

ISSN 1992-2752



Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:

Математика
Механика
Информатика

4(53) ВЫПУСК **24**

ВЕСТНИК СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	СЕРИЯ 1: <i>Математика</i> <i>Механика</i> <i>Информатика</i>	12+ ISSN 1992-2752 Выпуск 4 (53) 2024
--	--	--

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2024. — 4 (53). 2024. — 96 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по направлению «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

Журнал также публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)».

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktывkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is in the list of peer-reviewed scientific journals which publish the main scientific results of dissertations for the scientific degree of Candidate of Sciences, for the scientific degree of Doctor of Sciences, in the direction «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)»

The journal also publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)»

Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.

АДРЕС РЕДАКЦИИ
167001, РЕСПУБЛИКА КОМИ, Г. СЫКТЫВКАР, ОКТЯБРЬСКИЙ ПРОСП., Д. 55
ТЕЛ. (8212)390-308.
ЭЛЕКТРОННЫЙ АДРЕС: [HTTP://VESTNIK-MMI.SYKTSU.RU/](http://vestnik-mm1.syktso.ru/)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

д.пед.н., доцент, ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»
Сотникова О. А.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР:

Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Аббасов М. Э., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Беляева Н. А., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Вечтомов Е. М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой (ВятГУ)
Головач П. А., к.ф.-м.н., доцент, исследователь (Университет Бергена, Норвегия)
Григорьев С. Г., член-корреспондент РАО, д.т.н., профессор, профессор (МГПУ)
Дворяткина С. Н., д.пед.н., доцент, профессор (ЕГУ им. И. А. Бунина)
Дорофеев С. Н., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ТолГУ)
Калинин С. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ВятГУ)
Колесников Г. Н., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Колпак Е. П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ)
Крылатов А. Ю., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Махнев А. А., член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, главный научный
сотрудник (ИММ УрО РАН)
Одинец В. П., д.ф.-м.н., профессор
Орлов В. В., д.пед.н., профессор, профессор (Российский государственный
педагогический университет им. А. И. Герцена)
Парилина Е. М., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Певный А. Б., д.ф.-м.н., профессор
Петров Н. Н., д.ф.-м.н., профессор, профессор (УдмГУ)
Петраков А. П., д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Питухин Е. А., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Попов Н. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Рудикова-Фронхёфер Л. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь)
Тихомиров А. Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник
(Коми НЦ УрО РАН)
Чермных В. В., д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Щербатых С.В., д.пед.н., профессор, ректор ЕГУ им. И. А. Бунина

ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕДАКЦИЯ:

Руденко Л. Н., руководитель издательского центра (СГУ им. Питирима Сорокина)
Котелина Н. О., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)
Мазур В. В., к.г.н., преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)
Старцева Е. Н., ст. преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)

Содержание

Прикладная математика и механика

Борков П. В., Мальцева О. А., Полякова И. В., Старцева Е. Н. *Оценка инвестиционной активности на основе новостного фона* 4

Вассерман И. Н., Шардаков И. Н., Глот И. О., Шестаков А. П. *Численное и аналитическое моделирование двумерных статических бидоменных эффектов в миокарде* 21

Информатика

Рыбак В. А. *Построение моделей влияния качества окружающей среды на здоровье населения* 39

Теория и методика обучения математике и информатике

Тестов В. А., Попков Р. А. *Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры* 52

Методические материалы

Устюгов В. А., Антонец И. В., Голубев Е. А. *Автоматизированный анализ изображений микроскопии шунгитов* 69

Наставник-ученик

Ермоленко А. В., Поздеев Я. А. *О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области* 84

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.

Выпуск 4 (53)

Bulletin of Syktovkar University.

Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 539.3

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_4

ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИОННОЙ АКТИВНОСТИ НА ОСНОВЕ НОВОСТНОГО ФОНА

Петр Викторович Борков¹,
Ольга Амнджановна Мальцева¹,
Ирина Владимировна Полякова¹,
Евгения Николаевна Старцева²

¹Банк России, maltseva.rs@yandex.ru

²Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина

Аннотация. Целью исследования является построение опережающего показателя инвестиционной активности на основе анализа новостей Telegram-каналов. Имеющиеся данные Росстата по инвестиционной активности публикуются с временным лагом и подвергаются корректировке, что затрудняет их использование при оперативной оценке текущей экономической ситуации. В работе рассматриваются два подхода: первый — на основе фильтра по ключевым словам, второй — на основе языковой модели «BERT». Оба подхода демонстрируют статистически значимую корреляцию с данными Росстата.

Ключевые слова: текстовый анализ, машинное обучение, BERT, rubert-tiny2, инвестиционная активность, Python

Благодарности. Авторы выражают благодарность Полехиной Алисе Александровне, Гусевой Анне Викторовне за предоставленную базу данных новостей Telegram-каналов, а также коллегам Банка России и Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина, участвовавших в обсуждениях работы, за полезные замечания и предложения.

Для цитирования: Борков П. В., Мальцева О. А., Полякова И. В., Старцева Е. Н. Оценка инвестиционной активности на основе новостного фона // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Вып. 4 (53). С. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_4

Настоящая статья отражает личную позицию авторов. Содержание и результаты данного исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в данном материале являются исключительно авторскими.

