НАСТАВНИК-УЧЕНИК

TUTOR-FOLLOWER

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 4 (53)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 517.9
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Андрей Васильевич Ермоленко,
Яков Алексеевич Поздеев
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, ea74@list.ru

Аннотация.
Решение уравнений в частных производных для произвольной области является нетривиальной задачей. В статье приводится алгоритм численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Приводятся примеры численных расчетов, оценивается погрешность полученных результатов.

Ключевые слова: численное решение, уравнение Пуассона, уравнение Лапласа, задача Дирихле

Для цитирования: Ермоленко А. В., Поздеев Я. А. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 4 (53). С. 84–94. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

Article

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN AN ARBITRARY DOMAIN

Andrey V. Yermolenko, Yakov A. Pozdeev
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

Abstract. Solving partial differential equations for an arbitrary domain is a non-trivial task. The article presents an algorithm for numerically solving the Dirichlet problem for the Poisson's equation. Examples of numerical calculations are given, and the error of the results obtained is estimated.

Keywords: numerical solution, Poisson's equation, the Laplace equation, the Dirichlet problem

For citation: Yermolenko A. V., Pozdeev Ya. A. On the numerical solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation in an arbitrary domain. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 84–94. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

1. Введение

В математическом моделировании уравнения эллиптического типа используются для определения стационарных состояний различной физической природы. Примером таких уравнений являются уравнения Лапласа и Пуассона [1]. Существуют как аналитические методы решения названных уравнений, например метод разделения переменных, использование функции источника (функции Грина) [1], так и численные методы, например метод конечных элементов, метод Либмана [2; 3]. Решения строят, как правило, для простейших областей, например прямоугольной или круглой.

Важным является оператор Лапласа и в механике пластин и оболочек, так как на его основе определяется бигармонический оператор, на основе которого формулируются уравнения равновесия пластин [2; 4]. При этом востребовано как быстродействие и точность методов, так и применимость к произвольным областям.

Все сказанное обусловливает востребованность усовершенствования методов решения уравнения Пуассона.

В численных методах для решения систем уравнений с большим числом узлов оказываются удобны итерационные методы – одним из наиболее простых и одновременно эффективных является процесс усреднения Либмана.

Метод Либмана основан на идее последовательного улучшения приближённого решения. На каждом шаге итерации вычисляется новое значение для каждой переменной на основе её предыдущего значения и текущих значений окружающих переменных.

Простота метода Либмана делает его привлекательным для реализации на ЭВМ, так как он не требует хранения больших объемов данных и обладает высокой устойчивостью к ошибкам округления. Эти свойства делают его удобным инструментом для инженерных и научных вычислений, позволяя эффективно решать задачи, возникающие в различных областях науки и техники.

Цель данной статьи – решить методом Либмана задачу Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области.

2. Материалы и методы

Применение теоретического метода позволило провести анализ существующих методов решения дифференциальных уравнений в частных производных и выбор метода Либмана для непосредственного решения. Практические методы заключаются в написании программы на языке Python [5] с последующим проведением численного эксперимента.

3. Результаты

3.1. Постановка задачи

Задачу Дирихле для уравнения Пуассона в двумерной односвязной области $D \subset \mathbf{R}^2$ можно записать в следующем виде:

$$\Delta u = f,$$

$$u|_G = g, \tag{1}$$

где

$$u = u(x,y), f = f(x,y), (x,y) \in D,$$

$$g = g(x,y), (x,y) \in G,$$

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовых координатах.

3.2. Метод Либмана

При построении графиков решений эллиптического уравнения приходится выбирать или численное моделирование, или построение точных аналитических решений в виде рядов или интегралов с последующим их упрощением. В обоих случаях приходится использовать численные методы.

Рассмотрим решение задачи (1) с использованием итерационного метод Либмана [3]. Для этого выберем прямоугольную сетку с узлами (x_m, y_n), где

$$x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$y_n = nl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \quad h > 0, \quad l > 0.$$

К сеточной области D_h отнесем все узлы, принадлежащие области $\overline{D} = D \cup G$ (рис. 1) [6].

