>). На рынке с 1990 года, компания использует собственные запатентованные решения. СУБД не основана на продуктах с открытым исходным кодом.

СУБД Линтер помогает сокращать расходы на владение программным обеспечением, предоставляет необходимые инструменты мониторинга за состоянием СУБД, обеспечивает достаточную лёгкость его интеграции в существующие приложения и инструменты работы с БД, что позволяет легко интегрировать Линтер в ИТ-проекты.

Данный продукт обеспечивает высокий уровень безопасности сведений, минимизируя возможность их утечки, полностью соответствует российским стандартам в области информационной безопасности, предоставляет возможности горячего резервирования БД и их последующего восстановления.

Работает на различных операционных системах семейства Microsoft Windows, AstraLinux, РОСА, РедОС, что обеспечивает гибкость при развёртывании и эксплуатации системы.

Отдельно можно упомянуть новый продукт компании «Релэкс», СУБД SoQoL — реляционную СУБД для систем с высокой нагрузкой, являющуюся классической дисковой СУБД (<https://soqol.ru/>). Работает SoQoL в среде Linux (Ubuntu, Debian) и Microsoft Windows 10 и выше, тестировалась в операционной системе Эльбрус, находится в процессе подтверждения совместимости с российскими операционными системами Альт Linux, AstraLinux, РОСА, РедОС. Из характеристик можно обратить внимание на следующие: исполнение всех требований ACID, реляционная модель данных, привычный SQL и программные интерфейсы. Продукт полностью контролируется российской компанией и разрабатывается по требованиям сертифицирующих органов.

Ред База Данных — это РСУБД с открытым кодом, ядро которой основано на Firebird (<https://rdb.red-soft.ru/>). Используется в решениях различного масштаба, начиная от небольших фирм и до крупного бизнеса. Распространяется в стандартной и промышленной редакции. Стандартная редакция включает усиленные опции безопасности, контроль целостности файлов. Промышленная редакция предназначена для крупных компаний. Функционал в этой версии дополнен возможностью кластеризации, дополнительными способами аутентификации и др. Работает на всех основных популярных операционных системах зарубежного и российского производства (РедОС, Альт Linux, AstraLinux, РОСА).

Ред База Данных является прямым конкурентом Microsoft SQL Server и достойной альтернативой зарубежным разработкам.

Объектно-реляционная СУБД Лира-Р (<https://lira.нпшкт.рф/>) основана на открытой версии PostgreSQL и предназначена для разработки защищённых информационных систем, обрабатывающих конфиденциальную информацию, имеет открытую расширяемую архитектуру. Она обеспечивает работу с различными типами данных, включает поддержку нереляционных форматов типов данных, позволяет добавлять новые типы данных, обеспечивает поддержку полнотекстового поиска, имеет гибкую систему назначения прав доступа, а также несколько методов аутентификации и авторизации пользователей. Также имеет средства доступа к данным Microsoft SQL Server, MySQL (может конкурировать с ними) и Oracle DB, расширения поддержки продуктов компании «1С». Функционирует под управлением отечественных операционных систем Основа, Стрелец, РедОС, Альт Linux, AstraLinux и основных зарубежных систем на базе Linux, UNIX, а также Microsoft Windows.

Ядро СУБД Jatoba (<https://jatoba.ru/>) также построено на основе открытой версии PostgreSQL и может использоваться для управления реляционными БД организаций разного размера, вплоть до больших корпораций. Разработана компанией «Газинформсервис». Из характеристик можно упомянуть о наличии инструмента, препятствующего возможности чтения данных в случае кражи, механизма защиты исходного кода от реверс-инжиниринга, SQL Firewall для выявления нетипичных SQL-запросов. Предоставляются возможности для упрощения миграции с Oracle DB и Microsoft SQL Server, достаточно простой графический интерфейс для работы с СУБД. Поддерживается работа с программной платформой «1С: Предприятие». Функционирует под управлением отечественных операционных систем ОСнова, РедОС, Альт Linux, AstraLinux, РОСА и зарубежных систем Linux (Ubuntu, Debian, Oracle) и Microsoft Windows.

Также можно упомянуть другие продукты из реестра отечественного программного обеспечения, которые можно рассматривать в качестве потенциальных вариантов для перехода с иностранных СУБД. Среди них:

- объектно-реляционная СУБД Квант-Гибрид (<https://granit-concern.ru/products/>), обеспечивающая высокую производительность и встроенное шифрование по ГОСТу;
- ProximaDB (<https://www.orionsoft.ru>), реализована на базе PostgreSQL, появилась в 2019 году. Предлагает высокую скорость развёртывания. Хотя дальнейшие перспективы развития данного продукта пока не очень понятны;
- Arenadata Postgres, ADPG (<https://arenadata.tech/products/arenadata-postgres/>), СУБД для работы с короткими транзакциями OLTP с несложными аналитическими OLAP-запросами. Предлагает аналитические витрины с небольшими объёмами информации, отказоустойчивость, инкрементальное резервное копирование и восстановление, управление пулом соединений и вендорский консалтинг, работу под управлением российских операционных систем РедОС, Альт Linux, AstraLinux, а также Ubuntu, CentOS и др.

Рынок СУБД является крупнейшим сегментом рынка инфраструктурного программного обеспечения в России. На нём есть один «глав-

ный продукт» (Postgres Pro) и множество более мелких конкурентов. При этом объём рынка, высвободившийся с уходом Oracle и других крупных иностранных игроков, позволяет развиваться нескольким крупным отечественным игрокам.

Можно выделить несколько факторов, способствующих дальнейшему развитию отечественных СУБД и улучшению положения их разработчиков. Во-первых, фактор роста запроса на импортозамещение зарубежных программных продуктов, сопровождаемый усилением требований государственных регуляторов к кибербезопасности и наличием разнообразных видов поддержки разработчиков со стороны государства. То есть явно прослеживается ключевая роль государства в развитии ИТ-рынка. Так, 3 июля 2025 года председатель Правительства Российской Федерации Михаил Мишустин дал поручение, обязывающее операторов персональных данных в России использовать исключительно отечественное программное обеспечение, включая СУБД. Во-вторых, достаточно быстрый рост качества, функциональности и пригодности продуктов, обусловленный накоплением опыта реализации большого числа проектов и соответствующего роста профессионального уровня команд разработки, внедрения и поддержки. Хотя развитие отечественных СУБД основывалось на программном обеспечении с открытым исходным кодом, главным образом на PostgreSQL, сейчас существующие отечественные решения по многим параметрам становятся в один ряд с мировыми, а по адаптации к российским реалиям часто обгоняют их. Это даёт возможность продолжать процесс импортозамещения и формирования технологического суверенитета.

Российские разработки в области СУБД могут использоваться как внутри страны, так и на международных рынках, что способствует дальнейшему росту и развитию этой отрасли.

## **6. Заключение**

В результате проведенного анализа развития систем управления базами данных была представлена история эволюции моделей данных, выявлены основные аспекты текущего состояния СУБД, включая исследование развития отечественного рынка, а также рассмотрены тренды и перспективы дальнейшего развития технологий работы с БД.

Современный рынок СУБД характеризуется сочетанием традиционных реляционных решений и сравнительно новых моделей данных (NoSQL, NewSQL, мультимодельные платформы). Практически не про-

исходит полного замещения одних моделей другими — модели не «отмирают», а гармонично трансформируются вместе с обновлением аппаратных решений и появлением новых программных технологий. Облачные технологии, сервисы DBaaS и интеграция с искусственным интеллектом играют всё возрастающую роль, обеспечивая повышенную гибкость, масштабируемость и автоматизацию рутинных операций. При этом безопасность и защита конфиденциальных данных остаются приоритетными задачами из-за роста количества разнообразных кибератак.

В перспективе ожидается дальнейшее развитие мультимодельных и полиморфных СУБД, более глубокая интеграция систем с интернетом вещей и квантовыми вычислениями, а также усиление позиций отечественных разработок. Данные тенденции в совокупности формируют динамичную картину рынка, где выбор конкретного решения определяется балансом между производительностью, масштабируемостью и требованиями к безопасности.

## Список источников

1. **Patel S., Choudhary J., Patil G.** Revolution of Database Management System: A literature Survey // *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2023. Vol. 71. No 7. Pp. 189–200. DOI: 10.14445/22315381/IJETT-V71I7P218.
2. **Гольчевский Ю. В.** Изменения в подходах к обработке данных — озера данных // *Тридцать вторая годовичная сессия Учёного совета Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина [Электронный ресурс]: Февральские чтения. Национальная конференция : сборник статей: Часть 1 / отв. ред. Н. Н. Новикова*. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2025. С. 460–466. EDN: AFDELG.
3. **Berg K. L., Seymour T., Goel R.** History Of Databases // *International Journal of Management & Information Systems*. 2012. Vol. 17. No 1. Pp. 29–36. DOI: 10.19030/ijmis.v17i1.7587.
4. **Любченко Д. П.** История возникновения баз данных // *Вестник науки*. 2019. Т. 3. № 10 (19). С. 87–90. EDN: GOERUF.

5. **Верещагин А. А., Тотмянин Н. Р.** Преимущества и недостатки нереляционных баз данных // *Научный аспект*. 2024. № 3. С. 3571–3575. EDN: BXDFAO.
6. **Sarasa-Cabezuelo А.** New Trends in Databases to NonSQL Databases // *Encyclopedia of Information Science and Technology. Fifth Edition* / ed. by Mehdi Khosrow-Pour D.B.A. Hershey: IGI Global Scientific Publishing, 2021. Pp. 791–799. DOI: 10.4018/978-1-7998-3479-3.ch054.
7. **Feuerlicht G.** Database Trends and Directions: Current Challenges and Opportunities // *Proceedings of the DATESO 2010 Annual International Workshop on Databases, TExtS, Specifications and Objects. Stedronin-Plazy, Czech Republic, April 21–23, 2010* / ed. by J. Pokorný, V. Snášel, K. Richta. CEUR Workshop Proceedings. 2010. Vol. 567. Pp. 163–174. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-567/invited1.pdf> (дата обращения: 12.05.2025).
8. **Lieponienė J.** Recent Trends in Database Technology // *Baltic Journal of Modern Computing*. 2020. Vol. 8. No 4. Pp. 551–559. DOI: 10.22364/bjmc.2020.8.4.06.
9. **Akinola S.** Trends in Open Source RDBMS: Performance, Scalability and Security Insights // *Journal of Research in Science and Engineering*. 2024. Vol. 6. No 7. Pp. 22–28. DOI: 10.53469/jrse.2024.06(07).05.
10. **Гольчевский Ю. В., Ермоленко А. В.** Актуальность использования микросервисов при разработке информационных систем // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 35. № 2. С. 25–36. EDN: MYITJK.
11. **Селезнёв А. И.** Технологии виртуализации в системах обработки данных : автореф. дис. ... магистра тех. наук: 1-45 80 01. Минск: Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2024. 10 с.
12. **Shaw B., Halder B., Sen S., Basak S., Bhattacharya S.** AI DBMS in modern-day applications // *American Journal of Advanced Computing*. 2023. Vol. 2. No 1. URL: <https://ajac.smartsociety.org/wp-content/uploads/2023/10/vol-2-iss-1.1.pdf> (дата обращения: 12.05.2025).