Article

ESTIMATION OF INVESTMENT ACTIVITY BASED ON THE NEWS BACKGROUND

Petr V. Borkov¹, Olga A. Maltseva¹,
Irina V. Polyakova¹, Evgenija N. Startseva²

¹Bank of Russia, maltseva.rs@yandex.ru

²Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Abstract. The purpose of our research is to build a leading indicator of investment activity based on the analysis of Telegram-channel news. The available Rosstat data on investment activity are published with a time lag and are subject to adjustment, which makes it difficult to use them in an operational assessment of the current economic situation. The paper considers two approaches: the first is based on a keyword filter, the second is based on the „BERT“ language model. Both approaches demonstrate a statistically significant correlation with Rosstat data.

Keywords: NLP, machine learning, BERT, rubert-tiny2, investment activity, Python

Acknowledgments. The authors express their gratitude to Alisa A. Polekhina, Anna V. Guseva for providing the database of news of Telegram channels, as well as colleagues of the Bank of Russia and Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, who participated in discussions of the work, for useful comments and suggestions.

For citation: Borkov P. V., Maltseva O. A., Polyakova I. V., Startseva E. N. Estimation of investment activity based on the news background. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 4–20. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_4

The views expressed herein are solely those of the authors. The content and results of this research should not be considered or referred to in any publications as the Bank of Russia's official position, official policy, or decisions. Any errors in this document are the responsibility of the authors.

1. Введение

Динамика инвестиционной активности является одним из важных аспектов экономического развития и потенциала предприятия, отрасли, региона, страны, что объясняет внимание исследователей к этой теме. Основными показателями инвестиционной активности в России считаются такие данные Росстата, как динамика инвестиций в основной капитал и валовое накопление основного капитала. После перехода в 2016 году с ежемесячного наблюдения на квартальное оперативность официальных показателей Росстата по инвестициям в основной капитал ухудшилась. Кроме того, еще одной из проблем официальной статистики является значительный временной лаг¹, который возникает с момента сбора информации до публикации агрегированных данных [1].

В литературе для оценки экономической ситуации достаточно широко применяется анализ новостного фона [2–7], при этом в качестве источника информации используются статьи крупных изданий. Новизной исследования является выбранный источник — сообщения из Telegram-каналов. Возможность получать информацию оперативно, практически в любых разрезах и с любой частотой — неоспоримые преимущества новостной базы Telegram-каналов. Еще одним преимуществом базы дан-

¹1-я оперативная оценка публикуется на 40-й рабочий день, после отчетного квартала, окончательная оценка — февраль четвертого года, после отчетного года.

ных является наличие информации не только профильных специалистов, а еще настроений и ожиданий в обществе в целом.

Исследование строится на предположении о том, что сигналы об изменениях инвестиционной активности в сообщениях появляются гораздо раньше, чем эти изменения находят отражение в данных Росстата. Целью работы является построение опережающего индекса инвестиционной активности в России, рассчитанного на основе оценки динамики новостей, который статистически значимо коррелирует с данными Росстата.

2. Материалы и методы

В качестве источника информации использована база данных, которая содержит более 11,4 миллионов сообщений из 691 российского ТГ-канала, с историей существования не менее 12 кварталов. Анализ охватывает период с сентября 2015 по сентябрь 2023 года. Пул каналов сформирован на основе каталога tgstat.ru². Характеристики базы данных приведены в табл. 1.

Таблица 1

Структура базы данных Telegram-сообщений за весь период наблюдения (с сентября 2015 по сентябрь 2023)

Категории (по tgstat.ru)	Количество каналов	Общее количество сообщений в канале (тыс.)			
		Среднее	Медиана	Минимум	Максимум
Экономика (ecn)	386	8,6	3,8	0,4	253,8
Новости и СМИ (nws)	131	40,7	23,6	1,1	216,5
Политика (plt)	89	21,6	15,8	2,5	160,1
Криптовалюты (cpr)	44	11,4	5,7	0,9	62,3
Бизнес и стартапы (bsn)	29	7,9	4,3	0,8	82,9
Блоги (blg)	12	12,9	4,1	0,5	99,1
ВСЕГО	691	16,6	6,9	0,4	253,8

Для предварительной оценки «информационного наполнения» базы данных проанализировано окружение слова «инвест»³. Облако слов

²Полное описание базы данных в работе А. Гусевой, А. Полехиной «Построение индекса восприятия Банка России: анализ данных телеграмм-каналов с использованием методов машинного обучения» готовится к публикации. Список каналов, подготовленный указанными авторами, размещен на ресурсе http://github.com/Alisa-llm/tg_channels_cbr (дата обращения: 14.10.2024).

³Проанализированы и размечены тексты, содержащие в себе строку «инвест». Для анализа контекста слова «инвест» выбрано ± 5 слов, окружающих ключевое слово. Для построения «Облака слов» была проведена лемматизация.

