МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

MATHEMATICS EDUCATION

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025.
Выпуск 2 (55)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2025; 2 (55)

Научная статья

УДК 378.016
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_2_20

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ О ФУНКЦИЯХ И БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

Евгений Михайлович Вечтомов,
Арсений Андреевич Мамаев
Вятский государственный университет, vecht@mail.ru,
arseniyxo@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются естественные комбинаторные задачи, связанные с подсчетом числа различных бинарных отношений между конечными множествами.

Ключевые слова: конечное множество, функция, бинарное отношение, комбинаторные задачи о бинарных отношениях

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-12-00117.

Для цитирования: Вечтомов Е. М., Мамаев А. А. Комбинаторные задачи о функциях и бинарных отношениях // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2025. Вып. 2 (55). С. 20−37. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_2_20

Article

COMBINATORIAL PROBLEMS ABOUT FUNCTIONS AND BINARY RELATIONS

Evgeny M. Vechtomov, Arseniy A. Mamaev
Vyatka State University, vecht@mail.ru, arseniyxo@yandex.ru

Abstract. The article considers and analyzes natural combinatorial problems related to counting the number of different binary relations between finite sets.

Keywords: finite set, function, binary relation, combinatorial problems about binary relations

Funding. The work was carried out with the support of the Russian Science Foundation, project 24-12-00117.

For citation: Vechtomov E. M., Mamaev A. A. Combinatorial problems about functions and binary relations. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2025, no 2 (55), pp. 20–37. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2025_2_20

1. Введение

Понятие *функционального отношения* (функции, отображения) и более общее понятие *бинарного отношения* — важнейшие понятия современной математики, пронизывающие все ее разделы.

Функциональные отношения математически выражают, отражают и воплощают идею *движения* (изменения, преобразования) — фундаментальной философской и общенаучной категории.

К основным типам бинарных отношений на множестве принадлежат *отношение эквивалентности* и *отношение порядка.* Отношение эквивалентности выражает основополагающую гносеологическую идею *классификации* вещей по тому или иному признаку, идею факторизации. Отношение порядка (и несколько более широкое понятие *квазипорядка* или предпорядка) отражает идею *сравнения* вещей *по некоторой величине.*

Сказанное подчеркивает значимость бинарных отношений как в самой математике, так и в ее приложениях и в научном познании в целом.

Понятие бинарного отношения, как и его виды, довольно абстрактно. Для его прочного усвоения необходимо изучение разнообразных примеров и исходных утверждений о бинарных отношениях. Весьма полезно наглядное представление бинарных отношений диаграммами, таблицами, графами. Это в первую очередь касается рассмотрения бинарных отношений между конечными множествами. При этом неоценимо решение перечислительных комбинаторных задач — задач на подсчет числа бинарных отношений различных видов (функций, перестановок, размещений, сочетаний, разбиений). Методика изучения бинарных отношений рассматривается в работах [1; 2].

Цель статьи — привлечь внимание преподавателей и учителей математики и информатики к теме комбинаторики бинарных отношений, имеющей, на наш взгляд, принципиально важное значение в математическом образовании.

Кратко о содержании статьи.

В разделе 2 даны определения основных понятий, приведены исходные факты и элементарные комбинаторные методы.

Раздел 3 содержит решение комбинаторных задач о числе функций разных видов между конечными множествами и решение задач о числе бинарных отношений различных видов между конечными множествами. Кроме того, сформулировано несколько научно-исследовательских комбинаторных задач. Следует отметить, что большинство задач представлены как утверждения, а их решения — как доказательства соответствующих соотношений и формул.

В разделе 4 подведены итоги проделанной работы.

Первый из авторов статьи предложил ее тему, содержание и структуру, второй автор дал решения всех задач из пунктов 3.1 и 3.2.

2. Материалы и методы

В статье рассматриваются подходы к решению комбинаторных задач, связанных с подсчетом числа различных функций и бинарных отношений между конечными множествами. Основное внимание уделено конкретным методам решения таких комбинаторных задач. Также исследуются более сложные комбинаторные структуры, возникающие при анализе композиции функций и бинарных отношений.

Начнем с определения базовых понятий.

Бинарное отношение ρ между множествами A и B есть подмножество прямого произведения $A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$; вместо $(a, b) \in \rho$ пишем $a\rho b$.

