ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ

THEORY AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 4 (53)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 372.851; 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ И СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Владимир Афанасьевич Тестов[1],
Роман Андреевич Попков[2]
[1]Вологодский государственный университет, vladafan@inbox.ru
[2]Университет ИТМО, r-popkov@yandex.ru

Аннотация. В статье показывается, что цифровая трансформация общества и образования связана с новым этапом математизации знаний и на современном этапе изменился и стиль математического мышления, и математическая парадигма. В соответствии с переменами необходимо менять как содержание математических курсов, так и методы их преподавания, отдавая предпочтение исследовательскому обучению и применению систем компьютерной алгебры. В настоящее время оптимальным выбором является система `Sage`. Особенности этой системы могут стать основой для анализа ведущих алгебраических идей, включая взаимодействие между алгеброй и геометрией. Это позволяет продемонстрировать силу достижений математики и значимость компьютерной алгебры. Важную роль в контексте обеспечения преемственности между программами средней школы и вузов и исследовательским обучением могут выполнять многочлены и векторы. Приводятся конкретные примеры использования системы `Sage` в теме «Векторные пространства» при решении различных исследовательских задач в вузовских математических курсах, обсуждаются некоторые «подводные камни».

Ключевые слова: математизация знаний, математическое моделирование, исследовательское обучение, компьютерные эксперименты

Для цитирования: Тестов В. А., Попков Р. А. Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 4 (53). С. 52–68. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52

Article

INVESTIGATIVE TRAINING IN MATHEMATICS AND COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS

Vladimir A. Testov[1], **Roman A. Popkov**[2]
[1]Vologda State University, vladafan@inbox.ru
[2]ITMO University, r-popkov@yandex.ru

Abstract. The article shows that the digital transformation of society and education is associated with a new stage of mathematization of knowledge and at the present stage both the style of mathematical thinking and the mathematical paradigm have changed. In accordance with the changes, it is necessary to change both the content of mathematical courses and the methods of teaching them, giving preference to inquiry-based learning and the use of computer algebra systems. The current solution is the `Sage` system. Features of this system can serve to analyze leading algebraic ideas, including the interaction between algebra and geometry. This allows us to advance the achievements of mathematics and the originality of computer algebra. Polynomials and vectors can play an important role in the context of ensuring continuity between secondary school and university programs and research teaching. Specific examples of using the `Sage` system in the topic "Vector Spaces"are given when solving various research problems in university mathematics courses, and some pitfalls are discussed.

Keywords: mathematization of knowledge, mathematical modeling, exploratory training, computer experiments

For citation: Testov V. A., Popkov R. A Investigative training in mathematics and computer algebra systems. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 52–68. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52

1. Введение

Процесс цифровизации современного общества возник не только с появлением новых компьютерных технологий, но и в связи с началом нового этапа математизации знаний, с возникновением таких математизированных областей знаний, как искусственный интеллект, большие данные, нейросети и т. д. Информатизация общества стремительно ускоряется, происходит «революция искусственного интеллекта», по своему масштабу сопоставимая с предыдущими информационными революциями [1]. Для перехода к цифровизации потребовалось достижение математикой некоторого нового, более высокого уровня развития. Все это свидетельствует о необходимости рассматривать математизацию знаний как фундамент процесса цифровизации [2].

Необходимо заметить, что на протяжении всей истории развития математики её основные результаты были получены сначала с помощью экспериментов и индуктивных рассуждений. Ускорение процесса математизации знаний произошло в XVII веке в результате решения с помощью экспериментов ряда прикладных задач Кеплером, Кавальери и другими учеными. Значительный вклад в этот процесс внесли Г. Лейбниц и И. Ньютон, но и они при доказательствах тоже опирались на индуктивные рассуждения.

С конца XIX века в математике преобладающим стал теоретико-множественный подход, который позволил значительно повысить строгость математических доказательств, опираясь на теорию множеств и аксиоматический метод. Идеи новой аксиоматической парадигмы в математике были связаны, прежде всего, с развитием математической логики, абстрактной алгебры, топологии. Наглядным примером использования этих идей стал многотомный труд группы французских математиков под псевдонимом Н. Бурбаки. Большой вклад в становление этой парадигмы в математике внёс А. Н. Колмогоров, который построил основы аксиоматической теории вероятностей. С этого времени математика стала образцом применения логики и точных понятий в научных исследованиях.