13. **Khan M., Bibi S., Toor M., Rashid M.** Role Of Artificial Intelligence in Big Database Management // *The Asian Bulletin of Big Data Management*. 2024. Vol. 4. No 2. Pp. 186–194. DOI: 10.62019/abbdm.v4i02.164.
14. **Шестакова М. А.** Разработка и заполнение базы данных «Миоспоры позднего палеозоя» с использованием технологий искусственного интеллекта // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2025. Т. 54. № 1. С. 52–68. EDN: ILYNQM.
15. **Когаловский М. Р.** Энциклопедия технологий баз данных. М.: Финансы и статистика, 2002. 800 с. EDN: UWBSTT.
16. **Гурьянов В. И., Гурьянова Э. А.** Анализ тенденций рынка СУБД в России // *Казанский экономический вестник*. 2023. № 3. С. 88–92. EDN: SIJERJ.
17. **Травкина Е. А.** Развитие отечественного рынка инфраструктурного программного обеспечения в условиях внешнеэкономических ограничений // *Вектор экономики*. 2024. № 10. URL: <https://vectoreconomy.ru/images/publications/2024/10/marketing-andmanagement/Travkina2.pdf> (дата обращения: 12.05.2025). EDN: BGDQQK.

## References

1. **Patel S., Choudhary J., Patil G.** Revolution of Database Management System: A literature Survey. *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2023. Vol. 71. No 7. Pp. 189–200. DOI: 10.14445/22315381/IJETT-V71I7P218.
2. **Golchevskiy Yu. V.** Changes in approaches to data processing — data lakes. *Tridtsat' vtoraya godichnaya sessiya Uchonogo soveta Syktyvkarского gosudarstvennogo universiteta imeni Pitirima Sorokina [Elektronnyy resurs]: Fevral'skiye chteniya: Natsional'naya konferentsiya : sbornik statey: Chast' 1 / otv. red. N. N. Novikova [Thirty-second annual session of the Academic Council of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University [Electronic resource] : February Readings: National Conference : Collection of Articles: Part 1]*.

- Ed. by N. N. Novikova. Syktyvkar: Pitirim Sorokin Syktyvkar State University. 2025. Pp. 460–466. EDN: AFDELG. (In Russ.)
3. **Berg K. L., Seymour T., Goel R.** History Of Databases. *International Journal of Management & Information Systems*. 2012. Vol. 17. No 1. Pp. 29–36. DOI: 10.19030/ijmis.v17i1.7587.
  4. **Lyubchenko D. P.** History of the emergence of databases. *Vestnik nauki* [Bulletin of Science]. 2019. Vol. 3. No 10 (19). Pp. 87–90. EDN: GOERUF. (In Russ.)
  5. **Vereshchagin A. A., Totmyanin N. R.** Advantages and disadvantages of non-relational databases. *Nauchnyy aspekt* [Scientific aspect]. 2024. No 3. Pp. 3571–3575. EDN: BXDFAO. (In Russ.)
  6. **Sarasa-Cabezuelo A.** New Trends in Databases to NonSQL Databases. *Encyclopedia of Information Science and Technology. Fifth Edition*. Ed. by Mehdi Khosrow-Pour D.B.A. Hershey: IGI Global Scientific Publishing, 2021. Pp. 791–799. DOI: 10.4018/978-1-7998-3479-3.ch054.
  7. **Feuerlicht G.** Database Trends and Directions: Current Challenges and Opportunities. *Proceedings of the DATESO 2010 Annual International Workshop on Databases, TExtS, Specifications and Objects. Stedronin-Plazy, Czech Republic, April 21–23, 2010*. Ed. by J. Pokorný, V. Snášel, K. Richta. CEUR Workshop Proceedings. 2010. Vol. 567. Pp. 163–174. Available at: <https://ceur-ws.org/Vol-567/invited1.pdf> (accessed: 12.05.2025).
  8. **Lieponienė J.** Recent Trends in Database Technology. *Baltic Journal of Modern Computing*. 2020. Vol. 8. No 4. Pp. 551–559. DOI: 10.22364/bjmc.2020.8.4.06.
  9. **Akinola S.** Trends in Open Source RDBMS: Performance, Scalability and Security Insights. *Journal of Research in Science and Engineering*. 2024. Vol. 6. No 7. Pp. 22–28. DOI: 10.53469/jrse.2024.06(07).05.
  10. **Golchevskiy Yu. V., Yermolenko A. V.** The relevance of using microservices in the development of information systems. *Vestnik Syktyvkarского universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics.

- Mechanics. Informatics]. 2020. Vol. 35. No 2. Pp. 25–36. EDN: MYITJK. (In Russ.)
11. **Seleznev A. I.** *Tekhnologii virtualizatsii v sistemakh obrabotki dannykh : avtoref. dis. ... magistra tekhn. nauk: 1-45 80 01* [Virtualization technologies in data processing systems : author's abstract. diss. ... master of technical sciences: 1-45 80 01]. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics. 2024. 10 p. (In Russ.)
  12. **Shaw B., Halder B., Sen S., Basak S., Bhattacharya S.** AI DBMS in modern-day applications. *American Journal of Advanced Computing*. 2023. Vol. 2. No 1. Available at: <https://ajac.smartcommunity.org/wp-content/uploads/2023/10/vol-2-iss-1.1.pdf> (accessed: 12.05.2025).
  13. **Khan M., Bibi S., Toor M., Rashid M.** Role Of Artificial Intelligence in Big Database Management. *The Asian Bulletin of Big Data Management*. 2024. Vol. 4. No 2. Pp. 186–194. DOI: 10.62019/abbdm.v4i02.164.
  14. **Shestakova M. A.** Development and population of the «Late Paleozoic miospores» database using artificial intelligence technologies. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2025. Vol. 54. No 1. Pp. 52–68. EDN: ILYNQM. (In Russ.)
  15. **Kogalovsky M. R.** *Entsiklopediya tekhnologiy baz dannykh* [Encyclopedia of database technologies]. Moscow: Finance and Statistics. 2002. 800 p. EDN: UWBSTT. (In Russ.)
  16. **Gurianov V. I., Gurianova E. A.** Analysis of DBMS market trends in Russia. *Kazan economic vestnik*. 2023. No 3. Pp. 88–92. EDN: SIJERJ. (In Russ.)
  17. **Travkina E. A.** Development of the domestic infrastructure software market in the context of foreign economic constraints. *Vector Ekonomiki* [Vector of Economics]. 2024. No 10. Available at: <https://vectoreconomy.ru/images/publications/2024/10/marketing-andmanagement/Travkina2.pdf> (accessed: 12.05.2025). EDN: BGDQQK. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Гольчевский Юрий Валентинович / Yuriy V. Golchevskiy

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики /  
Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Head of Applied Informatics Department

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Иван Дмитриевич Захаров / Ivan D. Zakharov

Ассистент кафедры прикладной информатики / Assistant Professor of Applied Informatics Department

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 23.10.2025

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 16.11.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

MATHEMATICS EDUCATION

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.*

*Выпуск 4 (57)*

*Bulletin of Syktovkar University.*

*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)*

Научная статья

УДК 517.1, 37.022

[https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_59](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_59)

**ФУНДАМЕНТАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ В КОНТЕКСТЕ ВЫЗОВОВ ЦИФРОВОЙ  
ТРАНСФОРМАЦИИ: ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧЕСКИЙ  
АСПЕКТ**

**Владислав Викторович Сушков**

Сыктывкарский государственный университет

имени Питирима Сорокина, [vvsu@mail.ru](mailto:vvsu@mail.ru)

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема усиления фундаментальной составляющей в математическом образовании студентов профильных направлений (математиков и будущих учителей математики) в условиях цифровой трансформации. Обосновывается тезис о том, что ответом на вызовы, связанные с распространением систем компьютерной алгебры и искусственного интеллекта, является не отказ от глубины освоения классических дисциплин, а стратегическая переориентация образовательного процесса. Обоснована мотивирующая и структурная роль фундаментализации математического образования при формировании содержательных связей между материалом «школьной» и высшей математики. Акцент смещается с отработки вычислительных алгоритмов на формирование способности к критическому анализу, структурному мышлению и рефлексивному

выбору математических методов. Перечисляются ключевые дисциплины, составляющие концептуальное ядро фундаментализации. Предлагаются направления для дальнейших методических исследований исходя из сформулированной концепции.

**Ключевые слова:** фундаментальное математическое образование, цифровая трансформация, искусственный интеллект, математические структуры, методика преподавания математики, профессиональная подготовка

**Для цитирования:** Сушков В. В. Фундаментализация математического образования в контексте вызовов цифровой трансформации: теоретико-методический аспект // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2025. Вып. 4 (57). С. 59–72. [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_59](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_59)

Article

## FUNDAMENTALIZATION OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE CONTEXT OF DIGITAL TRANSFORMATION CHALLENGES: THEORETICAL AND METHODOLOGICAL ASPECT

Vladislav V. Sushkov

Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,  
vvsu@mail.ru

**Abstract.** The article examines the problem of strengthening the fundamental component in the mathematical education of students in specialized areas (mathematicians and mathematics teachers) in the context of digital transformation. The thesis is substantiated that the response to the challenges associated with the proliferation of computer algebra systems and artificial intelligence is not a rejection of the deep study of classical disciplines, but a strategic reorientation of the educational process. The motivating and structural role of the fundamentalization of mathematical education in forming meaningful connections between the content of "school" mathematics and higher mathematics is justified. The emphasis shifts from practicing computational algorithms to developing the ability for critical analysis, structural thinking, and reflective choice of mathematical methods. The key disciplines that constitute the conceptual core of fundamentalization are identified. Directions for

further methodological research are proposed based on the formulated concept.

**Keywords:** fundamental mathematical education, digital transformation, artificial intelligence, mathematical structures, mathematics teaching methodology, professional training

**For citation:** Sushkov V. V. Fundamentalization of mathematical education in the context of digital transformation challenges: theoretical and methodological aspect. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 59–72. (In Russ.) [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_59](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_59)

## 1. Введение

Современная парадигма высшего образования под прессом требований рыночной эффективности демонстрирует значительную тенденцию к прагматизации и узкой специализации. Наблюдается выраженный перекося содержания образовательных программ в сторону развития узкопрофильных или, наоборот, надпрофильных, «междисциплинарных» компетенций в ущерб фундаментальным профессиональным компетенциям, вследствие чего по сути утрачивается системность и глубина подготовки. Сформулированная проблема остро стоит и в области обучения математике, где разрыв между фундаментальным знанием и прикладными технологиями становится все более очевидным. Катализатором тенденции выступает лавинообразное развитие систем искусственного интеллекта, способных к выполнению сложных символических преобразований и генерации решений. В связи с этим актуализируется поиск новой образовательной стратегии, суть которой видится не в отрицании технологического прогресса, а в целенаправленной фундаментализации — построении образовательного процесса вокруг целостного и рефлексивного усвоения абстрактных математических структур, идей и методов, конституирующих каркас современного математического знания.