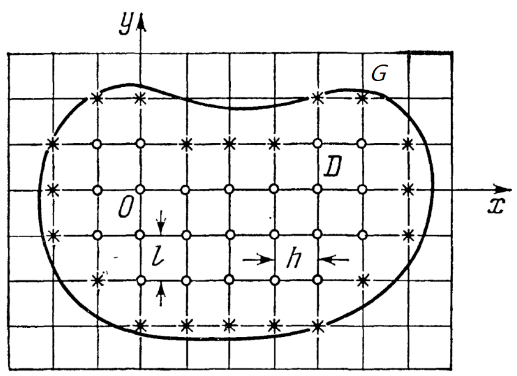

Рис. 1. Распределение узлов [6]

На основе пятиточечного шаблона (рис. 2) разобьем узлы области на две категории – внутренние и граничные. Узел (m, n) считается внутренним, если он сам и четыре соседние точки шаблона принадлежат области D_h, внутренние узлы помечены на рис. 1 знаком $\circ$, их множество обозначим через D_h°. Остальные узлы назовем граничными, они помечены на рис. 1 знаком $*$, множество этих узлов обозначим через G_h. В итоге получаем, что $D_h = D_h^\circ \cup G_h$. Таким образом, разбиение узлов области D_h на внутренние и граничные зависит от того, какой шаблон выбран для аппроксимации дифференциального уравнения.

Рассмотрим узел $(m, n) \in D_h^\circ$. Тогда уравнение $(1)_1$ во внутренних узлах принимает вид

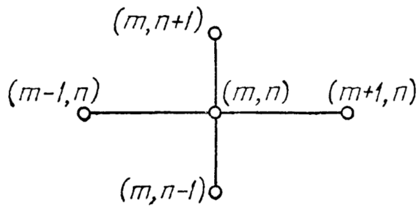

Рис. 2. Пятиточечный шаблон

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_m,y_n)} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{(x_m,y_n)} = f(x_m, y_n), \tag{2}$$

где в соответствии с работой [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_m,y_n)} \approx \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{(x_m,y_n)} \approx \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1})}{l^2}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2), будем иметь

$$\frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n)}{h^2} +$$

$$+\frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1})}{l^2} = f(x_m, y_n), (m,n) \in D_h^\circ. \tag{4}$$

Умножив обе части разностных уравнений (4) на $h^2 l^2$ и разделив полученные равенства на $2(h^2 + l^2)$, имеем

$$u_{mn} = \frac{l^2(u_{m+1,n} + u_{m-1,n}) + h^2(u_{m,n+1} + u_{m,n-1})}{2(h^2 + l^2)} - \frac{h^2 l^2}{2(h^2 + l^2)} f_{mn}, \tag{5}$$

где $f_{mn} = f_{x_m, y_n}$.

Итерационный процесс Либмана для полученной системы (5) имеет вид

$$u_{mn}^{(k)} = \frac{l^2(u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m-1,n}^{(k)}) + h^2(u_{m,n+1}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)})}{2(h^2 + l^2)} - \frac{h^2 l^2}{2(h^2 + l^2)} f_{mn},$$

$$k = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

В случае $h = l$ процесс (6) для уравнения Пуассона можно представить так:

$$u_{mn}^{(k)} = \frac{1}{4}[u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m-1,n}^{(k)} + u_{m,n+1}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)} - h^2 f(x_m^{(k)}, y_n^{(k)})],$$

$$k = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

а для уравнения Лапласа – в следующем виде:

$$u_{mn}^{(k)} = \frac{1}{4}[u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m-1,n}^{(k)} + u_{m,n+1}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)}], \quad k = 0, 1, 2, ...$$

В работе [6] показано, что итерационный процесс (6) сходится, то есть существует

$$\lim_{k\to\infty} u_{mn}^{(k)} = u_{mn}.$$

Для ускорения итерационного процесса при вычислении последующих значений необходимо использовать не только значения предыдущего приближения, но и текущего.

Для того чтобы начать вычислять последовательные приближения $u_{mn}^{(k)}$ по формуле (7), нужно задать начальное приближение $u_{mn}^{(0)}$. При этом $u_{mn}^{(0)}$ должны удовлетворять граничным условиям

$$u_{mn}^{(0)} = g(x_m, y_n), (x_m, y_n) \in G_h.$$

Полагая $k = 0, 1, ...,$ последовательно вычисляем по формулам (7) $u_{mn}^{(1)}, u_{mn}^{(2)}, ..., \quad m = 0, 1, 2, ..., M, \quad n = 0, 1, 2, ..., N$. Вычисления $u_{mn}^{(k)}$ проводим до такого значения k, при котором

$$\left|u_{mn}^{(k+1)} - u_{mn}^{(k)}\right| \leq \varepsilon$$

для заданного малого числа $\varepsilon > 0$ [6].

