

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 4 (53)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 539.3

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_21

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ БИДОМЕННЫХ ЭФФЕКТОВ В МИОКАРДЕ

Игорь Николаевич Вассерман,

Игорь Николаевич Шардаков,

Ирина Олеговна Глот,

Алексей Петрович Шестаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, igorw@icmm.ru

Аннотация. С макроскопической точки зрения сердечная мышца может рассматриваться как две анизотропные проводящие среды – внеклеточное и внутриклеточное пространство, взаимодействующие через мембрану. Построенная на таких предположениях модель электрической активности сердца называется бидоменной. Если предположить, что тензоры проводимости внутриклеточного и внеклеточного пространства подобны, то модель сердечной мышцы может быть значительно упрощена. Такая модель называется монодоменной. Её достаточно для большинства задач о распространении волн возбуждения в ткани миокарда. Однако бидоменная модель необходима в тех случаях, когда принимается во внимание сам процесс возбуждения от внешних факторов. Для исследования развития этих процессов необходимо решать полную бидоменную систему. Однако при малой силе воздействия для определения первоначальной конфигурации достаточно решения линеаризованной статической бидоменной задачи. К рассматриваемому кругу задач относятся образование виртуальных электродов и поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами и волокнами, подходящими к этой границе

под углом при протекании вдоль нее электрического тока. В настоящей работе представлена совокупность конечноэлементных и аналитических решений на основе статической линейаризованной бидоменной модели. Сравнялось аналитическое (а для поляризации полосы – точное) и численное решение этих задач.

Ключевые слова: миокард, бидоменная модель, монодоменная модель, виртуальные электроды

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Для цитирования: Вассерман И. Н., Шардаков И. Н., Глот И. О., Шестаков А. П. Численное и аналитическое моделирование двумерных статических бидоменных эффектов в миокарде // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Вып. 4 (53). С. 21–38. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_21

Article

NUMERICAL AND ANALYTICAL SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL STATIC BIDOMAIN EFFECTS IN THE MYOCARDIUM

Igor' N. Vasserman, Igor' N. Shardakov,
Irina. O. Glot, Aleksey P. Shestakov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, igorw@icmm.ru

Abstract. From a macroscopic point of view, cardiac muscle can be considered as two anisotropic conducting media - extracellular and intracellular space, interacting through the membrane. The model of electrical activity of the heart built on such assumptions is called bidomain. If we assume that the conductivity tensors of the intracellular and extracellular spaces are similar, then the model of the cardiac muscle can be significantly simplified. This model is called monodomain. It is sufficient to solve most problems of propagating wave activation in the myocardium of tissues. However, the bidomain model is necessary in cases where the process of excitation from external factors itself is taken into account. To study the development of these processes, it is necessary to solve the complete bidomain system. However, when the excitation is rather small, it is sufficient to solve the linearized static bidomain problem to determine the initial

configuration. This range of tasks includes the formation of virtual electrodes and the polarization of strips of cardiac tissue with isolated boundaries and fibers, approaching this boundary at an angle when current flows along it. This paper presents a set of finite element and analytical solutions based on a static linearized bidomain model. The analytical (and exact for strip polarization) solutions of these problems were compared with numerical ones.

Keywords: myocardium, bidomain model, monodomain model, virtual electrodes.

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment, registration number of the topic 124020700047-3.

For citation: Vasserman I. N., Shardakov I. N., Glot I. O., Shestakov A. P. Numerical and analytical simulation of two-dimensional static bidomain effects in the myocardium. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 21–38. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_21

1. Введение

С макроскопической точки зрения сердечная мышца может рассматриваться как две проводящие среды — внеклеточное и внутриклеточное пространство, взаимодействующие через мембрану [1; 2]. Единство внутриклеточной среды обеспечивают щелевые соединения. Каждая из этих двух сред характеризуется своим тензором проводимости. Построенная на этих предположениях модель электрической активности сердца называется бидоменной.

Если предположить, что тензоры проводимости внутриклеточного и внеклеточного пространства подобны, то модель сердечной мышцы может быть значительно упрощена [2] (мономерная). Если в рамках этой модели проводимости в материальных осях вычисляются как среднее гармоническое соответствующих внутриклеточных проводимостей, результаты, описывающие распространение волны возбуждения от уже сформировавшегося очага возбуждения для мономерной и бидоменной моделей, различаются незначительно [3]. Исследованию процессов, описываемых этой моделью, посвящено гигантское число работ. К ним могут быть отнесены и работы авторов [4], [5]. Поэтому в данной статье мономерная модель подробно не рассматривается.