Бинарное отношение между одинаковыми множествами $A = B$ называется *бинарным отношением на множестве* A.

Бинарное отношение ρ между множествами A и B называется:

- *всюду определенным*, если $\forall a \in A\ \exists b \in B \colon a\rho b$;
- *однозначным*, если $\forall a \in A,\ \forall b_1, b_2 \in B \colon a\rho b_1\ \&\ a\rho b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$;
- *инъективным*, если $\forall a_1, a_2 \in A,\ \forall b \in B \colon a_1\rho b\ \&\ a_2\rho b \Rightarrow a_1 = a_2$;
- *сюръективным*, если $\forall b \in B\ \exists a \in A \colon a\rho b$;
- *функцией* (*отображением, функциональным отношением*), если ρ всюду определенное и однозначное;
- *частичной функцией*, если ρ однозначное;
- *многозначной функцией*, если ρ всюду определенное;
- *биекцией*, если ρ — инъективная и сюръективная функция;
- *дифункциональным*, если $\forall a_1, a_2 \in A,\ \forall b_1, b_2 \in B$:

$$a_1\rho b_1\ \&\ a_1\rho b_2\ \&\ a_2\rho b_1 \Rightarrow a_2\rho b_2.$$

Вообще говоря, частичные функции и многозначные функции не являются функциями.

Отображение $f \colon A \to A$ называется *идемпотентным*, если $\forall x \in A$: $f(f(x)) = f(x)$. Заметим, что отображения $A \to A$ называются *преобразованиями* множества A.

Пусть даны бинарные отношения $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$.

Важнейшим является понятие *композиции* $\sigma\rho \subseteq A \times C$ бинарных отношений ρ и σ: $\forall a \in A\ \forall c \in C$:

$$a(\sigma\rho)c \Leftrightarrow \exists b \in B(a\rho b\ \&\ b\sigma c).$$

Композиция бинарных отношений ассоциативна, если определена.

Бинарное отношение $\rho^{-1} \subseteq B \times A$, $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$ называется *обратным* к отношению $\rho \subseteq A \times B$.

Имеют место равенства $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$ и $(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1}$.

Отображение $\rho \to \rho^{-1}$ является биекцией множества всех бинарных отношений между A и B на множество всех бинарных отношений между B и A.

Для любого бинарного отношения ρ между A и B имеем:
ρ всюду определено $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} сюръективно;
ρ однозначно $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} инъективно.

Бинарное отношение ρ на непустом множестве A может обладать некоторыми из следующих часто встречающихся свойств $(\forall a, b, c \in A)$:

- *рефлексивность*: $a\rho a$ (т. е. $1_A \subseteq \rho$);
- *симметричность*: $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ ($\rho \subseteq \rho^{-1}$, т. е. $\rho = \rho^{-1}$);
- *транзитивность*: $a\rho b$ & $b\rho c \Rightarrow a\rho c$ ($\rho\rho \subseteq \rho$);
- *антирефлексивность*: $\neg(a\rho a)$ ($1_A \cap \rho = \varnothing$);
- *антисимметричность*: $a\rho b$ & $b\rho a \Rightarrow a = b$ ($\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$).

Бинарное отношение на непустом множестве называется:

- отношением эквивалентности (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;
- отношением порядка (порядком), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- строгим порядком, если оно антирефлексивно и транзитивно;
- квазипорядком (предпорядком), если оно рефлексивно и транзитивно;
- отношением сходства (сходством), если оно рефлексивно и симметрично.

Бинарные отношения удобно изображать матрицами и ориентированными графами (стрелками). Разнообразные примеры и упражнения приведены в главе 1 учебного пособия [3].