3. Результаты исследования и обсуждение

Фильтр по ключевым словам. Наивный индекс инвестиционной активности

Фильтр по ключевым словам широко применяется в экономической литературе для оценки экономической ситуации. Так авторами в работе [2] был предложен индекс неопределенности (IPU) как доля статей, содержащих отдельные выражения, из категорий «экономика», «неопределенность» и «политика» в общем количестве статей. Расчет индекса (IPU) осуществляется по множеству развитых и развивающихся стран [3–5].

В работе при построении наивного индекса инвестиционной активности применялся фильтр по ключевому слову «инвест». Как показало «облако слов», фильтруя таким способом сообщения, отбираются данные, касающиеся инвестиций как в основной капитал (реальных инвестиций), так и финансовых инвестиций. В данном подходе мы полагаемся на тесную связь реальных инвестиций с финансовыми вложениями.

Для каждого Telegram-канала с выбранной периодичностью (день, месяц или квартал) подсчитывается доля постов, содержащих ключевое слово. В рамках исследования была выбрана квартальная частота данных. Далее, полученные доли для каждого источника нормализуются к нулевому среднему и на одно стандартное отклонение на всем периоде. На последнем шаге конструируется сводный TG-index как среднее значение нормированных временных рядов⁴:

$$\text{TG-index}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\nu_{j,t} - m_j}{s_j}, \quad (1)$$

где $\nu_{j,t}$ — доля постов в j -ом канале за период t с ключевым словом, m_j — средняя доля постов на j -ом канале на всем периоде, s_j — стандартное отклонение доли постов на j -ом канале на всем периоде.

Построенный сводный индекс (TG-index) и базисный индекс инвестиций в основной капитал (ИОК) представлены на рис. 2. Согласно расширенному тесту Дики – Фуллера (ADF), оба временных ряда являются интегрированными первого порядка $I(1)$. Тест Энгла – Грэнджера (Engle – Granger test) не обнаружил статистически значимой коинтеграции рядов с линейным трендом.

⁴Исключая выбросы в данных.

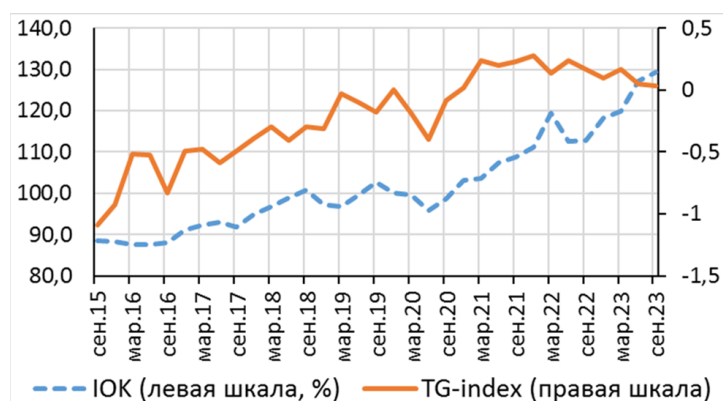
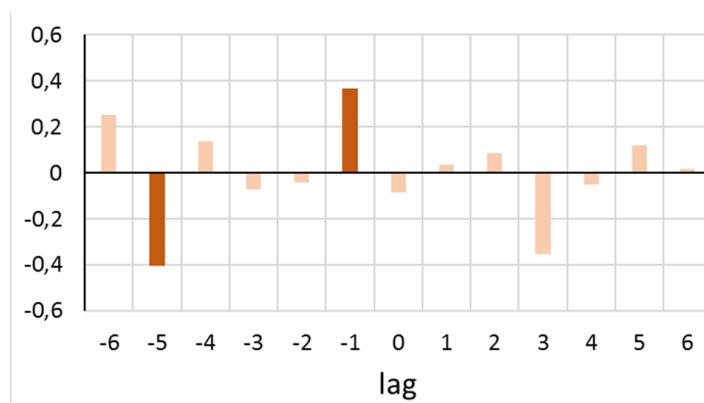


Рис. 2. Динамика TG-index и ИОК

На основе анализа кросс-коррелограммы рядов в первых разностях (рис. 3)⁵ для опережающей оценки инвестиционной активности предлагаем использовать следующий индекс:

$$\text{NAIVE} = \Delta[\text{TG-index}(-1) - \text{TG-index}(-5)]. \quad (2)$$

Далее мы будем называть его наивным индексом инвестиционной активности (NAIVE). Индекс NAIVE статистически значимо коррелирует с динамикой инвестиций ($\Delta \log(\text{ИОК})$) на уровне 0,48 ($p\text{-value} = 0,03$) и по построению является опережающим с лагом в I квартал.

Рис. 3. Кросс-коррелограмма $\Delta\text{TG-index}$ и $\Delta \log(\text{ИОК})$

⁵Для ИОК рассматривается первая разность логарифмов базисного индекса, которая интерпретируется как темп прироста инвестиций за квартал.