Однако бидоменная модель необходима в тех случаях, когда принимается во внимание сам процесс формирования очагов возбуждения от внешних факторов [3] и начальная конфигурация этих очагов. Обзор таких эффектов можно найти в [6]. Некоторые эффекты описаны в [7]. В общем случае приходится решать нелинейную жесткую краевую задачу в частных производных. При малой силе воздействия и медленных процессах для решения вышеупомянутых задач может быть использована линеаризованная статическая бидоменная модель [8–10], представляющая собой гораздо более простую линейную краевую задачу.

Одним из примеров является образование виртуальных электродов — областей деполяризации и гиперполяризации, возникающих при подведении к миокарду электрического тока в малой области [9–12]. Их возникновение, с одной стороны, может приводить к возбуждению спиральных волн, с другой стороны может быть использовано в процессе дефибрилляции [12]. Для этой задачи точное аналитическое решение есть только в вырожденном случае подобия тензоров вне- и внутриклеточной проводимости, то есть когда эффект отсутствует [9]. Для оценки конфигурации электродов существует только приближенное решение [10]. Оно использует возмущение по малому параметру вокруг вышеупомянутого аналитического решения и поэтому применимо только при малом отклонении тензоров от подобия. В действительности это не так: тензор внеклеточной проводимости близок к шаровому, а компоненты тензора внутриклеточной проводимости могут отличаться на порядок. Поэтому в данном случае аналитические методы применимы либо для грубой оценки, либо для тестирования численных методов.

Другой задачей является поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами при протекании вдоль нее электрического тока. Волокна подходят к изолированной границе под углом. Здесь может быть получено точное аналитическое решение [13].

В настоящей работе рассмотрено численное решение методом конечных элементов системы уравнений в частных производных линеаризованной статической бидоменной модели в применении к вышеупомянутым задачам. Сравнивается численное и аналитическое решение этих задач.

2. Материалы и методы

Используемая при исследовании электрических процессов в миокарде полная бидоменная модель имеет следующий вид [2]:

$$\nabla \cdot (D_i \nabla V_m) + \nabla \cdot (D_e \nabla V_e) = \chi I_m + \chi I_{ts} + \tilde{I}_{is}, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot ((D_i + D_e) \nabla V_e) + \nabla \cdot (D_i \nabla V_m) = \tilde{I}_{is} + \tilde{I}_{es}, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (2)$$

при граничных условиях

$$n \cdot (D_i \nabla V_e) = -n \cdot (D_i \nabla V_m), \quad \vec{x} \in \partial\Omega \quad (3)$$

$$n \cdot (D_e \nabla V_e) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь V_i – внутриклеточный потенциал, V_e – внеклеточный потенциал, $V_m = V_i - V_e$ – трансмембранный потенциал, D_i – внутриклеточный тензор проводимости, D_e – внеклеточный тензор проводимости, $I_m = C_m (dV_m/dt) + I_{ion}(V_m, q_1, \dots, q_n)$ – трансмембранный ток, χ – площадь клеточной мембраны на единицу объема миокарда, I_{ts} – дополнительный трансмембранный источник тока, например, связанный с действием активируемых деформацией каналов, $\tilde{I}_{is}, \tilde{I}_{es}$ – внешние источники тока, подводимые к внутриклеточной и внеклеточной среде соответственно, C_m – емкость клеточной мембраны, q_1, \dots, q_n – внутренние переменные, описывающие концентрации ионов, ферментов и т. д., I_{ion} – ток, обусловленный движением ионов через мембрану, $\vec{x} = (x, y)$ – координаты точки, Ω – область, занимаемая миокардом, $\partial\Omega$ – граница этой области.

Если предположить, что тензоры проводимости внутриклеточного и внеклеточного пространства подобны, то можно получить более простую – монодоменную модель сердечной мышцы [2]. Её достаточно для большинства задач о распространении волн возбуждения от уже сформировавшегося очага возбуждения в ткани миокарда [3].