Известный постулат Л. Д. Кудрявцева «при обучении [математике] надо отобрать основные, принципиальные вопросы (и это должно быть хорошо отражено в программах), которым и следует обучать в первую очередь, на которых и следует сосредоточивать основное внимание» [1], высказанный полвека назад, в современных условиях не только не потерял своей актуальности, но и приобрел особенную значимость.

Неслучайно поэтому, что федеральные государственные образовательные стандарты в области высшего образования требуют воспитывать в обучающихся «способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных наук» [2], равно как и в Концепции развития математического образования в Российской Федерации ставится задача обеспечения «преемственности и фундаментальности математического образования» [3].

При этом важно различать содержательную сторону фундаментализации в обучении математике студентов собственно математических и профильных педагогических направлений подготовки — и тех, для кого математика является в первую очередь инструментом описания моделей в собственной профессиональной сфере.

Действительно, несмотря на то, что объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты, у которых описан ряд отношений между элементами (математические структуры), однако цели изучения математических структур в «чистой» и «прикладной» математике различны: «в первом случае нас интересуют свойства структур сами по себе, во втором — те выводы, которые можно сделать из их изучения о тех реальных объектах, которые они моделируют» [1]. В этом смысле фундаментальная подготовка лежит в основе освоения компетенций технической и естественно-научной направленности: математическое моделирование как безальтернативный метод и средство описания реальных явлений дает возможность не только описывать, но и изучать сами явления, предсказывать их дальнейшее развитие, математические структуры и модели становятся универсальным языком физики, химии, биологии и других естественных наук, метод аналогии позволяет формировать прогнозирование реальной ситуации на основе имеющегося развитого инструментального аппарата с точки зрения используемых математических структур. В условиях лавинообразного роста массива естественно-научных и IT-знаний (специалисты насчитывают уже более десяти тысяч самостоятельных отраслей наук) возникает проблема формирования у обучающихся универсальных трансдисциплинарных умений и системного мышления на основе математических структур, идей, методов и понятий [4; 5].

Однако, несмотря на то, что фундаментальность как таковая является естественным и неотъемлемым свойством математического знания, императив фундаментализации образования остается преобладающим

в том числе и для подготовки будущих математиков и учителей математики, чья профессиональная деятельность связана с продуцированием нового знания и ответственностью за формирование математической культуры у последующих поколений. По определению В. А. Садовниченко, «эталонным образованием может быть только фундаментальное научное образование, главная цель которого — распространение научного знания как неотъемлемой составляющей мировой культуры» [6].

Таким образом, в случае обучения математике студентов «профильных» направлений подготовка проблематика меняет акценты: задача освоения базисных разделов, понятий, методов, моделей не ставится под сомнение. Возникает задача актуализации методики преподавания тех или иных методов, понятий, разделов в новой реальности.

## 2. Материалы и методы

Современный контекст образования, формирующийся на наших глазах, характеризуется в первую очередь всепроникающей цифровой трансформацией. С этой точки зрения проблема фундаментализации обучения математике студентов профильных программ приобретает не академический, а сугубо практический, стратегический характер. Она становится ключевым условием сохранения профессиональной субъектности математика и педагога в мире, где вычислительные и даже эвристические функции стремительно делегируются алгоритмам. Обоснование сформулированного тезиса подразумевает три ключевых аспекта.

Во-первых, фундаментальные знания выступают как основа для критического диалога с технологиями, а не подчинения им. Глубокое понимание структуры, а не просто умение применять технику, становится основой как для верификации результатов, сгенерированных системами искусственного интеллекта и специализированным ПО, так и для проектирования новых, более совершенных алгоритмов. Для педагога это понимание является одним из инструментов для формирования у школьников своеобразного иммунитета, невосприимчивости к математическому «белому шуму». Педагог не может исключить использование систем ИИ, но должен уметь обучить способности отличать корректное решение, предложенное чат-ботом, от логической ошибки, скрытой за формальной убедительностью. В эпоху, когда нейросеть может производить математические тексты и доказательства, подлинным критерием профессионализма становится не умение воспроизводить известное, а способность к метакогнитивной оценке любого результата.

Во-вторых, фундаментализация обеспечивает формирование «языка для описания будущего». Цифровая среда генерирует принципиально новые объекты и проблемы — от квантовых вычислений до сложных сетевых структур. Их осмысление и формализация требуют не готовых рецептов, а владения универсальным абстрактным аппаратом: языком теории категорий, топологии, дискретных структур. В-третьих, фундаментальное образование становится основой профессиональной мобильности и устойчивости к технологическому устареванию. Конкретные программные пакеты, языки программирования и даже парадигмы ИИ подвержены быстрым изменениям. Однако базовые, структурообразующие идеи и принципы сохраняют самоценность, становясь основой для развития математического знания вне зависимости от применяемых технологий.

Рассмотрим проблему фундаментализации «профильного» математического образования в контексте вызовов цифровой трансформации.

### **2.1. Фундаментальные основы математики как мост между школой и вузом: от интуиции к системе**

Фундаментальные математические теории служат своеобразным мостом, соединяющим интуитивные, подчас разрозненные представления, усвоенные в школе, с целостным и строгим языком современной математики. Для студентов-математиков и будущих педагогов это имеет особое значение, определяя как их собственное профессиональное становление, так и их будущую (в том числе преподавательскую) деятельность.

На этапе обучения в вузе происходит принципиальный переход от работы с конкретными объектами — числами, фигурами — к изучению абстрактных структур и их свойств. Этот интеллектуальный прорыв хорошо виден на примере ключевых математических идей. Так, в школе ученик «знает», что  $1/2$  и  $2/4$  — это одно и то же число. Однако введенное в университетском курсе понятие класса эквивалентности придает этой интуиции строгую математическую форму: рациональное число предстает не как отдельная дробь, а как целый класс эквивалентных дробей. Эта, казалось бы, отвлеченная конструкция находит неожиданное продолжение в теории классов вычетов, образующих конечные поля, которые, в свою очередь, лежат в основе современных криптографических систем. Так теоретико-множественная абстракция, вырастая из школьной арифметики, становится фундаментом понимания передовых технологий.

Пример с бинарными отношениями в целом достаточно показателен. Решение любого уравнения можно интерпретировать как поиск элемента, эквивалентного нулю в рамках определенного отношения, что не только приводит к алгебраическому понятию ядра, но и объединяет под одним углом зрения задачи из разных разделов математики. Осознание понятия функции как особого вида бинарных отношений позволяет систематизировать набор свойств и представлений о различных (в «школьной» трактовке) понятиях и теориях.

**2.2. Ответ на технологический вызов: от вычисления к пониманию.** В доцифровую эпоху отработка вычислительных навыков являлась не просто методическим приемом, а объективной необходимостью, обусловленной самим характером профессиональной деятельности. От вычислительной компетентности инженера, экономиста или исследователя напрямую зависели скорость и точность решения практических задач. В таких условиях автоматизм в выполнении математических операций был не просто желательным умением, а профессиональным императивом, определяющим саму возможность эффективной работы в любой технической или научной сфере. Принцип «повторение — мать учения», реализуемый через многократное решение типовых примеров и задач, с одной стороны, формировал устойчивые алгоритмические навыки, минимизируя вероятность ошибок в реальных расчетах, с другой — позволял студенту на собственном опыте выработать интуитивное понимание математических закономерностей.

Несмотря на стремительную цифровую трансформацию, отработка вычислительных навыков сохраняет свою значимость в математическом образовании. Такие фундаментальные умения, как техника дифференцирования, интегрирования или алгебраических преобразований, выступают необходимым когнитивным тренажером. Они по-прежнему формируют математическую интуицию, без которой невозможно глубокое понимание сути математических операций. Такой опыт создает прочную нейронную связь между абстрактной теорией и ее практическим воплощением, что остается недостижимым при простом наблюдении за работой вычислительной программы.

Однако в новых условиях основной акцент образовательной парадигмы все дальше отклоняется от концепции исключительности вычислительной составляющей: ценность современного специалиста определяется не столько умением выполнять расчеты, сколько способностью критически оценивать полученные результаты, выбирать адек-

ватные математические методы и интерпретировать данные в контексте конкретной задачи. Таким образом, вычислительные навыки не исчезают из образовательного процесса, но становятся не самоцелью, а средством для достижения главного: формирования структурного мышления и способности к математической рефлексии. Широкое распространение систем компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, SageMath), мощных онлайн-калькуляторов (Wolfram|Alpha, Symbolab) и чат-ботов с элементами ИИ (ChatGPT, Gemini) кардинально меняет ландшафт применения математики. Сегодня инженер, экономист или исследователь за несколько секунд может получить аналитическое решение нетривиальной задачи или визуализацию многомерного графика. В этой ситуации традиционная цель «научить вычислять» становится нерелевантной. Ответом на вызов оказывается переориентация образовательного процесса на формирование двух ключевых метакомпетенций: способности критически оценивать результат, полученный с помощью автоматизированных инструментов, и умения осознанно выбирать адекватный математический аппарат для решения конкретных профессиональных задач. Особую актуальность эта проблема приобретает в контексте работы с генеративным ИИ. Когда, например, студент использует языковую модель для создания программного кода, именно фундаментальные знания дискретной математики и логики позволяют провести содержательную верификацию. Речь идет уже не о проверке синтаксиса, а об оценке логической корректности алгоритма, его соответствия поставленной задаче и анализа вычислительной сложности — задачах, которые невозможно решить без прочной теоретической базы.

При этом важно подчеркнуть, что формирование инструментальных умений — техники дифференцирования, интегрирования, алгебраических преобразований — не теряет своей ценности, но его цель фундаментально меняется. Эти навыки важны не сами по себе, а как когнитивный тренажер, как необходимое условие для развития математической интуиции и глубинного понимания. Именно этот фундамент позволяет специалисту осуществлять ту самую критическую оценку, без которой эффективное использование современных технологий становится невозможным.

**2.3. Контуры дисциплинарного и методического ядра фундаментализации математического образования.** Целостность системы фундаментального математического образования требует концентрации вокруг нескольких стержневых дисциплин, образующих его

концептуальное ядро. Этот перечень предметов очевиден, однако в рамках каждого из них учет возможностей новых цифровых технологий подразумевает методическую и методологическую трансформацию, которая, в свою очередь, должна быть строго обоснована и определена из соображений необходимости.

Отправной точкой целостного понимания высшей математики выступают теория множеств и математическая логика, задающие универсальный язык и строгие стандарты рассуждений. Ключевая задача их изучения — не просто проанализировать свойства операций над множествами или базовые законы математической логики, но показать, как они образуют методологический фундамент для остальных разделов математики.