3.3. Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента использовался язык программирования Python [5]. Одним из главных преимуществ Python является большое количество библиотек, которые значительно ускоряют процесс разработки программ. Например, библиотека matplotlib позволяет создавать красивые и информативные графики, что полезно для анализа результатов вычислений. Библиотека numpy предоставляет широкие возможности для работы с многомерными массивами данных, делая использование численных методов в Python удобным и эффективным. А библиотека numba позволяет ускорить функции, написанные на Python, до уровня машинного кода.

Python также широко используется в научных и инженерных расчётах, что делает его идеальным выбором для разработки программ, связанных с численными методами.

При проведении численного эксперимента во всех случаях на границе использовались значения, полученные в результате аналитического решения задачи.

Чтобы проверить точность вычислений, были подобраны контрольные примеры. При этом погрешность вычислений определялась по формуле

$$\delta = \frac{\|u - u_{true}\|}{\|u_{true}\|} \cdot 100\%, \tag{8}$$

где u – решение задачи, вычисленное одним из методов, u_{true} – точное решение этой задачи.

Пример 1. Аналитическим решением задачи

$$\Delta u = 5e^{3x}\cos 2y - 5e^{2x}\cos 3y, (x, y) \in D,$$

$$u|_G = e^{3x}\cos 2y + e^{2x}\cos 3y,$$

где D – треугольник, задаваемый системой неравенств

$$\begin{cases} y > 2x - 1, \\ y > -2x + 1, \\ y > 0{,}9, \end{cases}$$

является функция $u_{true} = e^{3x}\cos 2y + e^{2x}\cos 3y, (x, y) \in D$ (рис. 3).

Пример 2. Аналитическим решением задачи

$$\Delta u = 8\cos^2(x + y) - 4, (x, y) \in D,$$

$$u|_G = \sin^2(x + y),$$

где D – круг, определенный неравенством

$$(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 < 0{,}19,$$

является функция $u_{true} = \sin^2(x + y),\ (x, y) \in D$ (рис. 4).

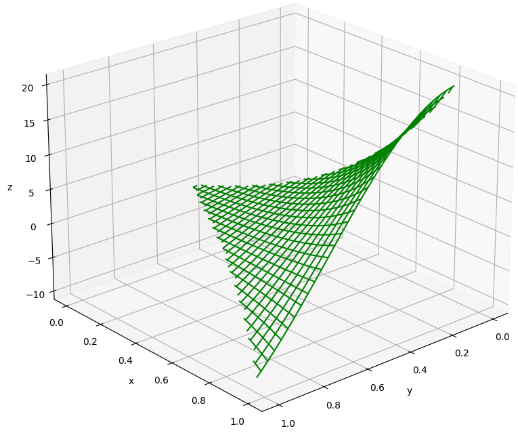

Рис. 3. $a = 1,\ b = 1,\ M = 100,\ N = 100,\ \varepsilon = 0{,}000001.$
Погрешность после 7179 итераций: 0,005 %

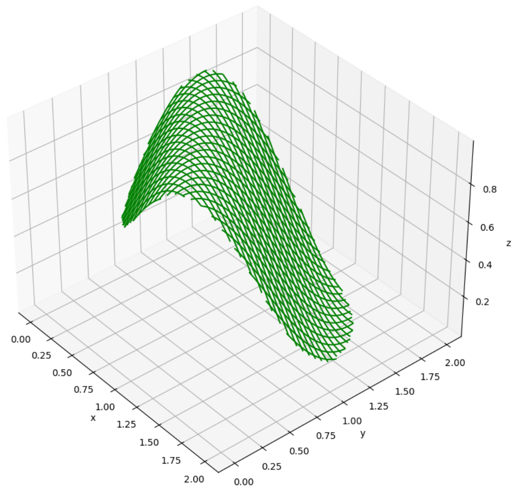

Рис. 4. $a = 2,\ \ b = 2,\ \ M = 100,\ \ N = 100,\ \ \varepsilon = 0{,}00001.$
Погрешность после 6658 итераций 0,65 %

Пример 3. Аналитическим решением задачи

$$\Delta u = (2 - y^2)\sin x + (2 - x^2)\sin y, (x, y) \in D,$$

$$u|_G = x^2 \sin y + y^2 \sin x,$$

где D – сложная фигура, состоящая из четырёх пересекающихся кругов, описываемых следующей системой неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}(x-3)^2+(y-3)^2<5,\\(x-3)^2+(y-7)^2<5,\\(x-7)^2+(y-3)^2<5,\\(x-7)^2+(y-7)^2<5,\end{array}\right.$$

является функция $u_{true} = x^2 \sin y + y^2 \sin x \in D$ (рис. 5).