Однако бидоменная модель необходима в тех случаях, когда принимается во внимание сам процесс формирования вышеупомянутых очагов возбуждения от внешних факторов [3]. Для исследования процесса развития возбуждения в этом случае необходимо решение полной системы (1–4). Однако при малой интенсивности и медленном характере воздействия внешних факторов можно считать, что $I_m = I_{ion} = G_0 \bar{V}_m$, где $\bar{V}_m = V_m - V_{rest}$ – отклонение трансмембранного потенциала от потенциала покоя, $G_0 = (\partial I_{ion} / \partial V_m)_{V_m = V_{rest}}$ – линеаризованная около потенциала покоя проводимость мембраны. В этом случае для определения первоначального распределения трансмембранного и внеклеточного по-

тенциалов достаточно решения линейризованной статической бидоменной задачи [8–10]:

$$\nabla \cdot (D_i \nabla \bar{V}_m) + \nabla \cdot (D_i \nabla V_e) = \chi G_0 \bar{V}_m, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot ((D_i + D_e) \nabla V_e) + \nabla \cdot (D_i \nabla \bar{V}_m) = I_{es}, \quad \vec{x} \in \Omega. \quad (6)$$

В уравнениях(5–6) в качестве внешних источников тока представлен только ток, подводимый к внеклеточной среде, потому что в рассматриваемых в данной статье примерах имеется только этот тип внешнего воздействия. В случае необходимости добавить другие типы воздействий, представленные в (1–2), не будет составлять особой проблемы.

Одним из наиболее ярких примеров, в котором бидоменная модель проявляет себя, является образование виртуальных электродов [6] – областей деполяризации и гиперполяризации, возникающих при подведении к миокарду электрического тока в малой области (рис. 1).

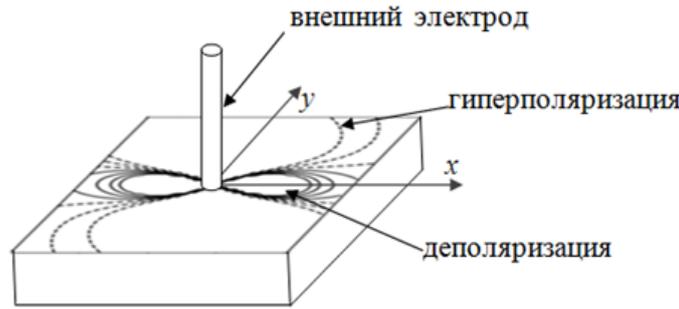


Рис. 1. Характерное распределение электрического потенциала при образовании виртуального электрода в миокарде

Это явление имеет место, когда условие подобия внутри- и внеклеточного тензоров проводимости $D_e = \gamma D_i$ не выполняется, что характерно для реального миокарда. Однако как раз для этого вырожденного случая подобия тензоров проводимости имеется точное решение [9]. Оно имеет вид:

$$V_m^0 = - \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) \frac{\gamma_0}{2\pi} K_0(R), \quad (7)$$

где $X = x/\Lambda_x, Y = y/\Lambda_y$ – приведенные декартовы координаты, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \Theta = \arctan(Y/X)$ – приведенные полярные координаты,

$$\Lambda_x = \sqrt{\frac{1}{\chi G_0} \frac{\sigma_x^i \sigma_x^e}{\sigma_x^i + \sigma_x^e}}, \quad \Lambda_y = \sqrt{\frac{1}{\chi G_0} \frac{\sigma_y^i \sigma_y^e}{\sigma_y^i + \sigma_y^e}} \quad (8)$$

– константы длины сердечной ткани в направлениях x и y , $\alpha = \sigma_x^i / \sigma_x^e$, γ_0 – масштабированная интенсивность источника тока, $K_0(R)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Для оценки конфигурации электродов может быть использовано приближенное решение [10] в главных осях. В этом решении вводится параметр $\epsilon = 1 - (\sigma_x^e / \sigma_y^e) / (\sigma_x^i / \sigma_y^i)$, равный нулю, когда тензоры проводимости внутри- и внеклеточного пространства подобны. Затем проводится анализ возмущений по этому параметру $V_m = V_m^0(R) + \epsilon V_m^1(R, \Theta) + \dots$ вокруг аналитического решения (7).

Другой задачей, где необходимо использование статической линеаризованной бидоменной модели, является поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами и волокнами, подходящими к этой границе под углом при протекании вдоль нее электрического тока (рис. 2).