Проанализировав динамику наивного индекса по различным типам каналов и применив метод главных компонент, мы достигли более высокой корреляции на выборке из политических (plt), новостных (nws) каналов и блогов (blg) для следующей модификации индекса:

$$\begin{aligned} \text{NAIVE}_{\text{md}} = & 0,5 \cdot \text{NAIVE}(\text{plt}, \text{nws}, \text{blg}) - \\ & - 0,4 \cdot \text{NAIVE}(\text{nws}) - 0,07 \cdot \text{NAIVE}(\text{plt}), \end{aligned} \quad (3)$$

где NAIVE (пул каналов) — наивный индекс, построенный по соответствующей выборке каналов. Корреляция модифицированного наивного индекса с динамикой инвестиций составила 0,72 ($p\text{-value} < 0,001$).

Для оценки прогнозных свойств модифицированного индекса построена линейная регрессия и проверено ее качество на тестовой выборке с I кв. 2023 по IV кв. 2023 года. Сравнение прогнозируемых результатов с фактическими данными (рис. 4) демонстрирует, что модифицированный наивный индекс может выступать в качестве опережающего прогнозного индекса инвестиционной активности. Так, значения ошибок прогнозирования модели MAE и RMSE составили 0,7 п.п. и 0,9 п.п. соответственно, что ниже, чем при использовании авторегрессионной модели AR(1) (1,7 п.п. и 2,6 п.п.)⁶.



Рис. 4. Фактические и модельные значения темпа прироста ИОК (квартал к кварталу)

⁶Была использована модель AR(1) со структурным сдвигом в I кв. 2009 г.

В рамках исследования возник вопрос, насколько влияет выбранный пул каналов на качество индекса. Для этого случайно выбирали 80 % каналов каждой категории и строили по ним индекс. Результаты показали, что для наивного индекса интервал изменения корреляций небольшой, что говорит об устойчивости к ротации каналов. Корреляция модифицированного индекса демонстрирует его более сильную чувствительность к выбранному пулу каналов, что требует дальнейшего исследования (табл. 2, рис. 5).

Таблица 2

Характеристики распределения коэффициентов корреляции наивных индексов и $\Delta \log(\text{ИОК})$

	mean	std	10 %	25 %	50 %	75%	90 %
NAIVE	0,47	0,03	0,43	0,45	0,47	0,49	0,51
NAIVE _{md}	0,61	0,09	0,49	0,55	0,62	0,67	0,72

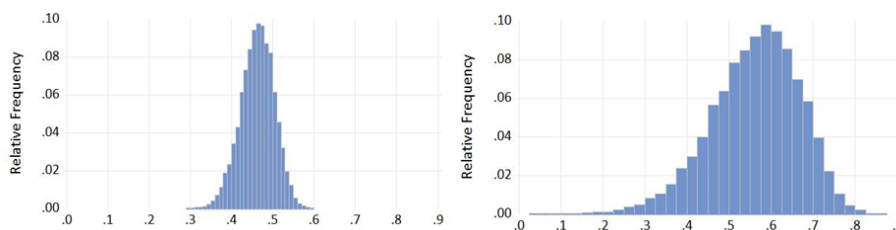


Рис. 5. Распределение коэффициентов корреляции индексов с $\Delta \log(\text{ИОК})$: слева — наивный индекс, справа — модифицированный

Применение языковой модели «BERT»

Поскольку фильтр не может учесть контекст сообщений, было решено провести эксперимент с языковыми моделями, которые позволяют извлекать информацию из неструктурированных данных. Анализ базы данных и разметка части сообщений показали, что потребуются языковая модель, учитывающая сложный контекст сообщений: при осуществлении разметки специалисты по-разному оценивали сообщения как с точки зрения отнесения их к реальным инвестициям, так и с точки зрения определения тональности. Мы остановили свой выбор на языковой модели BERT, разработанной в Google AI Language [8]. Архитектура модели BERT позволяет изучать контекст слова исходя из его окружения в целом и достигает более глубокого понимания текста.

В рамках этого подхода была проведена разметка новостных сообщений в двух разрезах — страна / реальные инвестиции (табл. 3). Первый — относится ли сообщение к России. Второй — отражает ли сообщение факторы и факты осуществления инвестиционной деятельности. Разметка для второй категории (реальные инвестиции) имеет сильный дисбаланс классов, который при обучении корректировался подбором весов для каждого класса.

Таблица 3

Данные по разметке текста (количество сообщений)

	Россия			Реальные инвестиции		
	TRUE	FALSE	Всего	TRUE	FALSE	Всего
Размер обучающей выборки (Train)	2188	940	3128	565	2624	3189
Размер тестовой выборки (Test)	384	176	560	113	453	566
Всего	2572	1116	3688	678	3077	3755

Для классификации была выбрана языковая модель «rubert-tiny2» (Hugging Face cointegrated/rubert-tiny2) [11; 12]. Работает только с русским языком, поддерживает последовательности до 2048 токенов и имеет большой словарный запас 83 тыс. токенов. Модель «rubert-tiny2» имеет классификационный слой нейронов, который генерирует 312 выходных параметров для классификации. Для выполнения задач бинарной классификации в разрезе страна / реальные инвестиции был добавлен выходной слой с двумя нейронами (листинг 1)⁷.