Центральное место в этом ядре занимает алгебра с ее акцентом на базовые структуры — группы, кольца, поля, векторные пространства, то есть на «грамматику» математического мышления [7]. Математический анализ, освобожденный от чрезмерной вычислительной нагрузки, раскрывается как глубокая и стройная теория, дающая язык для описания изменений и динамики. Акцент здесь смещается с техники вычисления производных и интегралов на понимание смысла ключевых теорем и их методологической значимости, в том числе для исследований в области естествознания и техники.

Алгебра и математический анализ как основы для дальнейшего раскрытия идеи соответственно дискретного и непрерывного анализа представляют собой базис для развития этих концепций в дисциплинах более прикладного характера: дискретной математике, включающей теорию графов и комбинаторику, теории дифференциальных уравнений, в том числе в частных производных. Особую роль в этом ряду играют геометрия и топология, ответственные за развитие у обучающихся пространственного и структурного мышления.

При этом, повторимся, фундаментализация содержания математических дисциплин не может и не должна происходить формально, за счет акцента на освоение сугубо общетеоретических положений. Под ней необходимо понимать «универсализацию знаний и умений, которая обуславливает выделение структурных единиц научного знания, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений» [8]. Важнейшей задачей при формировании математических компетенций у обучающихся становится применение в учебном процессе цифровых инструментов, адекватных современным возможностям —

в том числе применение в методическом плане. Специалисты (например, [9]) уже сейчас выделяют, в частности, следующие аспекты: «В результате появления генеративного ИИ учителям придется делать три вещи: в первую очередь им придется ожидать большего от студентов, [во-вторых, необходимо] активнее внедрять ИИ в учебные задания. ИИ становится партнером ученика по команде... Третье — [...] при наличии таких инструментов, как ChatGPT, можно проводить поистине удивительные тренинги». Использование современных цифровых технологий как части образовательного процесса, а не борьба с ними во имя сохранения традиций ради традиций — один из важнейших инструментов обеспечения процесса фундаментализации математического образования.

### 3. Результаты

Фундаментализация профильного математического образования представляет собой не консервативный ретро-поворот, а стратегически необходимый ответ на вызовы цифровой трансформации. Для студентов-математиков она является залогом креативного потенциала и способности к генерации нового знания. Для будущих педагогов — методологической основой, позволяющей преподносить математическую культуру последующим поколениям не в форме застывшего свода правил и инструментов, с легкостью заменяемого прикладным ПО и ИИ, а как живую среду развивающейся науки. Укрепление теоретического ядра, рефлексивное переосмысление роли инструментальных навыков и интеграция цифровых технологий в качестве объекта для критического анализа, а не их суррогата — вот три взаимосвязанных вектора, в значительной степени определяющих траекторию развития современного математического образования. Реализация этого подхода соответствует не только букве образовательных стандартов, но и стратегическим национальным интересам в подготовке кадров, обладающих способностью к системному мышлению, глубокой адаптивностью и интеллектуальному лидерству.

### 4. Обсуждение

Проведенный анализ позволяет очертить несколько перспективных направлений для дальнейших исследований в избранном направлении. Первоочередной задачей видится детальная разработка методических моделей, обеспечивающих синергию между глубоким освоением теоретического ядра математики и формированием навыков критической

работы с цифровыми инструментами. Это предполагает, в частности, создание новых типов учебных заданий, где использование систем компьютерной алгебры или генеративного ИИ становится не способом получения ответа, а объектом для содержательного анализа и верификации. Во-вторых, актуальным является исследование трансформации содержания конкретных фундаментальных дисциплин (таких, как теория множеств, алгебра, математический анализ) в контексте новых образовательных задач, что требует пересмотра не только дидактических акцентов, но и способов демонстрации межпредметных связей. В-третьих, отдельного изучения требует проблема подготовки и переподготовки преподавательского состава, который должен не только владеть новыми технологиями, но и обладать глубокой философско-методологической рефлексией относительно места и роли фундаментального знания в цифровую эпоху. Развитие этих направлений позволит операционализировать принцип фундаментализации, превратив его из декларируемого императива в работающую педагогическую практику.

## Список источников

1. **Кудрявцев Л. Д.** Современная математика и ее преподавание. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1980. 144 с.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования Бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» [Электронный ресурс]: утв. приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 12 августа 2020 г. № 970. URL: [https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010302\\_B\\_3\\_15062021.pdf](https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010302_B_3_15062021.pdf) (дата обращения: 05.10.2025).
3. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]: утв. распоряжением Правительства Рос. Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506 р. URL: <http://static.government.ru/media/files/41d4b41b9793c0c7a8f5.pdf> (дата обращения: 05.10.2025).
4. **Сушков В. В.** О фундаментальной составляющей математического знания как основе блока дисциплин естественно-научного

- цикла // *Вестник Тульского государственного университета. Серия: Современные образовательные технологии в преподавании естественно-научных дисциплин*. 2025. № 1 (24). С. 74–77. EDN HUWWMF.
5. **Тестов В. А.** Трансдисциплинарная роль физико-математических дисциплин в современном естественно-научном и инженерном образовании // *Образование и наука*. 2023. Т. 25. № 7. С. 14–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2023-7-14-43. EDN ZJHRWV.
  6. **Садовничий В. А.** Традиции и современность // *Высшее образование в России*. 2003. № 1. С. 11–18. EDN IBLPPJ.
  7. **Сотникова О. А., Чермных В. В.** Один пример изучения методов абстрактной алгебры в математическом высшем образовании // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика*. 2024. № 2 (51). С. 44–56. DOI: 10.34130/1992-2752\_2024\_2\_44. EDN ELKIWL.
  8. **Перминов Е. А., Тестов В. А.** Математизация профильных дисциплин как основа фундаментализации ИТ-подготовки в вузах // *Образование и наука*. 2024. Т. 26. № 7. С. 12–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-7-12-43. EDN LFGANT.
  9. **Салмон Х.** Трансформация обучения в эпоху искусственного интеллекта. М.: Альпина ПРО, 2025. 243 с.

## References

1. **Kudryavtsev L. D.** *Sovremennaya matematika i ee prepodavanie* [Modern Mathematics and its Teaching]. Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury izdatel'stva "Nauka", 1980. 144 p. (In Russ.)
2. *Federal'nyi gosudarstvennyi obrazovatel'nyi standart vysshego obrazovaniya – Bakalavriat po napravleniyu podgotovki 01.03.02 "Prikladnaya matematika i informatika"* [Federal State Educational Standard of Higher Education – Bachelor's Degree in Applied Mathematics and Computer Science]: utv. prikazom Ministerstva nauki i vysshego obrazovaniya RF ot 12 avgusta 2020 g. № 970. Available at:

[https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010302\\_B\\_3\\_15062021.pdf](https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010302_B_3_15062021.pdf) (accessed: 05.10.2025). (In Russ.)

3. *Kontseptsiya razvitiya matematicheskogo obrazovaniya v Rossiiskoi Federatsii* [The Concept of Development of Mathematical Education in the Russian Federation]: utv. rasporyazheniem Pravitel'stva Ros. Federatsii ot 24 dek. 2013 g. № 2506-r. Available at: <http://static.government.ru/media/files/41d4b41b9793c0c7a8f5.pdf> (accessed: 05.10.2025). (In Russ.)
4. **Sushkov V. V.** On the fundamental component of mathematical knowledge as the basis of the natural science cycle disciplines. *Vestnik Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sovremennyye obrazovatel'nye tekhnologii v prepodavanii estestvennonauchnykh distsiplin* [Bulletin of the Tula State University. Series: Modern Educational Technologies in Teaching Natural Sciences]. 2025. No 1 (24). Pp. 74–77. EDN: HUWWMF. (In Russ.)
5. **Testov V. A., Perminov E. A.** Transdisciplinary Role of Physics and Mathematics Disciplines in Modern Science and Engineering Education. *Obrazovanie i nauka* [The Education and Science Journal]. 2023. Vol. 25. No 7. Pp. 14–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2023-7-14-43. EDN ZJHRWV. (In Russ.)
6. **Sadovnichy V. A.** Traditions and modernity. *Vysshee obrazovanie v Rossii* [Higher Education in Russia]. 2003. No 1. Pp. 11–18. EDN: IBLPPJ. (In Russ.)
7. **Perminov E. A., Testov V. A.** Mathematization of Core Disciplines as the Basis for Fundamentalization of IT Training in Universities. *Obrazovanie i nauka* [The Education and Science Journal]. 2024. Vol. 26. No 7. Pp. 12–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-7-12-43. EDN LFGAHT. (In Russ.)
8. **Sotnikova O. A., Chermnykh V. V.** One example of studying abstract algebra methods in higher mathematical education. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2024. No 2 (51). Pp. 44–56. DOI: 10.34130/1992-2752\_2024\_2\_44. EDN: ELKIWL. (In Russ.)

9. **Salmon Н.** *Transformatsiya obucheniya v epokhu iskusstvennogo intellekta* [Transformation of Learning in the Era of Artificial Intelligence]. Moscow: Al'pina PRO, 2025. 243 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author

Сушков Владислав Викторович / Vladislav V. Sushkov

к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.12.2025

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 04.12.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025

## МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## METHODICAL MATERIALS

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.*

*Выпуск 4 (57)*

*Bulletin of Syktuykar University.*

*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 4 (57)*

Научная статья

УДК 519.6, 378

[https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_73](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_73)

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РОЕВОГО ИНТЕЛЛЕКТА: GWO И ChOA

**Надежда Николаевна Бабикина,**

**Надежда Олеговна Котелина**

Сыктывкарский государственный университет

имени Питирима Сорокина, valmasha@mail.ru, nad7175@yandex.ru

**Аннотация.** Метаэвристические алгоритмы роевого интеллекта находят широкое применение в практических задачах: от определения оптимального положения группы захвата полиции до сегментации изображений и определения оптимальных параметров обучения нейросетей. В статье рассматриваются и сравниваются два алгоритма непрерывной оптимизации, моделирующие процесс коллективной охоты животных: алгоритм оптимизации серых волков и алгоритм оптимизации шимпанзе. Также обсуждаются методические вопросы обучения студентов метаэвристическим алгоритмам.

**Ключевые слова:** роевой интеллект, алгоритм оптимизации серых волков, алгоритм оптимизации шимпанзе, GWO, ChOA, обучение

**Для цитирования:** Бабикина Н. Н., Котелина Н. О. Сравнительный анализ алгоритмов роевого интеллекта: GWO и ChOA // *Вестник*

*Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2025. Вып. 4 (57). С. 73–92. [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_73](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_73)

Article

## COMPARATIVE ANALYSIS OF SWARM INTELLIGENCE ALGORITHMS: *GWO* AND *ChOA*

Nadezhda N. Babikova, Nadezhda O. Kotelina

Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,  
valmasha@mail.ru, nad7175@yandex.ru

**Abstract.** Metaheuristic swarm intelligence algorithms are widely used in solving problems, ranging from determining the optimal position of a police raiding party to image segmentation and determining optimal training parameters for neural networks. This article examines and compares two continuous optimization algorithms modeling the collective hunting process of animals: the grey wolf optimization algorithm and the chimpanzee optimization algorithm. It also discusses methodological aspects of teaching metaheuristic algorithms to students.