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и для любых $a, b \in A$ соотношение $a\rho b$ означает, что a строго делит b или b строго делит a. Получаем антирефлексивное симметричное бинарное отношение ρ на множестве A, не являющееся транзитивным. Изобразим отношение ρ в виде квадратной матрицы 8-го порядка с элементами 0 и 1 (см. рис. 1) и представим ρ как простой граф (см. рис. 2).

$$\begin{array}{c|c} \rho & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 1. Матрица отношения ρ

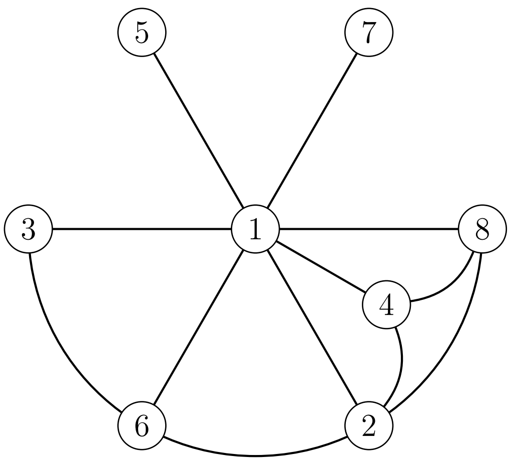

Рис. 2. Простой граф отношения ρ

Разбиение непустого множества A — это множество $\Sigma = \{A_i : i \in I\}$ непустых попарно непересекающихся подмножеств $A_i \subseteq A$, дающих в объединении все множество A:

1. $\forall i \in I : \varnothing \neq A_i \subseteq A$;

2. $\forall i, j \in I : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;

3. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Множества A_i $(i \in I)$ называются *классами разбиения* Σ.

Пусть дано непустое множество A.

Если $\Sigma = \{A_i\colon i \in I\}$ — разбиение множества A, то, полагая

$$a\rho(\Sigma)b \Leftrightarrow \exists i \in I\colon a, b \in A_i \ (\forall a, b \in A),$$

получим отношение эквивалентности $\rho(\Sigma)$ на множестве A.

Возьмем отношение эквивалентности ρ на множестве A. Для любого элемента $a \in A$ определим *класс эквивалентности* $a/p = \{x \in A\colon x\rho a\}$. Получаем *фактор-множество* $A/\rho = \{a/\rho\colon a \in A\}$ множества A по эквивалентности ρ, которое является, как легко показать, разбиением множества A.

Теорема. *Для любого непустого множества A отображения $\rho \to A/\rho$ и $\Sigma \to \rho(\Sigma)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством всех отношений эквивалентности на множестве A и множеством всех его разбиений.*

Упражнение. Докажите равенства $\rho(A/\rho) = \rho$ и $A/\rho(\Sigma) = \Sigma$.

При решении комбинаторных задач часто применяется

Правило произведения. *Если A_1, A_2, ..., A_k — непустые конечные множества, имеющие n_1, n_2, ..., n_k элементов соответственно, то прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ имеет ровно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_k$ элементов.*

Замечание 1. При решении конкретных комбинаторных задач правило произведения применяется следующим образом. Предположим, нам нужно последовательно выбрать k каких-то предметов, причем выбор первого предмета осуществим n_1 способами (из множества A_1), выбор второго предмета возможен n_2 способами (из множества A_2) и так далее, k-й предмет можно выбрать n_k способами (из множества A_k). Тогда число способов выбора всей последовательности k данных предметов равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_k$. Например, число всех подстановок (перестановок) k-й степени равно $P_k = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$, поскольку на первом месте может находиться любой из k данных элементов (обычно берутся числа 1, 2, ..., k), на втором месте может быть любой из $k-1$ оставшихся элементов и так далее, на k-м месте находится последний из неиспользованных элементов.

Мы будем свободно применять правило произведения, не ссылаясь на него непосредственно.

Напомним следующие обозначения. Пусть $k \leqslant n$ — натуральные числа.

$\binom{n}{k}$ – число k-элементных подмножеств n-элементного множества (число сочетаний из n по k). Можно также считать $\binom{n}{0} = 1$.

$\left\{ {n \atop k} \right\}$ – число разбиений n-элементного множества на k подмножеств.

Число всех взаимно однозначных отображений (биекций) n-элементного множества на себя равно $n! = P_n$ — числу перестановок n-степени.

Число перестановок с повторениями типа $(n_1, \ldots, n_k)$ n-элементного множества равно $P(n_1, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Имеем:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!};$$
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \text{ при } k < n.$$

Бином Ньютона. Для любого натурального числа n и любых комплексных чисел a, b выполняется равенство

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

В частности, при $a = b = 1$ получаем

$$1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n,$$

откуда следует, что булеан (множество всех подмножеств) n-элементного множества имеет 2^n элементов.