Строгая логическая структура математики с середины XX века начала преобладать и при построении школьных и вузовских математических курсов. Такие курсы приобрели в основном теоретический характер, а авторы пособий и учебников по математике стремились всё логически обосновать и доказать. Однако во многих случаях они были вынуждены заменять строгую логику доказательств некими компромиссами.

Начиная с 60-70-х годов XX века идеи аксиоматического построения математики стали уступать место другим направлениям, которые оказались ближе к практике и экспериментам. Ряд крупных математиков, в частности В. И. Арнольд, выступили с критикой принципов аксиоматического мышления. По мнению М. Клайна, «математика утратила определённость, критерии абсолютной истинности и неизменности» [3].

В наше время различные направления в математике, в частности вероятностные методы, стали широко применяться не только в физике, но и во многих других науках. Математика находит все большее применение не только в традиционно близких ей науках, но и таких, как социология, психология, история и др. В научный аппарат многих областей знаний вошли такие математические понятия, как алгоритм, модель, отношение, изоморфизм и др. Характерной чертой математизации становится взаимодействие различных её направлений, в том числе экспериментальных и теоретических методов, жёсткого и мягкого моделирования и т. д. Это взаимодействие создаёт синергетический эффект, который способствует выходу математических исследований на новый уровень [4].

С появлением программных средств для обработки математических данных существенно увеличились возможности проведения экспериментов с объектами математических исследований, вычислительными экспериментами, заменяющими реальные натурные эксперименты. Сравнение возросшей роли математики и роли компьютера привел В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счёт развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз...» [5].

Использование систем компьютерной математики оказало заметное влияние на подходы к математическому мышлению и на всю математическую парадигму. Все чаще обсуждается необходимость внедрения методов экспериментальной математики не только в научные исследования, но и в образовательный процесс. Эти методы рассматриваются как ключ к успешной реализации исследовательского обучения как в школьных, так и в университетских математических курсах.

Впервые термин «экспериментальная математика» в современном понимании, по-видимому, использовал академик Н. Н. Красовский. Однако широкое распространение в научном мире данный термин получил лишь в последнее десятилетие XX века. С этим подходом связаны надежды на более глубокое вовлечение как студентов, так и школьников в исследовательскую деятельность и развитие их аналитических способностей. В результате актуальность внедрения методов экспериментальной математики в учебный процесс становится все более очевидной, что открывает новые горизонты для повышения эффективности обучения и подготовки будущих специалистов.

Тем не менее, мышление преобладающей части педагогов и авторов учебников все же остаётся в пределах аксиоматической парадигмы. Попрежнему наблюдается стремление все обосновать и доказать, в то время как методы исследовательского обучения получают недостаточное применение. Содержание математических курсов остаётся верным традициям и не отражает современных реалий, связанных с появлением новых компьютерных технологий. В настоящее время в математике наиболее яркими примерами исследований, соответствующими цифровой эпохе, являются математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы.

В современном обществе становится всё более очевидным, что учащиеся в школах и вузах должны быть освобождены от необходимости вручную выполнять сложные символьные преобразования и запоминать обширные массивы информации. Образование должно сосредоточиться на развитии навыков творческого мышления, а не на овладении рутинными навыками.

2. Материалы и методы

Как показывает анализ литературы, многие учителя и преподаватели вузов предприняли шаги по обновлению методов и содержания обучения математике в соответствии с новой парадигмой, стремясь усилить экспериментальную составляющую и использовать с этой целью современные цифровые технологии. Подавляющее большинство из этих инициатив относилось к курсу геометрии с использованием систем `GeoGebra`, `1С: Математический конструктор` и др., причём как для школьников, так и для студентов.

Однако основные математические курсы (алгебры, математического анализа) пытаются перестроить лишь отдельные энтузиасты. Одним из таких энтузиастов был известный петербургский алгебраист Н. А. Вавилов, работавший в Санкт-Петербургском и ряде зарубежных университетов. В одной из своих последних работ [6] он вместе с соавторами поделился опытом чтения нового курса «Математика и компьютер».