**Keywords:** swarm intelligence, Grey Wolf Optimizer, Chimp Optimization Algorithm, GWO, ChOA, learning

**For citation:** Babikova N. N., Kotelina N. O. Comparative analysis of swarm intelligence algorithms: GWO and ChOA. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 4 (57), pp. 73–92. (In Russ.) [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2025\\_4\\_73](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_4_73)

### 1. Введение

Спектр метаэвристических алгоритмов оптимизации разнообразен и активно расширяется: за последние три десятилетия было предложено более 500 новых алгоритмов [1]. Метаэвристики можно разделить на три основных класса: эволюционные алгоритмы; алгоритмы, основанные на физических законах; алгоритмы роевого интеллекта [2]. Среди алгоритмов, вдохновленных концепциями эволюции в природе, самым популярным является генетический алгоритм (Genetic Algorithm, GA), который

имитирует дарвиновские концепции эволюции [3]. Среди мета-эвристик, реализующих поиск оптимального решения в соответствии с принципами природных физических процессов, наиболее известным является алгоритм имитации отжига (Simulated Annealing, SA) [4]. К наиболее распространенным алгоритмам роевого интеллекта, имитирующим групповое поведение живых организмов, относятся алгоритм муравьиной колонии (Ant Colony Optimization, ACO) [5] и алгоритм роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO) [6].

По типу имитируемых поведенческих стратегий среди алгоритмов роевого интеллекта можно выделить шесть групп, в которых моделируются [7]:

- 1) поведение особей в процессе поиска пищи;
- 2) процессы размножения или спаривания;
- 3) социальное взаимодействие в рамках определенной цели;
- 4) навигация роя, группы, стаи, стада;
- 5) поведение в процессе охоты;
- 6) процессы выживания.

Метаэвристические алгоритмы оптимизации применяются в различных практических задачах: сегментации и кластеризации изображений [8], оптимизации инвестиционного портфеля [9], выбора рабочих частот радиотехнических средств [10], определения оптимального размещения группы задержания полиции [11], структурно-параметрической оптимизации в строительном проектировании [12], определения оптимальной начальной скорости обучения нейросети [13] и многих других.

В статье рассматриваются два алгоритма роевого интеллекта, основанные на имитации поведения особей в процессе охоты, — алгоритм оптимизации серых волков и алгоритм оптимизации шимпанзе, а также обсуждаются методические вопросы, связанные с обучением студентов метаэвристическим алгоритмам роевого интеллекта.

## 2. Материалы и методы

Метаэвристические алгоритмы могут изучаться в вузах как в рамках самостоятельных дисциплин, так и в качестве отдельных тем в составе комплексных дисциплин. В Сыктывкарском университете мета-

эвристические алгоритмы входят в программу дисциплины «Математические методы в экономике» (направления «Прикладная информатика», бакалавриат; «Математика и компьютерные науки», магистратура). Также метаэвристические алгоритмы используются студентами в самостоятельной научно-исследовательской работе, при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Для рассмотрения алгоритмов непрерывной оптимизации были выбраны два алгоритма: алгоритм оптимизации серых волков и алгоритм оптимизации шимпанзе. Алгоритм оптимизации серых волков сравнительно прост в реализации, иерархическая система организации стаи интуитивно понятна. Это позволяет использовать алгоритм как базовый для обучения студентов. Алгоритм оптимизации шимпанзе гораздо сложнее для понимания и реализации. Этот алгоритм был предложен в 2020 году, и по нему нет научных статей на русском языке, тем интереснее авторам было его изучать. Также на выбор алгоритма оптимизации шимпанзе повлияло то, что для большого набора тестовых целевых функций алгоритм шимпанзе продемонстрировал один из лучших результатов по данным сравнительного анализа эффективности 21 алгоритма роевого интеллекта, представленного К. Warnakulasooriya, A. Segev в 2024 году [7].

### 3. Результаты

**3.1. Метаэвристический алгоритм оптимизации серых волков (Grey Wolf Optimizer, GWO)** — алгоритм глобальной непрерывной оптимизации — был предложен S. Mirjalili, S. M. Mirjalili, A. Lewis в 2014 году [2] и был одним из первых алгоритмов, моделирующих поведение особей в процессе охоты. Алгоритм основан на имитации социальной иерархии волчьей стаи и процесса групповой охоты — поиска, окружения и нападения на добычу. В стае волков выделяются три лидера — альфа, бета, гамма, все остальные волки (омеги) в процессе охоты следуют за лидерами.

Пусть задана целевая функция  $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Для математического моделирования окружения волками добычи (оптимального решения) предложены следующие уравнения:

$$\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t)|, \quad (1.1)$$

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D}, \quad (1.2)$$

$$\vec{A} = 2\vec{f} \cdot \vec{r}_1 - \vec{f}, \quad (1.3)$$

$$\vec{C} = 2\vec{r}_2, \quad (1.4)$$

где  $\vec{A}$ ,  $\vec{C}$  — векторы коэффициентов,  $\vec{X}_p$  — вектор, определяющий позицию добычи;  $\vec{X}$  — вектор, определяющий позицию волка на текущей итерации  $t$ ;  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  — случайные векторы с координатами на интервале  $[0, 1]$ ; координаты вектора  $\vec{f}$  линейно убывают от 2 до 0.

В формулах (1.1)–(1.4) и далее указан знак произведения между векторами так, как в оригинальной статье, но по контексту понятно, что имеется в виду поэлементное произведение векторов по Адамару ( $\otimes$ ).

Интерпретация параметров итерационного процесса охоты для случая двух переменных представлена на рис. 1. Компоненты вектора  $\vec{f}$  на каждой итерации определяются по формуле  $2 - 2t/T$ , где  $t$  — номер итерации,  $T$  — максимальное число итераций. То есть компоненты убывают линейно от 2 до 0. Соответственно координаты вектора  $\vec{A}$  изменяются случайным образом на каждой итерации от  $-f_j$  до  $f_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Вектор  $\vec{A}$  влияет на величину смещения волка из текущей позиции. Если  $|\vec{A}| < 1$ , новая позиция волка будет расположена между ним и добычей, если  $|\vec{A}| > 1$  — дальше от добычи (в случае нулевого вектора  $\vec{A}$  волк переместился бы непосредственно на позицию добычи).

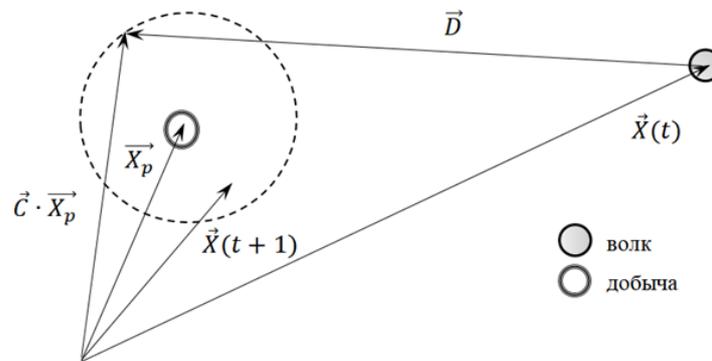


Рис. 1. Математическая модель процесса охоты

Координаты случайного вектора  $\vec{C}$  также вычисляются на каждой итерации и изменяются от 0 до 2. Вектор  $\vec{C}$  задает радиус влияния добычи на определение смещения  $\vec{D}$  волка из текущей позиции: чем больше по абсолютной величине компоненты вектора, тем больше влияет положение добычи на новое положение волка.

Начальная популяция волков  $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N\}$  генерируется случайным образом. Для каждого волка вычисляется значение целевой функции, определяются альфа, бета, гамма, соответствующие трем лучшим значениям целевой функции.

В абстрактном пространстве поиска местоположение добычи неизвестно, поэтому на каждом шаге итеративного процесса охоты позиции всех волков (включая лидеров) обновляются согласно математической модели (1.1–1.4) в соответствии с позициями альфы, беты, гаммы по формулам:

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \cdot \vec{X}_\alpha - \vec{X}|, \quad \vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \cdot \vec{X}_\beta - \vec{X}|, \quad \vec{D}_\gamma = |\vec{C}_3 \cdot \vec{X}_\gamma - \vec{X}|, \quad (1.5)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1 \cdot \vec{D}_\alpha, \quad \vec{X}_2 = \vec{X}_\beta - \vec{A}_2 \cdot \vec{D}_\beta, \quad \vec{X}_3 = \vec{X}_\gamma - \vec{A}_3 \cdot \vec{D}_\gamma, \quad (1.6)$$

$$\vec{X}(t+1) = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3}, \quad (1.7)$$

где параметры  $\vec{A}_i, \vec{C}_i$  вычисляются в соответствии с формулами (1.3–1.4) для  $i = \overline{1, 3}$ ;  $\vec{X}_\alpha, \vec{X}_\beta, \vec{X}_\gamma$  – векторы, определяющие позиции лидеров;  $\vec{X}$  – вектор, определяющий текущую позицию волка (итерация  $t$ ),  $t$  – номер итерации. Заметим, что случайные векторы  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  для вычисления  $\vec{A}_i, \vec{C}_i$  генерируются для каждого значения  $i$ .

Ниже приведена программа реализации алгоритма для функции Растригина двух переменных  $f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 - 10 \cos(2\pi x_1) + x_2^2 - 10 \cos(2\pi x_2)$ , где  $x_i \in [-5.12, 5.12]$ , на языке Python (листинг). Функция Растригина – известная невыпуклая функция, которая используется для тестирования алгоритмов оптимизации. Функция имеет глобальный минимум, равный 0, в точке  $(0, 0)$ , а также 120 локальных минимумов в точках с целочисленными координатами.

Для наглядного представления работы алгоритма в двумерном случае можно использовать визуализацию перемещения «стаи точек» с ростом числа итераций (рис. 2).