Листинг 1

Подготовка модели

```
# Импорт библиотек
import torch
from transformers import BertTokenizer, BertForSequenceClassification
from torch.utils.data import Dataset, DataLoader
from transformers import AdamW, get_linear_schedule_with_warmup

# Загрузка модели
model_type = 'cointegrated/rubert-tiny2'
model = BertForSequenceClassification.from_pretrained(model_type)
```

⁷Исходный код размещен: https://github.com/PetrBorkov/invest_activity (дата обращения: 14.10.2024).

Окончание листинга 1

```

# загрузка токенизатора
tokenizer = BertTokenizer.from_pretrained(model_type)

# Замена классификационного слоя
out_features = model.bert.encoder.layer[1].output.dense.out_features
model.classifier = torch.nn.Linear(out_features, n_classes)

# Перемещение модели на выбранное устройство (GPU или CPU)
device = torch.device("cuda:0" if torch.cuda.is_available() else "cpu")
model.to(device)

```

Использовался оптимизатор AdamW, в котором задавался относительно низкий learning rate (проводились эксперименты с весами от $7e-6$ до $2e-5$), так как модель необходимо дообучить. Наилучший результат показало обучение на 15 эпохах с использованием линейного планировщика обучения (линейное снижение learning rate), заданием весов класса (для второй модели — это $[0,15; 1]$). Learning rate на уровне $7e-6$ в сочетании с планировщиком позволяет не допускать быстрого переобучения (листинг 2). Результаты обучения приведены в табл. 4 и на рис. 6.

*Листинг 2***Подготовка данных и настройка параметров**

```

# Создание обучающего/валидационного DataLoader
train_set = CustomDataset(X_train, y_train, tokenizer)
valid_set = CustomDataset(X_valid, y_valid, tokenizer)
train_loader = DataLoader(train_set, batch_size=2, shuffle=True)
valid_loader = DataLoader(valid_set, batch_size=2, shuffle=True)

# Инициализация оптимизатора AdamW и планировщика обучения
epochs = 15 # количество эпох обучения
optimizer = AdamW(model.parameters(), lr=7e-6, correct_bias=False,\
                  no_deprecation_warning=True)
scheduler = get_linear_schedule_with_warmup(
    optimizer,
    num_warmup_steps=len(train_loader) * 2,
    num_training_steps=len(train_loader) * epochs
)
class_weights = torch.tensor([0.15, 1.0]) # веса классов
#инициализация функции потерь
loss_fn = torch.nn.CrossEntropyLoss(weight=class_weights).to(device)

```

Таблица 4

Результаты обучения моделей

	Россия (1, 0)	Реальные инвестиции (1, 0)
F1-мера	0,900	0,731
Precision	0,938	0,800
Recall	0,940	0,673

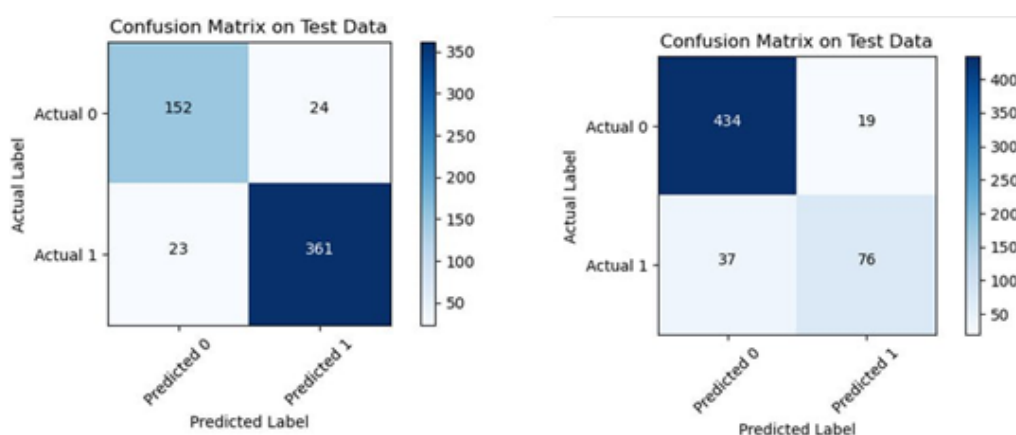


Рис. 6. Матрица ошибок классификации новостей по принадлежности к России (слева), реальным инвестициям (справа)

С помощью обученной модели произведена разметка базы и для каждого канала подсчитана доля сообщений, относящихся к теме «Инвестиционная активность в России». Далее был рассчитан сводный индекс TGbert по всей базе аналогично тому, как это было сделано при построении наивного индекса. Анализ TGbert-index, рассчитанный по всем каналам, не выявил в его динамике статистически значимых корреляций с динамикой инвестиций.

При анализе динамики построенного индекса в разрезе категорий каналов и применении метода главных компонент была выявлена статистически значимая корреляция на выборке из политических (plt), новостных (nws), экономических (ecn) и криптовалютных (crp) каналов для следующего показателя:

$$\text{BERT-index} = \Delta[2 \times \text{TGbert}(\text{plt}) + \text{TGbert}(\text{crp}) - \text{TGbert}(\text{ecn}) - 1,5 \times \text{TGbert}(\text{nws})](-1). \quad (4)$$

Как и наивный индекс, BERT-index является опережающим с лагом в I квартал и коррелирует с инвестициями ($\Delta \log(\text{IOK})$) на уровне 0,68 ($p\text{-value} = 0,001$). Полученный результат сопоставим с результатами модифицированного индекса, но уступает ему по качеству прогноза: ошибки прогнозирования MAE и RMSE составили 1,4 п.п. и 1,9 п.п. При проверке на устойчивость к ротации каналов BERT-index продемонстрировал чувствительность, аналогичную той, что наблюдалось для модифицированного индекса (табл. 5).