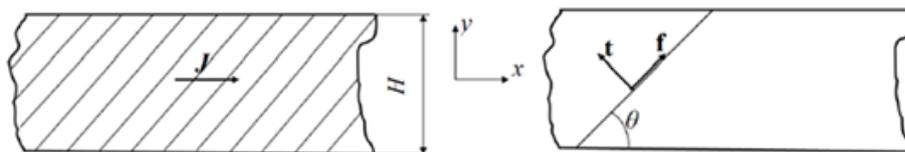


Рис. 2. Поляризация полосы

Эта задача имеет аналитическое точное решение для трансмембранного V_m и внеклеточного V_e потенциала [13]

$$V_m = A \sinh\left(\frac{y}{\Lambda}\right), \quad (9)$$

$$V_e = -B \sinh\left(\frac{y}{\Lambda}\right) + ay - E_x x, \quad (10)$$

где

$$\Lambda = \sqrt{\frac{1}{\chi G_0} \frac{\sigma_{yy}^i \sigma_{yy}^e}{\sigma_{yy}^i + \sigma_{yy}^e}} \quad (11)$$

– константа длины в направлении y , E_x – напряженность электрического поля в направлении x .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(\sigma_{xy}^i/\sigma_{yy}^i - \sigma_{xy}^e/\sigma_{yy}^e) E_x \Lambda}{\cosh(H/2\Lambda)}, & B &= \frac{\chi G_0 \Lambda^2 A}{\sigma_{yy}^e}, \\
a &= \frac{\sigma_{xy}^e}{\sigma_{yy}^e} E_x + \frac{B}{\Lambda} \cosh(H/2\Lambda).
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь компоненты тензоров внутри- (i) и внеклеточной (e) проводимости в осях x и y могут быть выражены через значения угла θ и соответствующих проводимостей вдоль $\sigma_f^{(i,e)}$ и поперек $\sigma_t^{(i,e)}$ волокна с помощью преобразования поворота.

Следует заметить, что при однородном деформировании полосы волокна остаются прямыми, изменяются только угол наклона волокна и значения компонент тензора проводимости. Поэтому аналитическое решение (9–12) применимо и в этом случае, но с другими параметрами.

Для численного решения рассматриваемых задач используется метод конечных элементов в виде, представленном в [2]. С помощью использования метода Галеркина и конечноэлементной дискретизации

$$\bar{V}_m = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j, \quad V_e = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \tag{13}$$

решение статической линейаризованной бидоменной задачи приводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Здесь N – число узлов конечноэлементной сетки, v_j, u_j – значения трансмембранного и внеклеточного потенциала в узле j , φ_j – базовая функция, равная единице в узле j и нулю в остальных узлах сетки.

Эта система имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где элементы субматриц вычисляются как

$$A_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} D_i \nabla \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta dx + \int_{\Omega} \chi G_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta dx, \tag{15}$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} D_i \nabla \varphi_{\alpha} \nabla \varphi_{\beta} dx, \quad (16)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} (D_i + D_e) \nabla \varphi_{\alpha} \nabla \varphi_{\beta} dx. \quad (17)$$

Здесь \mathbf{v} , \mathbf{u} – вектор-столбцы, содержащие значения трансмембранного и внеклеточного потенциала соответственно в точках конечноэлементной сетки, \mathbf{b} – вектор-столбец, описывающий внешнее воздействие, представленное здесь током, подводимым к внеклеточной среде:

$$b_{\alpha} = - \int_{\Omega} \tilde{I}_{es} \varphi_{\alpha} dx. \quad (18)$$

Поскольку внеклеточный потенциал определен до постоянного значения, система (14), в отличие от таковой, получаемой при дискретизации монодоменного уравнения, является сингулярной. Кроме того, необходимо обеспечить баланс между подводимым током и током, протекающим через границу. В [9] этот вопрос решается путем использования бесконечных элементов. В данной работе используются условия Дирихле.

Метод конечных элементов был реализован на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. В качестве прототипа использовались программы из [14].

Для задачи о виртуальных электродах падение трансмембранного потенциала происходит гораздо быстрее, чем внеклеточного. Поэтому на достаточном удалении от точки подведения тока при нахождении внеклеточного потенциала трансмембранным можно пренебречь. Уравнение (6) приводится к виду (анизотропная задача Пуассона)

$$\nabla \cdot ((D_i + D_e) \nabla V_e) = \tilde{I}_{es}. \quad (19)$$

Это уравнение имеет точное решение на бесконечной области при точечном возбуждении.

$$\tilde{V}_e = - \frac{\tilde{I}_{es}}{2\pi \tilde{\Lambda}_x \tilde{\Lambda}_y} \ln(\tilde{r}), \quad (20)$$

где $\tilde{r} = \sqrt{\left(x/\tilde{\Lambda}_x\right)^2 + \left(y/\tilde{\Lambda}_y\right)^2}$, $\tilde{\Lambda}_x = \sqrt{\sigma_x^i + \sigma_x^e}$, $\tilde{\Lambda}_y = \sqrt{\sigma_y^i + \sigma_y^e}$.