Анализ программ вузовских классических математических дисциплин для технических, педагогических и экономических направлений подготовки и применяемых методик позволяет увидеть значительные недостатки. Во-первых, это проявляется в консерватизме как при выборе содержания, так и в способах его представления. Основное содержание этих дисциплин не обновлялось во многих вузах более полувека. Такая застарелость проистекает из того, что последние вузовские стандарты предполагают, что содержание и наименование курсов определяются самими вузами, то есть кафедрами. А многие преподаватели математических кафедр не стремятся к обновлению своих курсов. Во-вторых, студенты вынуждены вручную решать, например, системы линейных уравнений с помощью метода Крамера, теряют много времени на вычисление интегралов, на решение дифференциальных уравнений, хотя, используя компьютер, все это можно сделать намного быстрее. Студентам зачастую предлагается большое количество бессмысленных вычислительно-синтаксических задач, которые не представляют собой никаких значимых идей.

Такой консерватизм видимо объясняется тем, что значительное число учителей и преподавателей вузов выступают против использования компьютера при изучении математики, полагая, что простое нажатие кнопок затруднит понимание материала. Однако совершенно ясно, что в своей будущей профессиональной деятельности современные студенты не будут вручную вычислять интегралы или искать точные решения уравнений с частными производными.

3. Результаты

Теоретический анализ и выводы из практики работы со студентами показывают, что задачи, использующие компьютерную алгебру, должны быть нестандартными и носить исследовательский характер. Для усвоения теории важно вручную решить несколько упражнений, однако это не должно стать регулярной практикой. Основное применение компьютерных технологий в математике должно заключаться в том, чтобы акцентировать внимание на их роли в выполнении стандартных вычислений, которые при ручном режиме требуют слишком много времени. Кроме того, использование таких технологий должно углубить понимание математической природы изучаемого предмета. Алгебраические задачи хорошо подходят для применения компьютеров в массовом образовании, так как в курсах алгебры уже накоплен опыт использования систем формальных вычислений. Более того, именно алгебра позволяет компьютерам проводить огромные вычисления с бесконечной точностью.

Разумеется, встаёт вопрос, какую систему компьютерной алгебры всё же использовать. Чаще всего в качестве таких систем рассматривают `Maple` и `Mathematica`, однако их стоимость может стать препятствием для их лицензионного использования в образовательных целях. В настоящее время представляется, что оптимальным выбором является система `SageMath` (или просто `Sage`). Её ключевое преимущество состоит в том, что она доступна для бесплатного использования и основана на популярном ныне языке `Python`.

Характерные особенности системы `Sage` могут стать основой для анализа ведущих алгебраических идей, включая взаимодействие между алгеброй и геометрией, которые можно продемонстрировать при решении систем полиномиальных уравнений. Здесь естественным образом возникают понятия базиса Грёбнера, классическим методом нахождения которого является алгоритм Бухбергера и некоторые его модификации. Это позволяет продемонстрировать силу достижений математики и значимость компьютерной алгебры. Важную роль в этом контексте могут выполнять многочлены, которые помогают обеспечить преемственность между учебными программами средней школы и высших учебных заведений. Многочлены способны стать фундаментом для курса с использованием компьютерных технологий, позволяя изучать нелинейную алгебру как «конкретную алгебраическую геометрию» [7].

Необходимо подчеркнуть, что внедрение систем компьютерной алгебры (СКА) в курс математики не должно сводить его к изучению программирования или численных методов. Основное внимание следует уделять алгоритмическим задачам и точным расчётам. Компьютерные эксперименты должны служить поводом для обсуждения значительных и глубоких концепций. В математическом образовании крайне важно в одном курсе соединить как вычисления, так и теоретические идеи.

Одной из проблем при восприятии курса является появление теорем как «откровений», которым потом даются доказательства. Однако взгляд на математику как на экспериментальную науку позволяет понять теоремы, прежде всего, как экспериментальные факты. Мы не хотим сказать, что эксперимент должен заменить доказательство, но только лишь то, что СКА позволяют самостоятельно получить и осмыслить то, что впоследствии будет строго доказываться. Такие эксперименты позволяют наполнить семинарские задачи и обсуждением важных идей, и знакомством со СКА, и рассмотреть примеры, которые при ином подходе превращаются в кучу громоздких вычислений.