Таблица 5

Характеристики распределения коэффициентов корреляции Bert-index и $\Delta \log(\text{IOK})$

	mean	std	10 %	25 %	50 %	75%	90 %
BERT-index	0,61	0,08	0,51	0,56	0,62	0,67	0,71

4. Заключение

В исследовании подтверждается предположение о том, что в информационном поле сигналы об изменениях инвестиционной активности проходят раньше, чем отражаются в данных официальной статистики. Модифицированный вариант индекса (NAIVEmd) может использоваться в качестве опережающего индекса при построении краткосрочного прогноза динамики инвестиций в основной капитал. Наивный индекс инвестиционной активности (NAIVE) показал устойчивость к набору каналов и может рассматриваться в качестве своего рода «benchmark» при оценке ситуации. Результаты, основанные на архитектуре BERT и на том же наборе данных, что и для наивного индекса, не продемонстрировали существенного улучшения качества индексов. Возможно, это обусловлено высокой чувствительностью к качеству разметки. При разметке текста понятие «инвестиционная активность» трактовалось достаточно широко: в сообщениях учитывались не только факты, а еще факторы, оказывающие влияние на инвестиционную активность.

Список источников

1. Регламент оценки, корректировки и публикации данных статистического наблюдения за строительством и инвестициями в основной капитал. Утвержден приказом Росстата от 26 сен-

- тября 2016 г. № 544 // СПС «КонсультантПлюс». URL: <https://www.consultant.ru> (дата обращения: 14.10.2024).
2. **Baker S. R., Bloom N., Davis S. J.** Measuring Economic Policy Uncertainty // *Quarterly Journal of Economics*. 2016. Vol. 131 (4). Pp. 1593–1636. DOI: 10.1093/qje/qjw/024.
 3. **Cerda R., Silva A., Valente J. T.** Impact of economic uncertainty in a small open economy: the case of Chile // *Applied Economics*. 2018. Vol. 50. No 26. Pp. 2894–2908. URL: <https://arxiv.org/pdf/1810.04805> (дата обращения: 14.10.2024).
 4. **Zalla R.** Economic Policy Uncertainty in Ireland // *Atlantic Economic Journal*. 2017. Vol. 45 (2). Pp. 267–271. DOI: 10.1007/s11293-017-9536-8.
 5. **Петрова Д., Трунин П.** Оценка уровня неопределенности экономической политики // *Деньги и кредит*. 2023. № 82 (3). С. 48–61.
 6. **Яковлева К.** Оценка экономической активности на основе текстового анализа // *Деньги и кредит*. 2018. № 77 (4). С. 26–41. DOI: 10.31477/rjmf.201804.26.
 7. **Колужнов Д. В., Колужнов Е. Д., Ляхнова М. В.** Учет информационного фона в DSGE-модели экономики России с адаптивным обучением // *Мир экономики и управления*. 2023. Т. 23 (4). С. 60–82. DOI: 10.25205/2542-0429-2023-23-4-60-82.
 8. **Jacob Devlin, Ming-Wei Chang, Kenton Lee and Kristina Toutanova.** BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // *Proceedings of the 2019 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. 2019. Vol. 1. Long and Short Papers. Pp. 4171–4186, Minneapolis, Minnesota. URL: <https://aclanthology.org/N19-1423/> (дата обращения: 14.10.2024).
 9. **Носко В. П.** Эконометрика : в 2 кн. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021. Кн. 1. 704 с. (Академический учебник).
 10. **Мхитарян В. С. и др.** Эконометрика : учебник / под ред. д-ра экон. наук, проф. В. С. Мхитаряна. М.: Проспект, 2009. 384 с.

11. **Dale David.** Маленький и быстрый BERT для русского языка. June, 2021. URL: <https://habr.com/ru/post/562064> (дата обращения: 14.10.2024).
12. **Dale David.** Рейтинг русскоязычных энкодеров предложений. June, 2022. URL: <https://habr.com/ru/articles/669674> (дата обращения: 14.10.2024).