Материал о бинарных отношениях и элементы комбинаторики содержатся в статьях [1; 2] и книгах [3–5; 7; 8].

Числа Фибоначчи суть числа последовательности $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8, \ldots$, образованной по правилу $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для всех натуральных чисел $n \geqslant 2$. Информацию о числах Фибоначчи можно найти, например, в известной книге [7, параграф 6.6].

Лемма. $F_{n+2} = 3F_n - F_{n-2}$ *для любого натурального числа* $n \geqslant 2$.

В самом деле,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = (F_n + F_{n-1}) + F_n = \\ = (F_n + F_{n-1} + F_{n-2}) + F_n - F_{n-2} = 3F_n - F_{n-2}.$$

В пункте 3.3 нам понадобятся следующие понятия теории упорядоченных множеств и решеток, которые можно найти в монографиях [6; 8, глава 3].

Непустое множество X с заданным на нем отношением порядка $\leqslant$ называется *упорядоченным множеством*. *Цепью* называется упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$, любые два элемента x и y которого сравнимы, т. е. $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Отображение f упорядоченного множества $\langle X, \leqslant \rangle$ в упорядоченное множество $\langle Y, \sqsubset \rangle$ называется *изотонным*, если для любых $a, b \in X$ неравенство самих элементов $a \leqslant b$ влечет неравенство их образов $f(a) \sqsubset f(b)$.

Полурешетка — это идемпотентная коммутативная полугруппа. Если в полурешетке $\langle X, + \rangle$ задать бинарное отношение $\leqslant$ формулой: $a \leqslant b \Leftrightarrow a + b = b$ для любых $a, b \in X$, то получим упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$, в котором $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in X$, называемое *верхней полурешеткой*.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle X, +, \cdot \rangle$, для которой $\langle X, + \rangle$ и $\langle X, \cdot \rangle$ — полурешетки и операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ связаны законами поглощения $x + xy = x$ и $x(x + y) = x$. При этом соответствующая полурешетке $\langle X, + \rangle$ верхняя полурешетка $\langle X, \leqslant \rangle$ удовлетворяет равенству $a \cdot b = \inf\{a, b\}$ для любых $a, b \in X$. Цепи являются решетками.

Отношение эквивалентности ρ на решетке (верхней полурешетке) X называется *конгруэнцией* на X, если для любых $a, b, c, d \in X$ соотношения $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a + c)\rho(b + d)$ и $(ac)\rho(bd)$ (соответственно $(a + c)\rho(b + d)$).

Ретракцией решетки (*полурешетки*) X назовем любой ее идемпотентный решеточный (полурешеточный) гомоморфизм.

3. Результаты

Представленные нами задачи предназначены студентам естественно-математических направлений подготовки, будущим учителям математики и информатики, а также старшеклассникам, занимающихся в математических кружках или участвующих в математических олимпиадах.

Даны строгие лаконичные решения комбинаторных задач. При непосредственном обучении студентов и школьников решению комбинаторных задач могут быть задействованы все методы и приемы, отмеченные в разделе 2.

3.1. Решение комбинаторных задач о функциях

Приведем несколько утверждений с доказательствами о числе функций различного вида из одного конечного множества в другое конечное множество.

В этом пункте и начале следующего пункта будем рассматривать два произвольных непустых конечных множества A и B, имеющих m и n элементов соответственно.

3.1.1. *Число всех отображений m-элементного множества в n-элементное множество равно n^m.*

Доказательство. Каждый из m элементов множества A при произвольном отображении может перейти в один из n элементов из множества B. Поэтому всего имеем $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m$ отображений $A \to B$. □

3.1.2. *Число всех инъективных отображений m-элементного множества в n-элементное множество при условии $m \leqslant n$ равно $m!\binom{n}{m}$.*

Доказательство. При инъективном отображении различные элементы имеют различные образы. Всего $\binom{n}{m}$ инъективных вложений множества A во множество B. Для каждого из вложений сопоставляем прообразы, которые можно выбрать $m!$ способами. Получаем $m!\binom{n}{m}$ инъективных отображений. □

3.1.3. *Число всех сюръективных отображений m-элементного множества на n-элементное множество при условии $m \geqslant n$ равно $n\left\{ {m \atop n} \right\}$.*