Следует заметить, что $\tilde{\Lambda}_x$, $\tilde{\Lambda}_y$ и \tilde{r} в (20) не то же самое, что Λ_x , Λ_y и R в (8). Значения (20) на границах рассматриваемой области можно использовать в качестве граничных условий Дирихле для внеклеточного потенциала при численном решении задачи о виртуальных электродах.

3. Результаты

В данном разделе представлены результаты численного и аналитического решения задачи о виртуальных электродах и задачи о поляризации полосы сердечной ткани с волокнами, подходящими к изолированным границам под углом при протекании вдоль этой полосы электрического тока. Численное решение производилось методом конечных элементов. Аналитическое решение определялось формулами (7–8) для виртуальных электродов и (9–12) для полосы.

При решении задачи о виртуальных электродах в качестве области моделирования был взят квадрат со стороной 64Λ , где $\Lambda = \max(\Lambda_x, \Lambda_y)$, а Λ_x и Λ_y вычислялись согласно (8). В качестве граничных условий на внешних границах области моделирования для внеклеточного потенциала используются условия Дирихле, основанные на решении (20).

Рассмотрим вначале вырожденный случай задачи о виртуальных электродах, когда тензоры внутри- и внеклеточной проводимости подобны. В этом случае образования виртуальных электродов не происходит (рис. 3), но имеется точное решение для трансмембранного потенциала.

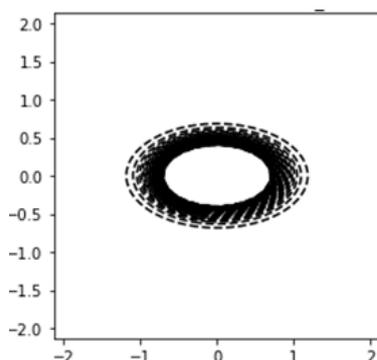


Рис. 3. Распределение трансмембранного потенциала при подобии тензоров проводимости

Предположение о характере распределения трансмембранного и внеклеточного потенциала, сделанное при выводе граничных условий, обусловленных (20), подтверждается при численном решении (рис. 4).

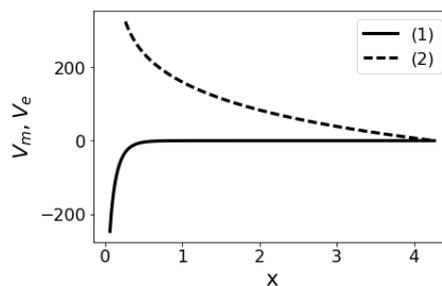


Рис. 4. Характер распределения трансмембранного (1) и внеклеточного (2) потенциалов

Если для трансмембранного потенциала взять естественные граничные условия, то вблизи внешних границ области возникает возмущение (рис. 5).

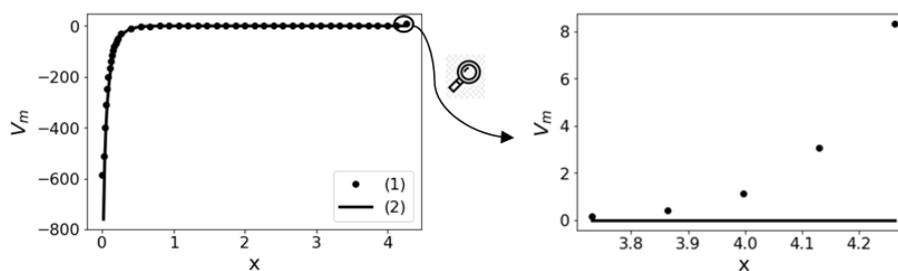


Рис. 5. Сравнение численного (1) и аналитического (2) решений. Возмущение на границе

Если на внешней границе взять $V_m = 0$, то это возмущение исчезает и имеет место неплохая согласованность между аналитическим и конечноэлементным решениями (рис. 6).