References

1. Regulations for assessments, adjustments and publication of statistical observation data on construction and investments in fixed capital. The order of Rosstat dated 26 September 2016 No 544. *SPS „Konsul'tant Plyus“* [SPS „ConsultantPlus“ was approved]. Available at: <https://www.consultant.ru> (accessed: 10/14/2024). (In Russ.)
2. **Baker S. R., Bloom N., Davis S. J.** Measuring Economic Policy Uncertainty. *Quarterly Journal of Economics*. 2016. Vol. 131 (4). Pp. 1593–1636. DOI:10.1093/qje/qjw/024.
3. **Cerda R., Silva A., Valente J. T.** Impact of economic uncertainty in a small open economy: the case of Chile. *Applied Economics*. 2018. Vol. 50. No 26. Pp. 2894–2908. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1810.04805> (accessed: 14.10.2024).
4. **Zalla R.** Economic Policy Uncertainty in Ireland. *Atlantic Economic Journal*. 2017. Vol. 45 (2). Pp. 267–271. DOI: 10.1007/s11293-017-9536-8.
5. **Petrova D., Trunin P.** Assessment of the level of uncertainty of economic policy. *Den'gi i kredit* [Money and credit]. 2023. No 82 (3). Pp. 48–61. (In Russ.)
6. **Yakovleva K.** Assessment of economic activity based on text analysis. *Den'gi i kredit* [Money and credit]. 2018. No 77 (4). Pp. 26–41. DOI: 10.31477/rjmf.201804.26. (In Russ.)
7. **Kolyuzhnov D. V., Kolyuzhnov E. D., Lyakhnova M. V.** Taking into account the information background in the DSGE model of the

Russian economy with adaptive learning. *Mir ekonomiki i upravleniya* [World of Economics and Management]. 2023. Vol. 23 (4). Pp. 60–82. DOI: 10.25205/2542-0429-2023-23-4-60-82. (In Russ.)

8. **Jacob Devlin, Ming-Wei Chang, Kenton Lee and Kristina Toutanova.** BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. *Proceedings of the 2019 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. 2019. Vol. 1. Long and Short Papers. Pp. 4171–4186, Minneapolis, Minnesota. Available at: <https://aclanthology.org/N19-1423/> (accessed: 14.10.2024).
9. **Nosko V. P.** *Ekonometrika : v 2 kn.* [Econometrics : in 2 books]. Moscow: Publishing House „Delo“ RANEPА, 2021. Book 1. 704 p. (Academic textbook). (In Russ.)
10. **Mkhitaryan V. S. et al.** *Ekonometrika : uchebnik* [Econometrics : textbook]. Ed. Doctor of Economics sciences, prof. V. S. Mkhitaryan. Moscow: Prospekt, 2009. 384 p. (In Russ.)
11. **Dale David.** *Malen'kiy i bystryy BERT dlya russkogo yazyka* [Small and fast BERT for the Russian language]. June, 2021. Available at: <https://habr.com/ru/post/562064> (accessed: 14.10.2024).
12. **Dale David.** *Reyting russkoyazychnykh enkoderov predlozheniy* [Rating of Russian-language sentence encoders]. June, 2022. Available at: <https://habr.com/ru/articles/669674> (accessed: 14.10.2024).

Сведения об авторах / Information about authors

Борков Петр Викторович / Petr V. Borkov

руководитель направления / Head of Workstream

Отделение — Национальный банк по Республике Коми Северо-Западного главного управления Центрального банка Российской Федерации / Division — National Bank of the Republic of Komi of the North-Western Main Branch of the Central Bank of the Russian Federation

167000, Россия, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 53 / 53, Lenin Street, Syktvkar, 167000, Russia

Мальцева Ольга Аминджановна / Olga A. Maltseva

ведущий экономист / Lead Economist

Отделение — Национальный банк по Республике Коми Северо-Западного главного управления Центрального банка Российской Федерации / Division — National Bank of the Republic of Komi of the North-Western Main Branch of the Central Bank of the Russian Federation

167000, Россия, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 53 / 53, Lenin Street, Syktyvkar, 167000, Russia

Полякова Ирина Владимировна / Irina V. Polyakova

главный экономист / Chief Economist

Отделение — Национальный банк по Республике Коми Северо-Западного главного управления Центрального банка Российской Федерации / Division — National Bank of the Republic of Komi of the North-Western Main Branch of the Central Bank of the Russian Federation

167000, Россия, г. Сыктывкар, ул. Ленина, 53 / 53, Lenin Street, Syktyvkar, 167000, Russia

Старцева Евгения Николаевна / Evgenija N. Startseva

старший преподаватель кафедры прикладной математики и компьютерных наук / senior lecturer Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 06.11.2024

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 13.11.2024

Принята к публикации / Accepted for publication 20.11.2024

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 4 (53)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 539.3

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_21

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ БИДОМЕННЫХ ЭФФЕКТОВ В МИОКАРДЕ

**Игорь Николаевич Вассерман,
Игорь Николаевич Шардаков,
Ирина Олеговна Глот,
Алексей Петрович Шестаков**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, igorw@icmm.ru

Аннотация. С макроскопической точки зрения сердечная мышца может рассматриваться как две анизотропные проводящие среды – внеклеточное и внутриклеточное пространство, взаимодействующие через мембрану. Построенная на таких предположениях модель электрической активности сердца называется бидоменной. Если предположить, что тензоры проводимости внутриклеточного и внеклеточного пространства подобны, то модель сердечной мышцы может быть значительно упрощена. Такая модель называется монодоменной. Её достаточно для большинства задач о распространении волн возбуждения в ткани миокарда. Однако бидоменная модель необходима в тех случаях, когда принимается во внимание сам процесс возбуждения от внешних факторов. Для исследования развития этих процессов необходимо решать полную бидоменную систему. Однако при малой силе воздействия для определения первоначальной конфигурации достаточно решения линеаризованной статической бидоменной задачи. К рассматриваемому кругу задач относятся образование виртуальных электродов и поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами и волокнами, подходящими к этой границе

под углом при протекании вдоль нее электрического тока. В настоящей работе представлена совокупность конечноэлементных и аналитических решений на основе статической линейаризованной бидоменной модели. Сравнялось аналитическое (а для поляризации полосы – точное) и численное решение этих задач.