*Листинг*

### Алгоритм оптимизации волков

```
import numpy as np
def rastrigin_2d(x):
    A = 10
    return (A * 2 + (x[0]**2 - A * np.cos(2 * np.pi * x[0]))
            + (x[1]**2 - A * np.cos(2 * np.pi * x[1])))
```

*Окончание листинга*

```

dim = 2
pop_size = 30
max_iter = 100
lb, ub = -5.12 * np.ones(dim), 5.12 * np.ones(dim)
# счетчики фаз нападений и исследований
attack = 0
exploration = 0
L = 3 # количество лидеров
# Инициализация популяции
population = np.random.uniform(lb, ub, (pop_size, dim))

for iteration in range(max_iter):
    f = 2.0 - 2.0 * (iteration / max_iter)
    fitness = np.array([rastrigin_2d(ind) for ind in population])
    # Определяем лидеров
    sorted_indices = np.argsort(fitness)
    leaders_indices = sorted_indices[:L] # Индексы лидеров
    leaders = population[leaders_indices].copy() # Копии лидеров

    for i in range(pop_size):
        r1, r2 = np.random.rand(L, dim), np.random.rand(L, dim)
        A = 2 * f * r1 - f
        C = 2 * r2

        # Подсчет фаз атак и исследований
        if np.any(np.abs(A) > 1): # исследование
            exploration += 1
        else: # атака
            attack += 1

        D = np.abs(C * leaders - population[i])
        new_pos = np.sum(leaders - A * D, axis=0) / L
        population[i] = np.clip(new_pos, lb, ub)

    if (iteration + 1) % 10 == 0:
        best_fitness = np.min(fitness)
        print(f"Iteration {iteration + 1}/{max_iter}, "
              f"Best Fitness: {best_fitness:.9f}")
print('количество атак = ', attack,
      'количество исследований = ', exploration)
best_idx = np.argmin(fitness)
best_solution, best_value = population[best_idx], fitness[best_idx]

print("Алгоритм стаи серых волков")
print("=" * 70)
print("\n" + "=" * 70)
print("РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ:")
print(f"Найденное лучшее решение: ({best_solution[0]:.9f}, "
      f"{best_solution[1]:.9f})")
print(f"Значение функции: {best_value:.9f}")
print(f"Истинный минимум: (0.000000, 0.000000), "
      f"значение: {rastrigin_2d([0, 0]):.9f}")
print(f"Ошибка: {abs(best_value - 0):.9f}")

```

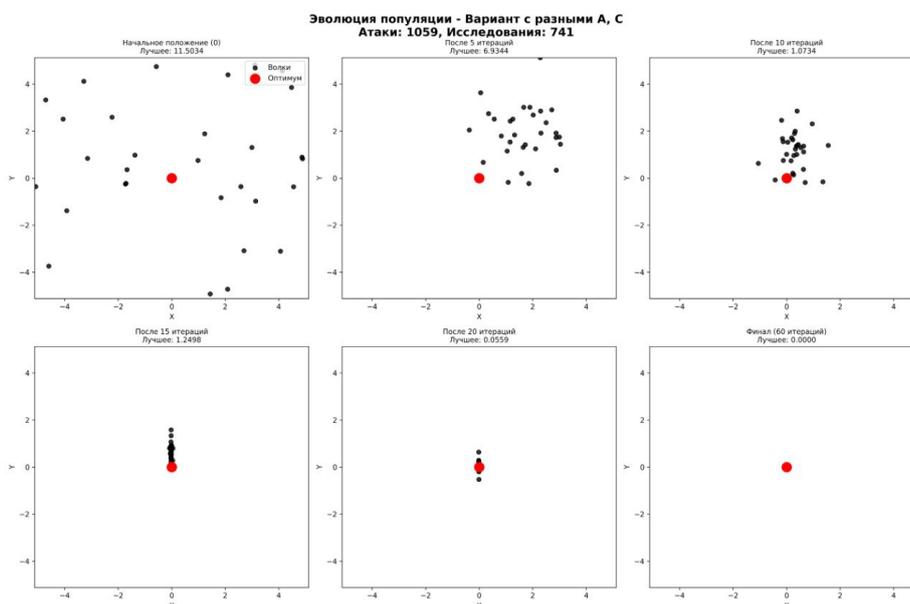


Рис. 2. Визуализация работы GWO для функции Растригина (листинг)

Алгоритм для функции Растригина находит решение довольно быстро, обычно уже к 20-й итерации (при размере популяции 30, максимальном количестве итераций 100), очень редко попадая в один из локальных оптимумов. Для более сложной тестовой функции Швевеля  $f(x_1, x_2) = 837.9658 - x_1 \sin(\sqrt{|x_1|}) - x_2 \sin(\sqrt{|x_2|})$ , где  $x_i \in [-500, 500]$ , лучшее решение было получено при размере популяции 1000, максимальном количестве итераций 300 — (420.705926187, 421.098038253), значение функции: 0.000089958. Глобальный минимум функции Швевеля равен 0 и находится в углу пространства поиска, в точке с координатами (420.96875, 420.96875), в то время как второй по глубине локальный минимум расположен вблизи противоположного угла (рис. 3). Полученные при тестировании алгоритма на функции Швевеля результаты аналогичны результатам, приведенным в статье А. В. Пантелеева, И. А. Белякова [14].

**3.2. Алгоритм оптимизации шимпанзе (Chimp Optimization Algorithm, ChOA)** был разработан М. Khishe, М. R. Mosavi в 2020 году [15], является алгоритмом непрерывной оптимизации.

Алгоритм шимпанзе моделирует коллективную охоту стаи шимпанзе. В охоте принимают участие четыре группы особей с разными ролями: Attackers — атакующие, Barriers — блокирующие, Chasers — преследователи, Drivers — загонщики.

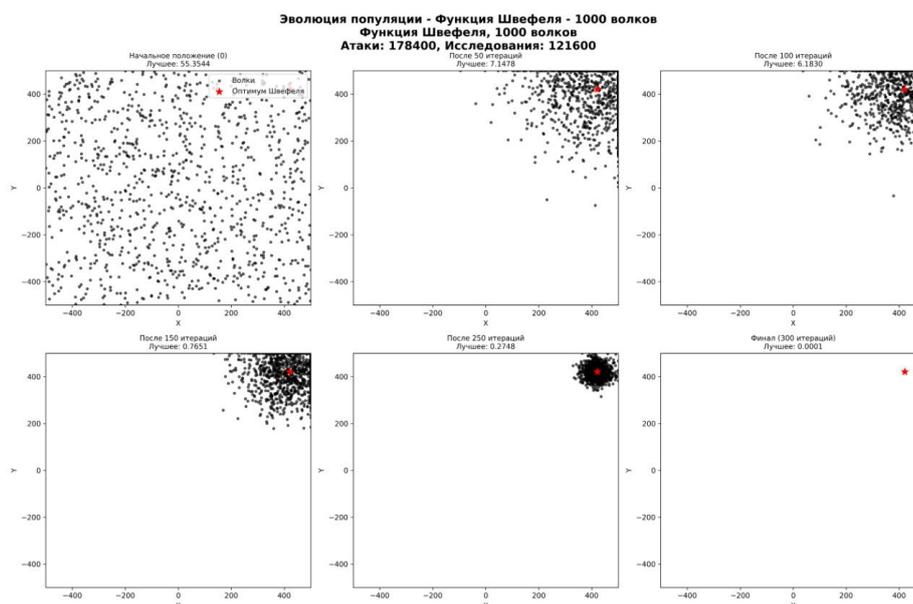


Рис. 3. Визуализация работы GWO для функции Швевеля

Рассмотрим математическую модель охоты шимпанзе в сравнении с охотой серых волков (табл.). Отличия два: во-первых, при определении смещения шимпанзе к новой позиции вводится дополнительный элемент случайности — хаотический вектор  $\vec{m}$ ; во-вторых, компоненты вектора  $\vec{f}$  убывают нелинейно (у волков — линейно) от 2.5 до 0 (у волков — от 2), причем этот параметр авторы предлагают изменять по разным правилам для каждой из четырех групп шимпанзе.

Таблица

Сравнение моделей GWO и ChOA

| Серые волки   | Шимпанзе  |
|---|---|
| $\vec{D} =  \vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t) $ | $\vec{D} =  \vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{m} \cdot \vec{X}(t) $ (2.1) |
| $\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D}$ | $\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D}$ (2.2)               |
| $\vec{A} = 2\vec{f} \cdot \vec{r}_1 - \vec{f}$        | $\vec{A} = 2\vec{f} \cdot \vec{r}_1 - \vec{f}$ (2.3)                      |
| $\vec{C} = 2\vec{r}_2$                                | $\vec{C} = 2\vec{r}_2$ (2.4)  |
| $\vec{f}$ убывает линейно<br>от 2 до 0                | $\vec{f}$ убывает <b>нелинейно</b><br>от <b>2.5</b> до 0                  |

Начальная популяция шимпанзе  $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N\}$  генерируется случайным образом. Популяция случайным образом делится на четыре группы приблизительно равного размера. Для каждого шимпанзе вычисляется значение целевой функции, определяются лидеры: А (Attacker), В (Barrier), С (Chaser), D (Driver), соответствующие четырем лучшим значениям целевой функции.

На каждом шаге итеративного процесса охоты позиции всех шимпанзе обновляются согласно математической модели (2.1–2.4) в соответствии с позициями А, В, С, D по формулам:

$$\begin{aligned} \vec{D}_A &= |\vec{C}_1 \cdot \vec{X}_A - \vec{m}_1 \cdot \vec{X}|, \\ \vec{D}_B &= |\vec{C}_2 \cdot \vec{X}_B - \vec{m}_2 \cdot \vec{X}|, \\ \vec{D}_C &= |\vec{C}_3 \cdot \vec{X}_C - \vec{m}_3 \cdot \vec{X}|, \\ \vec{D}_D &= |\vec{C}_4 \cdot \vec{X}_D - \vec{m}_4 \cdot \vec{X}|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_1 &= \vec{X}_A - \vec{A}_1 \cdot \vec{D}_A, \\ \vec{X}_2 &= \vec{X}_B - \vec{A}_2 \cdot \vec{D}_B, \\ \vec{X}_3 &= \vec{X}_C - \vec{A}_3 \cdot \vec{D}_C, \\ \vec{X}_4 &= \vec{X}_D - \vec{A}_4 \cdot \vec{D}_D, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\vec{X}(t+1) = \begin{cases} \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3 + \vec{X}_4}{4}, & \text{если } \mu < 0.5, |A| < 1 \\ \vec{X}_{rand} - \vec{A} \cdot \vec{D}, & \\ \text{где } \vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}_{rand} - \vec{m} \cdot \vec{X}|, & \text{если } \mu < 0.5, |A| > 1 \\ \text{хаотический вектор,} & \text{если } \mu \geq 0.5 \end{cases}, \quad (2.7)$$

где параметры  $\vec{A}$ ,  $\vec{C}$ ,  $\vec{A}_i$ ,  $\vec{C}_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  вычисляются в соответствии с формулами (2.3), (2.4);  $\vec{m}$ ,  $\vec{m}_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  — хаотические векторы;  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{X}_B$ ,  $\vec{X}_C$ ,  $\vec{X}_D$  — векторы, определяющие позиции лидеров;  $\vec{X}$  — вектор, определяющий текущую позицию шимпанзе (итерация  $t$ );  $\vec{X}_{rand}$  — вектор, определяющий позицию случайно выбранного шимпанзе из популяции;  $t$  — номер итерации;  $\mu$  — случайное значение от 0 до 1, которое генерируется на каждой итерации для каждого шимпанзе.

Аналогично действиям стаи волков, поведение шимпанзе направлено как на исследование пространства решений при  $|A| > 1$  (exploration, фаза исследования, глобальный поиск), так и на использование уже найденных хороших решений при  $|A| < 1$  (exploitation, фаза нападения на добычу, локальный поиск).