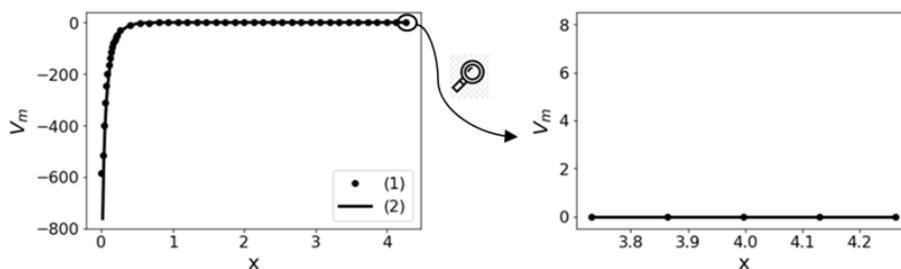


Рис. 6. Сравнение численного (1) и аналитического (2) решений. Коррекция возмущения на границе

Рассмотрим теперь более реальный пример, когда тензоры проводимости не подобны. Пусть главная ось, соответствующая направлению волокна, направлена под углом $\pi/6$ к горизонтали. В этом случае имеют место виртуальные электроды (рис. 7).

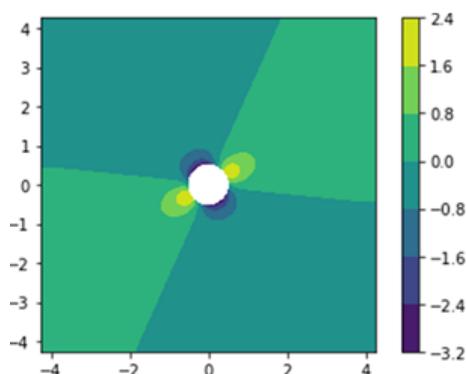


Рис. 7. Виртуальные электроды

Для задачи о виртуальных электродах решение в точке подвода тока стремится к бесконечности. Поэтому имеет смысл оценивать решение вне некоторой окрестности этой точки.

Для конечноэлементного моделирования поляризации полосы рассматривается фрагмент конечной длины (рис. 8), на левой и правой границе которого заданы значения внеклеточного потенциала V_0 и V_1 соответственно. Толщина полосы H была взята равной 4Λ , угол θ – равным $\pi/6$. Длина L была взята равной $6H$. Здесь Λ – константа длины в направлении x , вычисляемая по формуле (11).

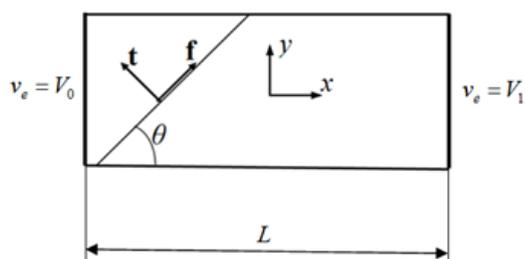


Рис. 8. Фрагмент полосы

При численном моделировании распределение внеклеточного потенциала оказывается почти линейным вдоль длины полосы за исключением небольших участков рядом с границей. На рис. 9 показано распределение внеклеточного потенциала по длине полосы при $y = 0$. Если

в аналитическом решении взять напряженность электрического поля E_x в соответствии с наклоном линейного участка, то для распределения потенциалов по толщине полосы при $x = 0$ имеет место практически полное совпадение численного решения с аналитическим (рис. 10).

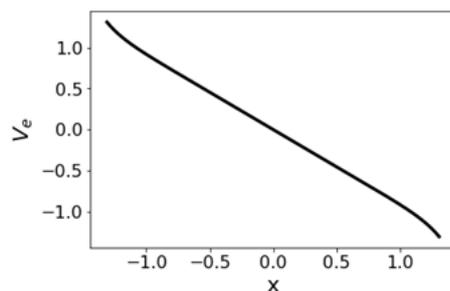


Рис. 9. Распределение внеклеточного потенциала по длине полосы

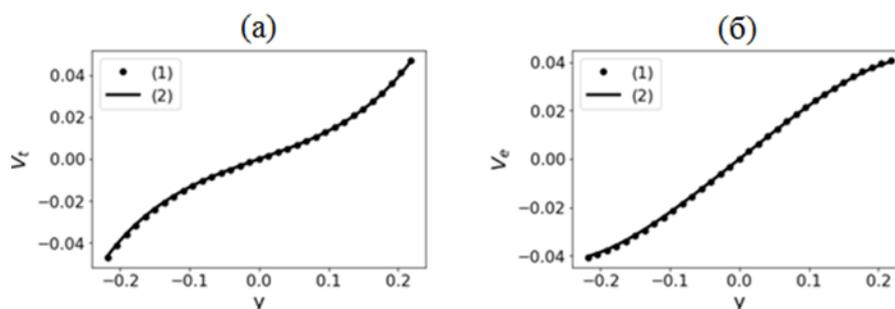


Рис. 10. Сравнение численного (1) и аналитического (2) решений для распределения по толщине полосы (а) – трансмембранного, (б) – внеклеточного потенциала

Значительное расхождение между аналитическим и численным решением имеет место только вблизи левой и правой границ (рис. 11).