Приведём примеры из раздела «Векторные пространства», с которым студенты инженерных специальностей и педагогики-математики обычно знакомятся в рамках алгебры на первом курсе. Мы будем работать обычно с пространством $\mathbb{Q}^n$, так как в силу известной теоремы любое конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ изоморфно $\mathbb{Q}^n$. Выбор поля $\mathbb{Q}$ вместо более привычного $\mathbb{R}$ обусловлен тем, что в `Sage` именно поле рациональных чисел относится к точным полям (внутреннее понятие для структур данных `Sage`) и потому позволяет не заботится о погрешностях и точности вычислений. Кроме того, мы сознательно рассматриваем случай $n > 3$, который уже не соответствует человеческой интуиции о геометрии подпространств.

```
{sage:} W = QQ^5 #W - векторное пространство Q^5
{sage:} U = W.span([(1,2,3,1,1),(1,0,1,-2,-2),
(2,0,1,-1,0),(0,1,1,0,0)])
{sage:} V = W.span([(1,2,0,0,2),(0,1,-2,3,-3),
(-1,2,1,2,0),(1,1,-2,0,0)])
# Подпространства U и V заданы как линейные оболочки
# Найдём размерности подпространств U и V
{sage:} U.dimension(), V.dimension()
(4, 4)
```

То есть порождены подпространства, каждое размерности 4. Посмотрим, что нам выдаст система, если мы просто спросим, что из себя представляют объекты U и V.

```
{sage:} U
Vector space of degree 5 and dimension 4 over Rational Field
```

```
Basis matrix:
[ 1  0  0  0  1]
[ 0  1  0  0  1]
[ 0  0  1  0 -1]
[ 0  0  0  1  1]
{sage:} V
Vector space of degree 5 and dimension 4 over Rational Field
Basis matrix:
[     1      0      0      0   6/13]
[     0      1      0      0  10/13]
[     0      0      1      0   8/13]
[     0      0      0      1 -11/13]
```

Видим, что, помимо полной информации о подпространстве, выведен ещё и один из базисов. Здесь уместно задать студентам вопрос, на что похожи эти векторы, если составить из них матрицу? Sage выдаёт базис, с её точки зрения, наиболее простого вида — соответствующий виду расширенной матрицы после прямого и обратного ходов Гаусса при решении системы линейных уравнений.

Узнаем размерности суммы и пересечения подпространств U и V.

```
{sage:} (U + V).dimension()
5
# То есть U + V = Q^5
{sage:} (V.intersection(W)).dimension()
3
# размерности пересечения равна 3
```

Мы можем узнать и больше о подпространстве $U \cap V$.

```
{sage:} (U.intersection(V))
Vector space of degree 5 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[    1     0     0 -7/24 17/24]
[    0     1     0  -1/8   7/8]
[    0     0     1   7/8  -1/8]
```

Ряд подобных экспериментов (причём можно рассмотреть и другие точные поля, например конечные) позволяют студентам сформулировать гипотезу, что $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$, которая потом уже может быть доказана.

Для проверки понимания теории можно спросить студентов, является ли пересечение подпространств подпространством каждого из изначальных подпространств. Если они затрудняются с ответом, то пусть зададут этот вопрос `Sage`.

```
{sage:} (U.intersection(V)).is_subspace(V)
#Является ли пространство подпространством другого?
True
{sage:} U.is_subspace(V)
False
```

Традиционные трудности вызывают фактор-структуры (в частности, фактор-пространства) и связанные с ними теоремы. Увидим, что выдаёт `Sage`, если попросить её определить размерности $(U + V)/U$ и $V/(U \cap V)$.

```
# (A).quotient(B) - факторпространство A/B
{sage:} ((U + V).quotient(V)).dimension()
1
{sage:} (V.quotient(U.intersection(V))).dimension()
1
```

Несколько подобных вычислений если и не помогут сформулировать, то облегчат восприятие теоремы Нётер об изоморфизме: если $U, V \leq W$, то $(U+V)/U \simeq V/(U \cap V)$.