Доказательство. Образ сюръекции совпадает со всем множеством B. Разобьем множество A на n подмножеств — сделать это можно $\left\{ {m \atop n} \right\}$ способами, и каждому из подмножеств сопоставим один элемент из множества B. Всего имеем $n\left\{ {m \atop n} \right\}$ таких отображений. □

3.1.4. *Число всех идемпотентных отображений n-элементного множества в себя равно $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-k}$.*

Доказательство. Возьмем произвольное идемпотентное отображение $f\colon B \to B$. Пусть ровно k элементов множества B (где $1 \leqslant k \leqslant n$, поскольку идемпотентность отображения требует наличия хотя бы одной неподвижной точки) остаются неподвижными при отображении f. Тогда оставшиеся $n-k$ элементов обязаны перейти в неподвижные, иначе будет нарушена идемпотентность. Такие элементы можно выбрать $\binom{n}{k}$ способами. В силу задачи 3.1.1 при фиксированном k имеем k^{n-k} таких отображений. Осталось просуммировать произведения $\binom{n}{k} k^{n-k}$ по всем k: $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$. □

3.1.5. *Число всех частичных функций m-элементного множества в n-элементное множество равно* $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} n^k = (n+1)^m$.

Доказательство. Область определения частичных функций не обязана совпадать со всем множеством A. Докажем истинность утверждения несколькими способами.

1-й способ. Воспользуемся задачей 3.1.1. Для любого k-элементного подмножества множества A, где $k \leqslant m$, всего n^k произвольных отображений. Сумма количеств таких отображений по всем k дает число частичных функций на A. Найдем эту сумму по биному Ньютона: $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} n^k = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} n^k \cdot 1^{m-k} = (n+1)^m$.

2-й способ. Каждый элемент в A либо переходит при отображении в один из n элементов, либо не входит в область определения и не имеет образа. Всего имеем $n+1$ вариант. Значит, количество частичных функций равно $(n+1)^m$. □

3.1.6. *Число всех многозначных функций m-элементного множества в n-элементное множество равно* $(2^n-1)^m$.

Доказательство. Функция определена на A, то есть каждый элемент должен иметь непустой образ. В связи с многозначностью функции одному элементу сопоставляется непустое подмножество множества B. Всего существует 2^n-1 непустых подмножеств множества B. Получаем $(2^n-1)^m$ многозначных функций. □

3.2. Решение комбинаторных задач о бинарных отношениях

Рассмотрим решение учебно-исследовательских комбинаторных задач о бинарных отношениях между конечными множествами. Пусть $\rho \subseteq A \times B$ — произвольное бинарное отношение.

3.2.1. *Число всевозможных бинарных отношений между m-элементным и n-элементным множествами равно 2^{mn}.*

Доказательство. Для каждой пары $(a, b) \in A \times B$ бинарного отношения ρ есть два взаимоисключающих случая: $(a, b) \in \rho$ или $(a, b) \notin \rho$. Количество пар (a, b) равно mn. Поэтому число всевозможных бинарных отношений равно 2^{mn}. □

3.2.2 *Число всех инъективных бинарных отношений между m-элементным и n-элементным множествами равно $(m + 1)^n$.*

Доказательство. Аналогично задаче 3.1.5 каждый элемент из B может быть в отношении с любым количеством элементов из A, в том числе ни с одним: получаем $m+1$ вариант. Поэтому всего $(m+1)^n$ инъективных бинарных отношений. □

3.2.3. *Число всех сюръективных бинарных отношений между m-элементным и n-элементным множествами равно $(2^m - 1)^n$.*

Доказательство. Задача двойственна задаче 3.1.6. Любой элемент из B должен находиться в данном отношении хотя бы с одним элементом множества A. Значит, всего имеется $(2^m - 1)^n$ сюръективных бинарных отношений. □

Далее в этом пункте A — произвольное n-элементное множество ($n \in \mathbb{N}$). Каждому бинарному ρ отношению на множестве A соответствует $\{0, 1\}$-матрица M размера $n \times n$, такая что в клетке $(a, b) \in A \times A$ стоит 1, если $a\rho b$, и расположен 0, если $\neg(a\rho b)$. См. рис. 1.