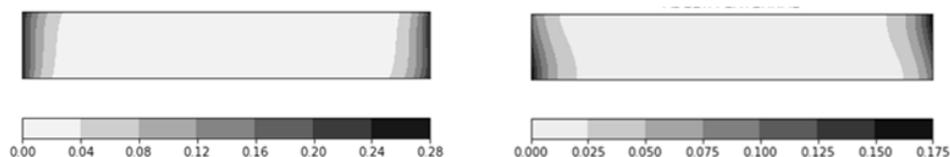


Рис. 11. Абсолютное значение расхождения между аналитическим и численным решениями: (а) – для трансмембранного, (б) – внеклеточного потенциала

4. Обсуждение

Дана формулировка линеаризованной статической бидоменной задачи, позволяющая исследовать процесс формирования этих очагов возбуждения от внешних факторов при достаточно медленном характере воздействия внешних факторов. На основе разработанного конечно-элементного алгоритма решения задач о распределении электрических потенциалов в рамках бидоменной модели получены численные результаты для задачи о формировании виртуальных электродов и поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами и волокнами, подходящими к этой границе под углом при протекании вдоль нее электрического тока. При практическом применении линеаризованной статической бидоменной модели (например, в кардиостимуляторах) необходимо выяснить границы ее применимости при импульсном возбуждении, то есть когда можно пренебречь емкостной составляющей трансмембранного тока.

Для задачи о виртуальных электродах сформулированы граничные условия Дирихле для внеклеточного потенциала. Они позволяют рассматривать эту задачу в конечной области, что важно для численного решения, и обеспечивают баланс между подводимым током и током, протекающим через границу. Эти условия определяются значениями на границе рассматриваемой области аналитического решения анизотропной задачи Пуассона для бесконечной области при точечном возбуждении.

В случае задачи о виртуальных электродах удалось достичь совпадения численного и аналитического решения только для вырожденного случая. Для общего случая удалось получить только качественные результаты. Необходимо дальнейшее исследование влияния граничных условий.

Для задачи о поляризации полосы удалось достичь практически полного совпадения численного и аналитического решений в середине фрагмента полосы. Таким образом, задачу о поляризации полосы можно использовать для верификации метода конечных элементов в применении к линеаризованной статической бидоменной модели. Поскольку аналитическое решение применимо и для однородно деформированной полосы, поляризация полосы может оказаться полезной при идентификации зависимости тензоров проводимости от деформации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Sachse F.B.** Computational Cardiology. Modelling of Anatomy, Electrophysiology and Mechanics. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 326 p.
2. **Sundnes J. et al** Computing the Electrical Activity in the Heart. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 318 p.
3. **Poste M. et al** A Comparison of Monodomain and Bidomain Reaction-Diffusion Models for Action Potential Propagation in the Human Heart // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2006. Vol. 53. Issue 12. Pp. 2425–2435.
4. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** Numerical simulation of the propagation of electrical excitation in the heart wall taking its fibrous laminar structure into account // *Biophysics*. 2015. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.
5. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** The mechanism of the initiation of cardiac arrhythmias due to a pathological distribution of myocardial conductivity // *Biophysics*. 2016. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.
6. **Roth B. J.** How to explain why „Unequal anisotropy ratios“ is important using pictures but no mathematics // *Proc. of the 2006 Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. New York, USA, August 30 – September 3, 2006. Pp. 580–583.
7. **Roth B. J., Beaudoin D. L.** Approximate analytical solutions of the Bidomain equations for electrical stimulation of cardiac tissue with curving fibers // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. Issue 5. Pp. 051925.
8. **Vasserman I. N.** Numerical Simulation of Mechanoelectric Feedback in a Deformed Myocardium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2020. Vol. 61. Issue 7. Pp. 1116–1127.
9. **Sepulveda N. G. et al.** Current injection into a two-dimensional anisotropic bidomain // *Biophys. J.* 1989. Vol. 55. Pp. 987–999.
10. **Goel. V., Roth B. J.** Approximate analytical solutions to the bidomain equations describing electrical activity in cardiac tissue //

Proceedings of the 13th Southern Biomedical Conference. Washington, DC , April 16–17, 1994. Pp. 967–970.