Часто подпространства возникают в связи с рассмотрением ядер и образов гомоморфизмов, которые в случае конечномерных пространств задаются в привычном для студентов матричном виде.

```
{sage:} A = matrix(QQ, 3, 5,
[2, 2, -1, 2, -1,
2, 1, 1, 2, -1/2,
2, -2, -1, 2, -1/2])
# матрица 3 на 5 с рациональными элементами
# задаёт гомоморфизм из Q^5 в Q^3
{sage:} A.kernel() # найдём ядро гомоморфизма
Vector space of degree 3 and dimension 0 over Rational Field
Basis matrix:
[]
```

Видно, что система выдала тривиальное ядро. Однако если вручную просто решить систему уравнений, то ядро получится другим. В чём проблема? Подсказка содержится в выданном Sage ответе: ядро — подпространство в $\mathbb{Q}^3$, однако мы понимает, что оно должно быть подпространством в $\mathbb{Q}^5$. Здесь можно попросить студентов поисследовать справочную систему Sage и найти объяснение: по умолчанию ищется левое ядро (`left_kernel`, `kernel`). Нам же надо найти правое.

```
{sage:} A.right_kernel() # правое ядро
Vector space of degree 5 and dimension 2 over Rational Field
Basis matrix:
[   1    0    0   -1    0]
[   0    1 -3/2  9/4    8]
```

С аналогичной проблемой мы столкнёмся, если попробуем найти образ гомоморфизма.

```
{sage:} A.image()
Vector space of degree 5 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[     1      0      0      1 -9/32]
[     0      1      0      0  -1/8]
[     0      0      1      0  3/16]
```

Ясно, что образ не может быть подпространством $\mathbb{Q}^5$, так как должен находиться в $\mathbb{Q}^3$. Дело в том, что Sage по умолчанию находит образ как линейную оболочку строк матрицы гомоморфизма. Решение проблемы должно быть найдено студентами без труда — транспонирование матрицы.

```
{sage:} (A.transpose()).image()
Vector space of degree 3 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
# образом является всё пространство Q^3.
```

Ряд аналогичных экспериментов позволяет сформулировать терему о сумме размерностей ядра и образа гомоморфизма $\mathcal{A}\colon U \to V$: $\dim\ker\mathcal{A} + \dim\operatorname{im}\mathcal{A} = \dim U$.

Заметим, что в рамках Sage возможны разные подходы к одной задаче. Так, можно изначально задать подпространство как линейную оболочку столбцов матрицы.

```
{sage:} A.column_space()
Vector space of degree 3 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

Видно, что результат совпадает с предыдущим. Так как $\ker\mathcal{A} \leq U$, то, естественно, возникает вопрос о фактор-пространстве $U/\ker\mathcal{A}$. Зададим его Sage.

```
{sage:} (QQ^5).quotient(A.right_kernel())
Vector space quotient V/W of dimension 3
over Rational Field where
```

Подобные результаты приводят к формулировке теоремы: $U/\ker\mathcal{A} \simeq \operatorname{im}\mathcal{A}$. Таким образом, ряд фундаментальных теорем возникает как результат экспериментов, причём не численных, а точных.

Возможности Sage позволяют рассмотреть и менее традиционные задачи, например, о пространствах над конечными полями. Например, найдём число k-мерных подпространств n-мерного пространства над полем $\mathbb{F}_q$, $k \leq n$. Пусть $q = 8$, $n = 5$.

```
{sage:} V = VectorSpace(GF(7), 5)
{sage:} V0 = V.subspaces(0); list(V0)
# выводим все подпространства V размерности 0
[Vector space of degree 5 and dimension 0 over Finite Field
of size 7
 Basis matrix:
 []]
```

Если $k > 0$, то список из подпространств получается уже достаточно длинным, приведём лишь начало ответа при $k = 1$.

```
{sage:} V1 = list(V.subspaces(0)); V1
# выводим все подпространства V размерности 1
[Vector space of degree 5 and dimension 1 over Finite Field
of size 7
 Basis matrix:
 [1 0 0 0 0],
 Vector space of degree 5 and dimension 1 over Finite Field
of size 7
 Basis matrix:
 [1 0 0 0 1]...
```

Однако нам и не нужны элементы списка, нужна лишь его длина.