3.2.4. *Число всех рефлексивных (всех антирефлексивных) бинарных отношений на n-элементном множестве равно 2^{n^2-n}.*

Доказательство. Для рефлексивного отношения выполняется $a\rho a$, для антирефлексивного имеем $\neg(a\rho a)$. Эти условия фиксируют данные пары, которые не влияют на подсчет количества искомых бинарных отношений. Таких пар всего n. Согласно задаче 3.2.1 остается $n^2 - n$ элементов, которые могут как принадлежать отношению ρ, так и не принадлежать ему. Всего получаем 2^{n^2-n} рефлексивных (антирефлексивных) бинарных отношений. $\square$

3.2.5. *Число всех симметричных бинарных отношений на n-элементном множестве равно $2^{(n^2+n)/2}$.*

Доказательство. Мощность множества $A \times A$ составляет n^2. При этом количество диагональных элементов (a, a) равно n. Такие элементы могут или входить в отношение, или не входить. Остальные $n^2 - n$ элементов имеют вид (a, b), где $a \neq b$. При этом если $(a, b) \in \rho$, то $(b, a) \notin \rho$. Следовательно, общее количество вариантов выбора элементов составляет $n + \dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$. Тогда число симметричных бинарных отношений будет равно $2^{(n^2+n)/2}$. $\square$

3.2.6. *Число всех отношений сходства на n-элементном множестве равно $2^{(n^2-n)/2}$.*

Доказательство. Усилим условия задачи 3.2.5. Теперь диагональные элементы обязаны входить в бинарное отношение. Поэтому всего $2^{(n^2-n)/2}$ отношений сходства. $\square$

3.2.7. *Число всех рефлексивных (антирефлексивных) антисимметричных бинарных отношений на n-элементном множестве равно $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{m-k} = 3^m$, где $m = \dfrac{n^2 - n}{2}$.*

Доказательство. Будем рассматривать произвольные бинарные отношения ρ, удовлетворяющие условию утверждения. Диагональные элементы матрицы M либо принадлежат бинарному отношению ρ (рефлексивное отношение), либо не принадлежат ρ (антирефлексивное отношение), поэтому не влияют на подсчет числа таких бинарных отношений ρ. Число элементов — пар, не находящихся на главной диагонали, равно $n^2 - n$. Положим $m = \dfrac{n^2 - n}{2}$.

1-й способ. Пусть X — множество клеток матрицы M, находящихся под ее главной диагональю; оно имеет m элементов. Для любого неотрицательного целого числа $k \leqslant m$ возьмем произвольное k-элементное подмножество Y в X. Во всех клетках из Y поставим 1, а в остальных $m - k$ клетках поставим 0. Элементы матрицы M, симметричные элементам из $X \setminus Y$ (из Y), могут принимать значения 0 или 1 (только значение 0). Поэтому число матриц M для k-элементных подмножеств Y равно 2^{m-k}. Поскольку число k-элементных подмножеств Y в X равно $\binom{m}{k}$, то всего рассматриваемых бинарных отношений ρ будет $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{m-k}$. По биному Ньютона получаем $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{m-k} = (2+1)^m = 3^m$.

2-й способ. Для каждой пары (a, b) элементов из A возможны три взаимоисключающих варианта:

$(a, b) \notin \rho$ и $(b, a) \notin \rho$;
$(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \notin \rho$;
$(b, a) \in \rho$ и $(a, b) \notin \rho$.

Количество неупорядоченных элементов равно $\binom{n}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2} = m$. Поэтому получаем 3^m искомых бинарных отношений. □

3.2.8. *Число всех антисимметричных бинарных отношений на n-элементном множестве равно* $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{m-k+n} = 3^m 2^n$, *где* $m = \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Доказательство. Обобщим утверждение задачи 3.2.7. Рефлексивность или антирефлексивность не требуется. Поэтому $\forall a \in A$: $(a, a) \in \rho$ или $(a, a) \notin \rho$. Отсюда возникает множитель 2^n. □

3.2.9. *Число всех отношений эквивалентности на n-элементном множестве равно числу его разбиений, т. е. равно* $\sum\limits_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой из раздела 2.

Пусть на непустом множестве A задано бинарное отношение ρ. Отображение $f\colon A \to A$ называется *эндоморфизмом* математической структуры $\langle A, \rho \rangle$, если $a \rho b \Rightarrow f(a) \rho f(b)$ для любых $a, b \in A$. Биекция $f\colon A \to A$ называется *автоморфизмом* структуры $\langle A, \rho \rangle$, если отображения f и f^{-1} суть ее эндоморфизмы.