11. **Wikswø J. P. et al.** Virtual Electrodes in Cardiac Tissue: A Common Mechanism for Anodal and Cathodal Stimulation // *Biophys. J.* 1995. Vol. 69. Pp. 2195–2210.
12. **Roth B. J.** A mathematical model of make and break electrical stimulation of cardiac tissue by unipolar anode or cathode // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1995. Vol. 42. Pp. 1174–1184.
13. **Roth B. J.** Mechanism for polarization of cardiac tissue at a sealed boundary // *Med. Biol. Eng. Compute.* 1999. Vol. 37. Pp. 523–525.
14. **Ferreira A. J. M.** MATLAB Codes for Finite Element Analys. Berlin: Springer, 2009. 235 p.

References

1. **Sachse F. B.** *Computational Cardiology. Modelling of Anatomy, Electrophysiology and Mechanics.* Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 326 p.
2. **Sundnes J. et al.** *Computing the Electrical Activity in the Heart.* Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 318 p.
3. **Poste M. et al** A Comparison of Monodomain and Bidomain Reaction-Diffusion Models for Action Potential Propagation in the Human Heart. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2006. Vol. 53. Issue 12. Pp. 2425–2435.
4. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** Numerical simulation of the propagation of electrical excitation in the heart wall taking its fibrous laminar structure into account. *Biophysics* 2015. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.
5. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** The mechanism of the initiation of cardiac arrhythmias due to a pathological distribution of myocardial conductivity. *Biophysics* 2016. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.

6. **Roth B. J.** How to explain why „Unequal anisotropy ratios“ is important using pictures but no mathematics. *Proc. of the 2006 Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. New York, USA, August 30 – September 3, 2006. Pp. 580–583.
7. **Roth B. J., Beaudoin D. L.** Approximate analytical solutions of the Bidomain equations for electrical stimulation of cardiac tissue with curving fibers. *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. Issue 5. Pp. 051925.
8. **Vasserman I. N.** Numerical Simulation of Mechanoelectric Feedback in a Deformed Myocardium. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2020. Vol. 61. Issue 7. Pp. 1116–1127.
9. **Sepulveda N. G. et al.** Current injection into a two-dimensional anisotropic bidomain. *Biophys. J.* 1989. Vol. 55. Pp. 987–999.
10. **Goel V., Roth B. J.** Approximate analytical solutions to the bidomain equations describing electrical activity in cardiac tissue. *Proceedings of the 13th Southern Biomedical Conference*. Washington, DC , April 16-17, 1994. Pp. 967–970.
11. **Wikswa J. P. et al.** Virtual Electrodes in Cardiac Tissue: A Common Mechanism for Anodal and Cathodal Stimulation. *Biophys. J.* 1995. Vol. 69. Pp. 2195–2210.
12. **Roth B. J.** A mathematical model of make and break electrical stimulation of cardiac tissue by unipolar anode or cathode. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1995. Vol. 42. Pp. 1174–1184.
13. **Roth B. J.** Mechanism for polarization of cardiac tissue at a sealed boundary. *Med. Biol. Eng. Compute.* 1999. Vol. 37. Pp. 523–525.
14. **Ferreira A. J. M.** *MATLAB Codes for Finite Element Analys.* Berlin: Springer, 2009. 235 p.

Сведения об авторах / Information about authors

Вассерман Игорь Николаевич / Igor' N. Vasserman

к.ф.-м.н., научный сотрудник ИМСС УрО РАН / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher, IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Шардаков Игорь Николаевич / Igor' N. Shardakov
д.ф.-м.н., заведующий лабораторией ИМСС УрО РАН / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of IMSS Ural Branch RAS

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Глот Ирина Олеговна / Irina. O. Glot
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ИМСС УрО РАН / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Senior Researcher, IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Шестаков Алексей Петрович / Aleksey P. Shestakov
к.ф.-м.н., научный сотрудник ИМСС УрО РАН / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher, IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 30.10.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 11.11.2024
Принята к публикации / Accepted for publication 20.11.2024