```
{sage:} V0 = list(V.subspaces(0)); len(V0)
1
{sage:} V1 = list(V.subspaces(1)); len(V1)
2801
{sage:} V2 = list(V.subspaces(2)); len(V2)
140050
{sage:} V3 = list(V.subspaces(3)); len(V3)
140050
{sage:} V4 = list(V.subspaces(4)); len(V4)
2801
{sage:} V5 = list(V.subspaces(5)); len(V5)
1
```

Данные результаты хотя и не позволяют определить нужную формулу, однако показывают, что она должна быть достаточно симметричной. Аналогичная симметрия встречается, например, в биномиальных коэффициентах. Здесь ответ студенты должны получить из соображений, использующих как алгебру, так и комбинаторику, а полученные результаты позволяют проверить его правильность. Ответом является *q-биномиальный коэффициент.*

В качестве экспериментальной задачи студентам можно предложить, например, такую, ответ в которой сразу далеко не очевиден:

В пространстве $\mathbb{R}[x]_8$ заданы два подпространства

$$V_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_8 \mid f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0\},$$

$$V_2 = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_8 \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = f'''(-1) = f^{IV}(-1) = 0\right\}.$$

Нужно найти базисы суммы и пересечения этих подпространств. Благодаря изоморфизму $\mathbb{R}[x]_8 \simeq \mathbb{R}^9$ можно перейти к подпространствам в $\mathbb{R}^9$ заданными системами уравнений. После этого решение становится идейно простым, а вычисления перепоручаются СКА. Разумеется, после этого стоит обсудить и более концептуальное решение без вычислений, основанное на том, что кратные корни — это корни производных. Приведём начало СКА-решения. При этом мы стремимся не к оптимальности кода, а к его понятности, и экономим своё время, а не компьютерное.