3.2.10. *Если A — непустое конечное множество, то любой взаимно однозначный эндоморфизм $\langle A, \rho \rangle$ будет автоморфизмом.*

Доказательство этого утверждения оставляем читателю в качестве упражнения на зрелость.

3.3. Некоторые научно-исследовательские задачи

Сформулируем ряд комбинаторных задач для дальнейших исследований.

Пусть $\boldsymbol{C}_n$ обозначает n-элементную цепь при $n \in \mathbb{N}$.

3.3.1. *Для любого натурального числа n число* $\mathrm{Ret}(n)$ *всех изотонных идемпотентных преобразований (ретракций) цепи $\boldsymbol{C}_n$ равно F_{2n} — числу Фибоначчи с номером $2n$.*

3.3.2. Выведите рекуррентную формулу для функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $f(n)$ есть число всех ретракций решетки $\boldsymbol{C}_2 \times \boldsymbol{C}_n$.

3.3.3. Вывести формулу для числа всех решеточных ретракций прямого произведения цепей $\boldsymbol{C}_m$ и $\boldsymbol{C}_n$.

3.3.4. Найти число всех конгруэнций верхней полурешетки $\boldsymbol{C}_m \times \boldsymbol{C}_n$.

3.3.5. Найти число всех ретракций верхней полурешетки $\boldsymbol{C}_m \times \boldsymbol{C}_n$.

3.3.6. Найти или оценить снизу и сверху число всех транзитивных бинарных отношений на n-элементном множестве.

3.3.7. Определить число всех дифункциональных отношений между m-элементным и n-элементным множествами.

3.3.8. Оценить число всех упорядочений n-элементного множества, т. е. число отношений порядка на n-элементном множестве.

3.3.9. Оценить число всех топологизаций n-элементного множества.

В качестве иллюстрации способов рассуждений приведем **доказательство утверждения 3.3.1**.

Сначала докажем следующее равенство

$$\mathrm{Ret}(n) = \mathrm{Ret}(n-1) + 2\mathrm{Ret}(n-2) + \ldots + k\mathrm{Ret}(n-k) + \ldots + (n-1)\mathrm{Ret}(1) + 1. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть e — ретракция n-элементной цепи. Если она имеет m неподвижных элементов $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, то n-элементная цепь разбивается на m последовательных интервалов $e^{-1}(i_1)$, $e^{-1}(i_2)$, $\ldots$, $e^{-1}(i_m)$, имеющих соответственно n_1, n_2, $\ldots$, n_m элементов, дающих в сумме все n элементов. При $n_1 = 1$ получаем $\mathrm{Ret}(n-1)$ таких ретракций e. При $n_1 = 2$ число ретракций e равно $2\mathrm{Ret}(n-2)$. Ясно, что при $n_1 = k \leqslant n$ число ретракций e будет равно $k\mathrm{Ret}(n-k)$. Что и дает нам формулу (1).

Далее, индукцией по n, на основании формулы (1), выведем формулу

$$\mathrm{Ret}(n) = 3\mathrm{Ret}(n-1) - \mathrm{Ret}(n-2). \quad (2)$$

Предположив, что равенство (2) выполняется для всех натуральных чисел k (вместо n), $3 \leqslant k \leqslant n$, докажем его для $n+1$. Подставив в равенстве (1) $\mathrm{Ret}(k) = 3\mathrm{Ret}(k-1) - \mathrm{Ret}(k-2)$ для всех k от 3 до n, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Ret}(n+1) &= 3\mathrm{Ret}(n-1) - \mathrm{Ret}(n-2) + 2(3\mathrm{Ret}(n-2) - \mathrm{Ret}(n-3)) + \ldots \\ &+ (n-2)(3\mathrm{Ret}(2) - \mathrm{Ret}(1)) + (n-1)\mathrm{Ret}(2) + n\mathrm{Ret}(1) + n + 1 = \\ &= 3\left[n + \sum_{k=1}^{n-1} k\mathrm{Ret}(n-k)\right] - \left[n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k\mathrm{Ret}(n-k-1)\right] = \\ &= 3\mathrm{Ret}(n) - \mathrm{Ret}(n-1),\end{aligned}$$