Формула (2.7) составлена на основе псевдокода, представленного в оригинальной статье [15]. Параметр  $\mu$  авторы алгоритма трактуют как влияние случайностей во время охоты, т. е. в половине случаев шимпанзе могут отвлечься от процесса охоты (побежать за самкой, пораниться и т. п.), в этом случае позиция шимпанзе обновляется хаотически ( $\mu \geq 0.5$ ). Когда  $\mu < 0.5$  &  $|A| > 1$ , текущий шимпанзе обновляет свою позицию, ориентируясь на случайно выбранного шимпанзе.

#### 4. Обсуждение

Сравнительный анализ алгоритмов GWO и ChOA показывает, что они базируются на сходной абстрактной модели процесса охоты, но алгоритм ChOA характеризуется существенно более высокой структурной сложностью, что делает его достаточно трудным для понимания и реализации. Один из возможных методов изучения алгоритма оптимизации шимпанзе заключается в постепенном переходе к нему от более простого алгоритма оптимизации серых волков. Такой подход позволяет наглядно продемонстрировать развитие метаэвристических концепций.

Метаэвристических алгоритмов оптимизации более 500, но среди них не только оригинальные алгоритмы, но и модифицированные, а также гибридные (которые объединяют идеи нескольких алгоритмов).

Существует много модификаций GWO, например, в 2016 году N. Mittal, U. Singh, B. S. Sohi предложили свою версию алгоритма и показали его эффективность для инженерных приложений [16]. Если в оригинальном алгоритме параметр  $\vec{f}$  убывает линейно по правилу  $2 - 2t/T$  ( $t, T$  — текущий и максимальный номер итерации), то в модифицированном этот параметр убывает нелинейно по правилу  $2 - 2t^2/T^2$ .

Координаты вектора  $\vec{A} = 2\vec{f} \cdot \vec{r}_1 - \vec{f}$  изменяются случайным образом на каждой итерации от  $-f_j$  до  $f_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). То есть диапазон изменения координат вектора  $\vec{A}$  с ростом номера итерации уменьшается. Поскольку  $|\vec{A}| < 1$  соответствует фазе локального поиска (нападения на добычу),  $|\vec{A}| > 1$  — фазе глобального поиска (исследования), то, меняя правило убывания параметра  $\vec{f}$ , мы меняем соотношение между количеством итераций нападения и итераций исследования. Напри-

мер, отношение среднего числа нападений при многократном запуске программы для функции Растригина (листинг) к среднему числу исследований — 3:2. А если использовать для  $\vec{f}$  нелинейное убывание  $2 - 2t^2/T^2$ , то отношение среднего числа нападений к среднему числу исследований — 2:3. То есть количество фаз исследования возрастает, что снижает вероятность стагнации в локальных оптимумах.

Авторы ChOA предлагают следующие формулы изменения параметра  $\vec{f}$  для каждой из четырех групп шимпанзе:  $2.5 - \frac{2 \log(t)}{\log(T)}$ ,  $(-2t^3/T^3) + 2.5$ ,  $0.5 + 2 \exp(-(4t/T)^2)$ ,  $2.5 + 2t^2/T^2 - 2 \cdot 2t/T$ .

Количество лидеров, определяющих позицию предполагаемой добычи в метаэвристических алгоритмах, может быть различным и даже меняться динамически в ходе работы алгоритма. Всего один лидер используется, например, в алгоритме летучих мышей (Bat Algorithm, BA), разработанном X.-S. Yang в 2010 году [17], в алгоритме оптимизации китов (Whale Optimization Algorithm, WOA), представленном S. Mirjalili, A. Lewis в 2016 году [18]. В приведенной выше программе (листинг) можно изменить количество лидеров (переменная L) и проследить, как меняется при этом работа алгоритма.

Добавление хаотического фактора является популярным приемом модификации метаэвристических алгоритмов. Хаотические карты (отображения) генерируют детерминированные, но трудно предсказуемые последовательности. Хаос может быть интегрирован в алгоритм разными способами. Например, в 2023 году коллектив авторов предложил модифицированную версию алгоритма оптимизации синус-косинуса (Sine Cosine Algorithm, SCA) [19], в которой хаотические карты используются для инициализации начальной популяции [20]. Инициализация с помощью хаотических отображений обеспечивает более равномерное и разнообразное начальное распределение особей в пространстве поиска по сравнению со случайной инициализацией, что увеличивает шансы найти глобальный оптимум.

В ChOA хаотический вектор  $\vec{m}$  вносит хаос в траекторию перемещения шимпанзе к оптимуму (8), «выталкивая» их из локальных оптимумов. При этом разные карты по-разному меняют паттерны движения шимпанзе, например, большая амплитуда колебаний может приводить к резким скачкам позиций шимпанзе и, как следствие, к пропуску оптимума, но, с другой стороны, позволяет добиться большей эффективности на ранних этапах перемещения.

Авторы ChOA рекомендуют использовать одну из шести хаотических карт с начальным значением  $x_0 = 0.7$  (для тент-карты  $x_0 = 0.6$ ), для приведения к диапазону  $[0, 1)$  используется взятие дробной части (рис. 4):

- Квадратичная карта:  $x_{i+1} = \{x_i^2 - c\}$ ,  $c = 2$ .
- Гауссова карта:  $x_{i+1} = \begin{cases} 1, & x_i = 0, \\ 1/\{x_i\}, & x_i \neq 0. \end{cases}$
- Логистическая карта:  $x_{i+1} = \alpha x_i(1 - x_i)$ ,  $\alpha = 4$ .
- Карта Зингера:

$$x_{i+1} = \mu(7.86x_i - 23.31x_i^2 + 28.75x_i^3 - 13.302875x_i^4), \mu = 1.07.$$

- Карта Бернулли:  $x_{i+1} = \{2x_i\}$ .
- Тент-карта:  $x_{i+1} = \begin{cases} x_i/0.7, & x_i < 0.7, \\ \frac{10}{3}(1 - x_i), & 0.7 \leq x_i. \end{cases}$

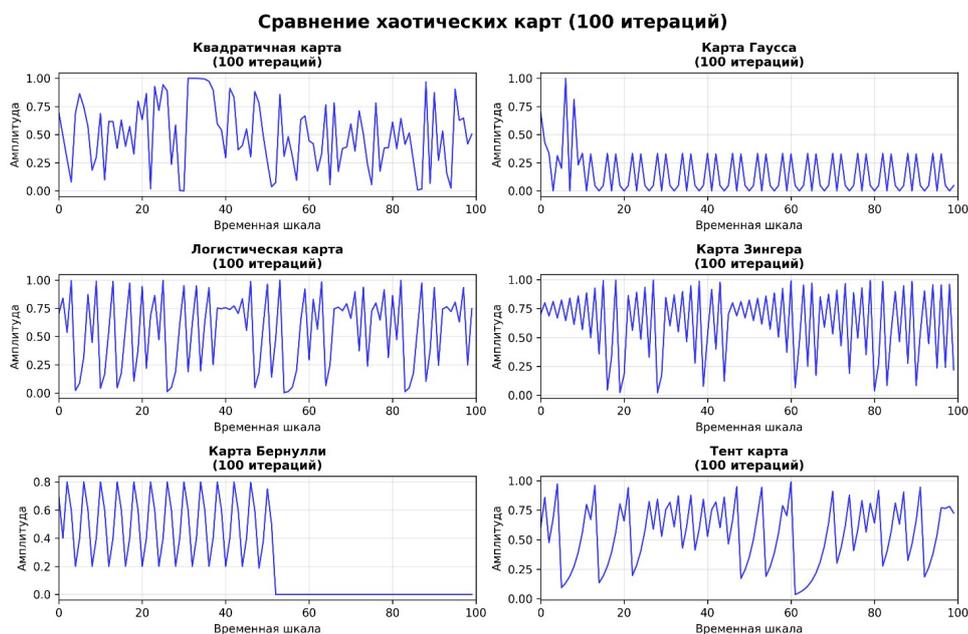


Рис. 4. Хаотические карты

Разделение популяции на группы встречается во многих метаэвристических алгоритмах. Например, в алгоритме оптимизации слонов (Elephant Herding Optimization, ЕНА) вся популяция разделена на кланы, каждый из которых ищет решение независимо от других кланов [21]. В ChOA независимые группы используют различные нелинейные стратегии обновления  $\vec{f}$ , поэтому шимпанзе могут исследовать пространство поиска с разными возможностями, обеспечивая балансировку между глобальным и локальным поиском.

Конечно, алгоритм оптимизации шимпанзе весьма сложный, не всегда целесообразно включать такие алгоритмы в программу обучения. В этом случае можно сравнивать некоторый базовый алгоритм с его модификациями. Если у студентов складывается понимание метаэвристического метода решения задач, то они могут (и возможно, захотят) изучать более сложные и интересные алгоритмы в рамках научно-исследовательской работы, курсовых и дипломных проектов.

Визуальная и поведенческая наглядность алгоритмов, моделирующих процесс охоты, делает их удобными для реализации в игровых и симуляционных проектах, где важна демонстрация принципов коллективного поведения агентов. Примером нестандартного применения алгоритма оптимизации серых волков может служить курсовая работа студента группы 1316-ПИю Д. И. Марченко (рис. 5), он разработал компьютерную игру «Поймай меня», в которой игрок убегал от стаи волков, преследующей его по правилам алгоритма оптимизации серых волков.



Рис. 5. Скриншот игры «Поймай меня»

## 5. Заключение

Применение сравнительного анализа метаэвристических алгоритмов, построенного по принципу перехода от простых моделей к более сложным, не только обеспечивает доступность материала, но и способствует формированию представления о способах совершенствования методов оптимизации. Обучение начинается с освоения базовых концепций на примере алгоритмов, отличающихся простой структурой и небольшим числом параметров. При переходе к более сложным алгоритмам становится возможным показать, каким образом решаются существующие первоначальной модели проблемы.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Tansel D., Canturk D., Kucukyilmaz T.** A survey on pioneering metaheuristic algorithms between 2019 and 2024 [Электронный ресурс]. URL: [https://www.researchgate.net/publication/388421856\\_A\\_survey\\_on\\_pioneering\\_metaheuristic\\_algorithms\\_between\\_2019\\_and\\_2024](https://www.researchgate.net/publication/388421856_A_survey_on_pioneering_metaheuristic_algorithms_between_2019_and_2024) (дата обращения: 01.10.2025).
2. **Mirjalili S., Mirjalili S. M., Lewis A.** Grey Wolf Optimizer // *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 69. Pp. 46–61. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2013.12.007.
3. **Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V.** A review on genetic algorithm: past, present, and future // *Multimed Tools and Applications*. 2021. Vol. 80. Pp. 8091–8126. DOI: 10.1007/s11042-020-10139-6.
4. **Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P.** Optimization by Simulated Annealing // *Science*. 1983. Vol. 220. No 4598. Pp. 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671.
5. **Dorigo M., Birattari M., Stutzle T.** Ant colony optimization // *Computational Intelligence Magazine, IEEE*. 2006. Vol. 1. Pp. 28–39. DOI: 10.1109/MCI.2006.329691.
6. **Poli R., Kennedy J., Blackwell T.** Particle swarm optimization // *Swarm Intell.* 2007. Vol. 1. Pp. 33–57. DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0.
7. **Warnakulasooriya K., Segev A.** Comparative analysis of accuracy and computational complexity across 21 swarm intelligence