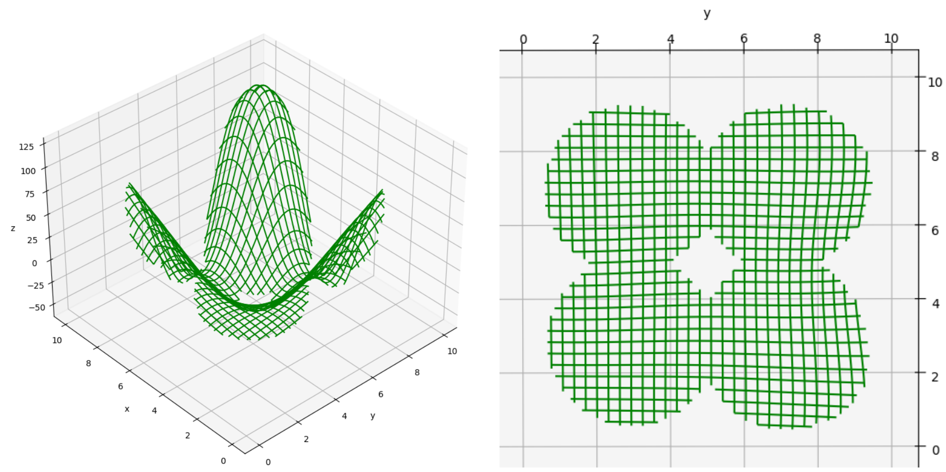

Рис. 5. $a = 10,\ b = 10,\ M = 100,\ N = 100,\ \varepsilon = 0{,}000001$.
Погрешность после 5016 итераций 0,035 %

На рис. 3 – 5 приведены примеры работы прораммы. Получено, что приемлемая погрешность достигается всегда.

4. Обсуждение

Представленная работа была выполнена в рамках курсовой работы по направлению «Математика и компьютерные науки», а также является дополнением к лекционному курсу по дисциплине «Численные методы».

Представленная работа поможет также исследователям, использующим численные методы при решении уравнений в частных производных в произвольной области.

Список источников

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. **Ермоленко А. В., Кожагельдиев Н. В.** Численное решение неоднородного бигармонического уравнения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 64–78.

3. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З .** Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 400 с.

4. **Ермоленко А. В.** Контактные задачи со свободной границей : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). 105 с.

5. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

6. **Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И.** Вычислительные методы : учеб. пособие. М. : Наука, 1977. Т. 2. 399 с.

References

1. **Tixonov A. N., Samarskij A. A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1977. 736 p. (In Russ.)

2. **Yermolenko A. V., Kozhageldiev N. V.** On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2022. No 3 (44). Pp. 64–78. (In Russ.)

3. **Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z.** *Chislennye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moscow: State

Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 400 p. (In Russ.)

4. **Yermolenko A. V.** *Kontaktnyye zadachi so svobodnoy granitsey : uchebnoye posobiye* [Contact problems with free boundary : textbook]. Syktyvkar: Izd. Pitirim Sorokin, 2020. 1 opt. compact disc (CD-ROM). 105 p. (In Russ.)

5. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2019. No 4 (33). Pp. 86–95. (In Russ.)

6. **Kry'lov V. I., Bobkov V. V., Monasty'rskij P. I.** *Vychislitel'nyye metody : ucheb. posobiye* [Computational methods : textbook]. Moscow: Nauka, 1977. Vol. 2. 399 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Ермоленко Андрей Васильевич / Andrei V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Поздеев Яков Алексеевич / Yakov A. Pozdeev
обучающийся бакалавриата / undergraduate student
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 20.11.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 30.11.2024
Принята к публикации / Accepted for publication 06.12.2024