поскольку

$$(n-1)\mathrm{Ret}(2) = 3(n-1)\mathrm{Ret}(1) \text{ и } n\mathrm{Ret}(1) + n + 1 = 2n + 1 = 3n - (n-1).$$

По лемме из раздела 2 для F_{2n} — как функции от n — также выполняется рекуррентное соотношение (2). Поскольку $\mathrm{Ret}(1) = 1 = F_2$ и $\mathrm{Ret}(2) = 3 = F_4$, то $\mathrm{Ret}(n) = F_{2n}$ для любого натурального числа n. Утверждение доказано. □

Замечание 2. Численные значения для целого ряда конечных математических структур с n-элементами, в частности число n-элементных упорядоченных множеств и топологических пространств, можно найти в следующей онлайн-энциклопедии: The on-line encyclopedia of integer sequences (https://oeis.org).

4. Обсуждение

Мы неоднократно апробировали и обсуждали комбинаторные задачи из пунктов 3.1 и 3.2 и близкие к ним на занятиях со студентами и школьниками, включали такие задачи в проводимые нами математические олимпиады. Можно с уверенностью заключить, что представленные задачи полезны и доступны как студентам младших курсов, так и старшеклассникам. Эти задачи должны знать и использовать вузовские преподаватели математики и школьные учителя математики и информатики. Решение подобных комбинаторных задач хорошо проясняет понятие бинарного отношения, позволяет осознанно применять элементарные комбинаторные методы и результаты при изучении дискретной математики и в ее приложениях.

Список источников

1. **Вечтомов Е. М.** Бинарные отношения // *Математика в образовании.* 2007. Вып. 3. С. 41–51.

2. **Вечтомов Е. М.** О бинарных отношениях для математиков и информатиков // *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета.* 2012. № 1 (3). С. 51–58.

3. **Вечтомов Е. М.** Математика: основные математические структуры. 2-е изд. М.: Юрайт, 2018. 296 с.

4. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Математика: логика, множества, комбинаторика. 2-е изд. М.: Юрайт, 2018. 243 с.

5. **Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.** Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2006. 400 с.

6. **Гретцер Г.** Общая теория решеток : пер. с англ. М.: Мир, 1981. 456 с.

7. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики : пер. с англ. М.: Мир, 1998. 703 с.

8. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика : пер. с англ. М.: Мир, 1990. 440 с.

References

1. **Vechtomov E. M.** Binary relations. *Matematika v obrazovanii* [Mathematics in Education]. 2007. No 3. Pp. 41–51. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M.** On binary relations for mathematicians and computer scientists. *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* [Bulletin of Vyatka State University of Humanities]. 2012. No 1 (3). Pp. 51–58. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M.** *Matematika: osnovnyye matematicheskiye struktury* [Mathematics: Fundamental Mathematical Structures]. Moscow: Yurayt, 2018. 296 p. (In Russ.)

4. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Matematika: logika, mnozhestva, kombinatorika* [Mathematics: Logic, Sets, Combinatorics]. Moscow: Yurayt, 2018. 243 p. (In Russ.)

5. **Vilenkin N. Y., Vilenkin A. N., Vilenkin P. A.** *Kombinatorika* [Combinatorics]. Moscow: MCNMO, 2006. 400 p. (In Russ.)

6. **Gratzer G.** *Obshchaya teoriya reshetok* [General Lattice Theory]. Moscow: Mir, 1981. 456 p. (In Russ.)

7. **Graham R., Knuth D., Patashnik O.** *Konkretnaya matematika. Osnovaniye informatiki* [Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science]. Moscow: Mir, 1998. 703 p. (In Russ.)

8. **Stanley R.** *Perechislitel'naya kombinatorika* [Enumerative Combinatorics]. Moscow: Mir, 1990. 440 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeny M. Vechtomov
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Россия, Киров, ул. Московская, д. 36 / 36, Moskovskaya St., Kirov, 610000, Russia

Мамаев Арсений Андреевич / Arseniy A. Mamaev
студент магистратуры / Master's Student
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Россия, Киров, ул. Московская, д. 36 / 36, Moskovskaya St., Kirov, 610000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 16.06.2025
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 20.06.2025
Принято к публикации / Accepted for publication 26.06.2025