- algorithms // *Evolutionary Intelligence*. 2024. Vol. 18. Issue 18. DOI: 10.1007/s12065-024-00997-6.
8. **Родзин С. И., Эль-Хатиб С. А.** Совершенствование алгоритмов сегментации магнитно-резонансных изображений на основе роевого интеллекта // *Вестник Чувашского университета*. 2016. № 3. С. 217–226.
  9. **Акиншин О. Н., Есиков Д. О., Акиншина Н. Ю.** Особенности решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля предприятия методом роя частиц // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2016. № 5. С. 109–116.
  10. **Есиков О. В., Румянцев В. Л., Старожук Е. А.** Применение роевых алгоритмов для решения задачи выбора рабочих частот радиотехнических средств системы управления воздушным движением // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2016. № 2. С. 85–92.
  11. **Пьянков О. В., Попов А. В.** Модель принятия решения по повышению оперативности реагирования групп задержания с применением роевых алгоритмов // *Вестник Воронежского института МВД России*. 2020. № 4. С. 73–83.
  12. **Ахмадиев Ф. Г., Маланичев И. В.** Популяционные алгоритмы структурно-параметрической оптимизации в строительном проектировании // *Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета*. 2018. № 2 (44). С. 215–223.
  13. **Rahmatulloh A., Nugraha G. F., Darmawan I.** Hybrid PSO-Adam Optimizer Approach for Optimizing Loss Function Reduction in the Dist-YOLOv3 Algorithm // *International Journal of Intelligent Engineering and Systems*. 2024. Vol. 17. No 5. Pp. 199–209. DOI: 10.22266/ijies2024.1031.16.
  14. **Пантелеев А. В., Беляков И. А.** Разработка программного обеспечения метода глобальной оптимизации, имитирующего поведение стаи серых волков // *Моделирование и анализ данных*. 2021. № 2. С. 59–73. DOI: 10.17759/mda.2021110204.

15. **Khishe M., Mosavi M. R.** Chimp optimization algorithm // *Expert Systems with Applications*. 2020. Vol. 149. P. 113338. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113338.
16. **Mittal N., Singh U., Sohi B. S.** Modified grey wolf optimizer for global engineering optimization // *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*. 2016. Article ID 7950348. (4598). Pp. 1–16. DOI: 10.1155/2016/7950348.
17. **Yang X.-S.** A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm // *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization (eds. J. R. Gonzalez et al.)*, Studies in Computational Intelligence, Springer Berlin, 284, Springer. 2010. Pp. 65–74. DOI: 10.1007/978-3-642-12538-6\_6.
18. **Mirjalili S., Lewis A.** The Whale Optimization Algorithm // *Advances in Engineering Software*. 2016. No 95. Pp. 51–67. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2016.01.008.
19. **Mirjalili S.** SCA: a sine cosine algorithm for solving optimization problems // *Knowl. Based Syst.* 2016. Vol. 96. Pp. 120–133. DOI: 10.1016/j.knosys.2015.12.022.
20. **Pilcevic D., Djuric Jovicic M., Antonijevic M. et al.** Performance evaluation of metaheuristics-tuned recurrent neural networks for electroencephalography anomaly detection // *Front Physiol.* 2023. Nov 14; 14: 1267011. DOI: 10.3389/fphys.2023.1267011.
21. **Almufti S. M., Asaad R. R., Salim B. W.** Review on Elephant Herding Optimization Algorithm Performance in Solving Optimization Problems // *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. 7 (4). Pp. 6109–6114. DOI: 10.14419/ijet.v7i4.23127.

## References

1. **Tansel D., Canturk D., Kucukyilmaz T.** *A survey on pioneering metaheuristic algorithms between 2019 and 2024*. 2024. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/388421856\\_A\\_survey\\_on\\_pioneering\\_metaheuristic\\_algorithms\\_between\\_2019\\_and\\_2024](https://www.researchgate.net/publication/388421856_A_survey_on_pioneering_metaheuristic_algorithms_between_2019_and_2024) (accessed: 01.10.2025).

2. **Mirjalili S., Mirjalili S. M., Lewis A.** Grey Wolf Optimizer. *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 69. Pp. 46–61. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2013.12.007.
3. **Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V.** A review on genetic algorithm: past, present, and future. *Multimed Tools and Applications*. 2021. Vol. 80. Pp. 8091–8126. DOI: 10.1007/s11042-020-10139-6.
4. **Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P.** Optimization by Simulated Annealing. *Science*. 1983. Vol. 220. No 4598. Pp. 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671.
5. **Dorigo M., Birattari M., Stutzle T.** Ant colony optimization. *Computational Intelligence Magazine. IEEE*. 2006. Vol. 1. Pp. 28–39. DOI: 10.1109/MCI.2006.329691.
6. **Poli R., Kennedy J., Blackwell T.** Particle swarm optimization. *Swarm Intell.* 2007. Vol. 1. Pp. 33–57. DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0.
7. **Warnakulasooriya K., Segev A.** Comparative analysis of accuracy and computational complexity across 21 swarm intelligence algorithms. *Evolutionary Intelligence*. 2024. Vol. 18. Issue 18. DOI: 10.1007/s12065-024-00997-6.
8. **Rodzin S. I., El'-Khatib S. A.** Improvement of Magnetic Resonance Image Segmentation Algorithms Based on Swarm Intelligence. *Vestnik Chuvashskogo universiteta* [Bulletin of Chuvash University]. 2016. No 3. Pp. 217–226. (In Russ.)
9. **Akinshin O. N., Esikov D. O., Akinshina N. Yu.** Features of Solving the Enterprise Investment Portfolio Optimization Problem Using the Particle Swarm Method. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki* [Izvestiya of Tula State University. Technical Sciences]. 2016. No 5. Pp. 109–116. (In Russ.)
10. **Esikov O. V., Rummyantsev V. L., Starozhuk E. A.** Application of Swarm Algorithms for Solving the Problem of Selecting Operating Frequencies of Radio Equipment of the Air Traffic Control System. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki* [Izvestiya of Tula State University. Technical Sciences]. 2016. No 2. Pp. 85–92. (In Russ.)

11. **Pyankov O. V., Popov A. V.** Decision-Making Model for Improving the Responsiveness of Police Detention Groups Using Swarm Algorithms. *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii* [Bulletin of the Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia]. 2020. No 4. Pp. 73–83. (In Rus.)
12. **Akhmadiev F. G., Malanichev I. V.** Population Algorithms of Structural and Parametric Optimization in Construction Design. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta* [Izvestiya of Kazan State University of Architecture and Engineering] 2018. No 2 (44). Pp. 215–223. (In Rus.)
13. **Rahmatulloh A., Nugraha G. F., Darmawan I.** Hybrid PSO-Adam Optimizer Approach for Optimizing Loss Function Reduction in the Dist-YOLOv3 Algorithm. *International Journal of Intelligent Engineering and Systems*. 2024. Vol. 17. No 5. Pp. 199–209. DOI: 10.22266/ijies2024.1031.16.
14. **Panteleev A.V., Belyakov I.A.** Development of Software for a Global Optimization Method Simulating the Behavior of a Grey Wolf Pack. *Modelirovaniye i analiz dannykh* [Modeling and Data Analysis]. 2021. No 2. Pp. 59–73. DOI: 10.17759/mda.2021110204. (In Rus.)
15. **Khishe M., Mosavi M. R.** Chimp optimization algorithm. *Expert Systems with Applications*. 2020. Vol. 149. P. 113338. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113338.
16. **Mittal N., Singh U., Sohi B. S.** Modified grey wolf optimizer for global engineering optimization. *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*. 2016. Article ID 7950348. (4598). Pp. 1–16. DOI: 10.1155/2016/7950348.
17. **Yang X.-S.** A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm. *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization (eds. J. R. Gonzalez et al.)*, Studies in Computational Intelligence, Springer Berlin, 284, Springer, 2010. Pp. 65–74. DOI: 10.1007/978-3-642-12538-6\_6.
18. **Mirjalili S., Lewis A.** The Whale Optimization Algorithm. *Advances in Engineering Software*. 2016. No 95. Pp. 51–67. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2016.01.008.

19. **Mirjalili S.** SCA: a sine cosine algorithm for solving optimization problems. *Knowl. Based Syst.* 2016. Vol. 96. Pp. 120–133. DOI: 10.1016/j.knosys.2015.12.022.
20. **Pilcevic D., Djuric Jovicic M., Antonijevic M. et al.** Performance evaluation of metaheuristics-tuned recurrent neural networks for electroencephalography anomaly detection. *Front Physiol.* 2023. Nov 14; 14: 1267011. DOI: 10.3389/fphys.2023.1267011.
21. **Almufti S. M., Asaad R. R., Salim B. W.** Review on Elephant Herding Optimization Algorithm Performance in Solving Optimization Problems. *International Journal of Engineering & Technology.* 2018. 7 (4). Pp. 6109–6114. DOI: 10.14419/ijet.v7i4.23127.

Сведения об авторах / Information about authors

Бабикова Надежда Николаевна / Nadezhda N. Babikova

к.пед.н., доцент, доцент кафедры прикладной информатики / Candidate of Sciences in Pedagogical, Associate Professor, Associate Professor of Applied Informatics Department

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Котелина Надежда Олеговна / Nadezhda O. Kotelina

к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 28.11.2025

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 01.12.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 05.12.2025

# Contents

## Mathematics

- Vechtomov E. M.** *Trees as Hasse graphs of finite semilattices with retracts* . . . . . 4

## Applied mathematics and mechanics

- Chernov V. G.** *Solving a conflict situation with linguistic parameter estimates* . . . . . 15

## Computer sciences

- Golchevskiy Yu. V., Zakharov I. D.** *Development of database management systems analysis* . . . . . 38

## Mathematics education

- Sushkov V. V.** *Fundamentalization of mathematical education in the context of digital transformation challenges: theoretical and methodological aspect* . . . . . 59

## Methodical materials

- Babikova N. N., Kotelina N. O.** *Comparative analysis of swarm intelligence algorithms: GWO and ChOA* . . . . . 73

*Научное периодическое издание*

**Вестник Сыктывкарского университета**  
**Серия 1: Математика. Механика. Информатика**  
**Выпуск 4 (57) 2025**

Гл. редактор О. А. Сотникова  
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Л. Н. Руденко  
Компьютерный макет Е. Н. Старцевой  
Корректор Е. М. Насирова

Подписано в печать 10.12.2025. Дата выхода в свет 24.12.2025.

Формат  $70 \times 108 \frac{1}{16}$ .

Гарнитура Computer Modern.

Усл. печ. л. 11.3

Тираж 30 экз. Заказ № 92.

---

Отпечатано в соответствии с предоставленными  
материалами в ООО «Коми республиканская типография»  
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81  
Тел. 8(8212)-28-46-60  
Сайт: [komitip.ru](http://komitip.ru)