```
{sage:} var('x, a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8')
{sage:} P = a0 + a1*x + a2*x^2 + a3*x^3 + a4*x^4 + a5*x^5 +
a6*x^6 + a7*x^7 + a8^x^8
# Произвольный многочлен 8-й степени
{sage:} l0 = P.subs(x=1)l, l0 # P(1)
a0 + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + a8
{sage:} l1 = P.diff(x).subs(x=1); l1 # P'(1)
a1 + 2*a2 + 3*a3 + 4*a4 + 5*a5 + 6*a6 + 7*a7 + 8*a8
{sage:} l2 = P.diff(x).diff(x).subs(x=1); l2 # P''(1)
2*a2 + 6*a3 + 12*a4 + 20*a5 + 30*a6 + 42*a7 + 56*a8
{sage:} l2 = P.diff(x).diff(x).diff(x).subs(x=1); l3 # P'''(1)
6*a3 + 24*a4 + 60*a5 + 120*a6 + 210*a7 + 336*a8
{sage:} eq = [l0 == 0, l1 == 0, l2 == 0, l3 == 0]; eq
[a0 + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + a8 == 0,
 a1 + 2*a2 + 3*a3 + 4*a4 + 5*a5 + 6*a6 + 7*a7 + 8*a8 == 0,
 2*a2 + 6*a3 + 12*a4 + 20*a5 + 30*a6 + 42*a7 + 56*a8 == 0,
 6*a3 + 24*a4 + 60*a5 + 120*a6 + 210*a7 + 336*a8 == 0]
{sage:} solve(eq, a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8)
[[a0 == 35*r1 + 20*r2 + 10*r3 + 4*r4 + r5,
a1 == -120*r1 - 70*r2 - 36*r3 - 15*r4 - 4*r5,
a2 == 140*r1 + 84*r2 + 45*r3 + 20*r4 + 6*r5,
a3 == -56*r1 - 35*r2 - 20*r3 - 10*r4 - 4*r5,
a4 == r5, a5 == r4, a6 == r3, a7 == r2, a8 == r1]]
```

Отсюда видно, что $\dim V_1 = 5$. Аналогично можно рассмотреть V_2, перейти к ФСР каждой из систем, найти сумму и пересечение уже подпространств в $\mathbb{R}^9$. Основной содержательный этап этой работы — возвращение в $\mathbb{R}[x]_8$ и интерпретация результатов для многочленов. Понятно, что аналогичные задачи можно придумать для пространств разной природы над разными полями.

4. Заключение

В заключение отметим, что процесс цифровой трансформации в науке и образовании, основанный на достижениях математики, способствует совершенствованию и человеческого мышления. Но в большинстве случаев уровень математической подготовки и особенно её фундаментальность не соответствует современным требованиям. Все более очевидной становится необходимость улучшения математической подготовки в школах и вузах, а также внедрения систем компьютерной алгебры в учебные курсы математики.

Список источников

1. **Семёнов А. Л.** О продолжении российского математического образования в XXI веке // *Вестник Московского университета. Педагогическое образование.* 2023. Т. 20. № 2. С. 7–45.

2. **Тестов В. А.** Цифровизация науки и образования как результат синергии процессов информатизации и математизации // *Педагогическая информатика.* 2024. № 2. С. 111–120.

3. **Клайн М.** Математика. Утрата определенности. М.: Мир; 1984. 434 с.

4. **Перминов Е. А., Тестов В. А.** Математизация профильных дисциплин как основа фундаментализации IT-подготовки в вузах // *Образование и наука.* 2024. Т. 26. № 7. С. 12–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-7-12-43.

5. **Садовничий В. А** Большие данные в современном мире. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.

6. **Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В.** Небеса падают: Математика для нематематиков // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 2023. Т. 511. № 1. С. 144–160.

7. **Попков Р. А., Москаленко М. А., Табиева А. В., Матвеева М. В.** Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования // *Современное профессиональное образование.* 2024. № 3. С. 50–53.

References

1. **Semenov A. L.** On the continuation of Russian mathematical education in the 21st century. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Pedagogicheskoye obrazovaniye* [Bulletin of Moscow University. Teacher education]. 2023. Vol. 20. No 2. Pp. 7–45. (In Russ.)

2. **Testov V. A.** Digitalization of science and education as a result of the synergy of the processes of informatization and mathematization. *Pedagogicheskaya informatika* [Pedagogical informatics]. 2024. No 2. Pp. 111–120. (In Russ.)

3. **Klein M.** *Matematika. Utrata opredelennosti* [Mathematics. Loss of certainty]. Moscow: Mir; 1984. 434 p. (In Russ.)

4. **Perminov E. A., Testov V. A.** Mathematization of specialized disciplines as the basis for the fundamentalization of IT training in universities *Obrazovaniye i nauka* [Education and Science]. 2024. Vol. 26. No 7. Pp. 12–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-7-12-43. (In Russ.)

5. **Sadovnichy V. A.** *Bol'shiye dannyye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. Moscow: Moscow State University named after. M. V. Lomonosov, 2017. 28 p. (In Russ.)

6. **Vavilov N. A., Khalin V. G., Yurkov A. V.** The skies are falling: Mathematics for non-mathematicians. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya* [Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes]. 2023. Vol. 511. No 1. Pp. 144–160. (In Russ.)

7. **Popkov R. A., Moskalenko M. A., Tabieva A. V., Matveeva M. V.** Algebra vs computer algebra in the context of mass mathematical education. *Sovremennoye professional'noye obrazovaniye* [Modern professional education]. 2024. No 3. Pp. 50–53. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Тестов Владимир Афанасьевич / Vladimir A. Testov
д.пед.н., профессор, профессор кафедры математики и информатики, / Doctor of Sciences in Pedagogical, Professor, Professor of the Department of Mathematics and Computer Science

Вологодский государственный университет / Vologda State University
160000, Россия, Вологодская область, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15 / 15, Lenina st., Vologda, Vologda region, 160000, Russia

Попков Роман Андреевич / Roman A. Popkov
к.ф-м.н. доцент научно-образовательного центра математики / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics Research and Education Center
Национальный исследовательский университет ИТМО / ITMO University
197101, Россия, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49, лит. А. / 49, bldg. A., Kronverksky pr., St. Petersburg, 197101, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.12.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 04.09.2024
Принята к публикации / Accepted for publication 06.09.2024