Ключевые слова: миокард, бидоменная модель, монодоменная модель, виртуальные электроды

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Для цитирования: Вассерман И. Н., Шардаков И. Н., Глот И. О., Шестаков А. П. Численное и аналитическое моделирование двумерных статических бидоменных эффектов в миокарде // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 4 (53). С. 21–38. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_21

Article

NUMERICAL AND ANALYTICAL SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL STATIC BIDOMAIN EFFECTS IN THE MYOCARDIUM

Igor' N. Vasserman, Igor' N. Shardakov,
Irina. O. Glot, Aleksey P. Shestakov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, igorw@icmm.ru

Abstract. From a macroscopic point of view, cardiac muscle can be considered as two anisotropic conducting media - extracellular and intracellular space, interacting through the membrane. The model of electrical activity of the heart built on such assumptions is called bidomain. If we assume that the conductivity tensors of the intracellular and extracellular spaces are similar, then the model of the cardiac muscle can be significantly simplified. This model is called monodomain. It is sufficient to solve most problems of propagating wave activation in the myocardium of tissues. However, the bidomain model is necessary in cases where the process of excitation from external factors itself is taken into account. To study the development of these processes, it is necessary to solve the complete bidomain system. However, when the excitation is rather small, it is sufficient to solve the linearized static bidomain problem to determine the initial

configuration. This range of tasks includes the formation of virtual electrodes and the polarization of strips of cardiac tissue with isolated boundaries and fibers, approaching this boundary at an angle when current flows along it. This paper presents a set of finite element and analytical solutions based on a static linearized bidomain model. The analytical (and exact for strip polarization) solutions of these problems were compared with numerical ones.

Keywords: myocardium, bidomain model, monodomain model, virtual electrodes.

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment, registration number of the topic 124020700047-3.

For citation: Vasserman I. N., Shardakov I. N., Glot I. O., Shestakov A. P. Numerical and analytical simulation of two-dimensional static bidomain effects in the myocardium. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 21–38. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_21

1. Введение

С макроскопической точки зрения сердечная мышца может рассматриваться как две проводящие среды — внеклеточное и внутриклеточное пространство, взаимодействующие через мембрану [1; 2]. Единство внутриклеточной среды обеспечивают щелевые соединения. Каждая из этих двух сред характеризуется своим тензором проводимости. Построенная на этих предположениях модель электрической активности сердца называется бидоменной.

Если предположить, что тензоры проводимости внутриклеточного и внеклеточного пространства подобны, то модель сердечной мышцы может быть значительно упрощена [2] (мономерная). Если в рамках этой модели проводимости в материальных осях вычисляются как среднее гармоническое соответствующих внутриклеточных проводимостей, результаты, описывающие распространение волны возбуждения от уже сформировавшегося очага возбуждения для мономерной и бидоменной моделей, различаются незначительно [3]. Исследованию процессов, описываемых этой моделью, посвящено гигантское число работ. К ним могут быть отнесены и работы авторов [4], [5]. Поэтому в данной статье мономерная модель подробно не рассматривается.

Однако бидоменная модель необходима в тех случаях, когда принимается во внимание сам процесс формирования очагов возбуждения от внешних факторов [3] и начальная конфигурация этих очагов. Обзор таких эффектов можно найти в [6]. Некоторые эффекты описаны в [7]. В общем случае приходится решать нелинейную жесткую краевую задачу в частных производных. При малой силе воздействия и медленных процессах для решения вышеупомянутых задач может быть использована линеаризованная статическая бидоменная модель [8–10], представляющая собой гораздо более простую линейную краевую задачу.

Одним из примеров является образование виртуальных электродов — областей деполяризации и гиперполяризации, возникающих при подведении к миокарду электрического тока в малой области [9–12]. Их возникновение, с одной стороны, может приводить к возбуждению спиральных волн, с другой стороны может быть использовано в процессе дефибрилляции [12]. Для этой задачи точное аналитическое решение есть только в вырожденном случае подобия тензоров вне- и внутриклеточной проводимости, то есть когда эффект отсутствует [9]. Для оценки конфигурации электродов существует только приближенное решение [10]. Оно использует возмущение по малому параметру вокруг вышеупомянутого аналитического решения и поэтому применимо только при малом отклонении тензоров от подобия. В действительности это не так: тензор внеклеточной проводимости близок к шаровому, а компоненты тензора внутриклеточной проводимости могут отличаться на порядок. Поэтому в данном случае аналитические методы применимы либо для грубой оценки, либо для тестирования численных методов.

Другой задачей является поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами при протекании вдоль нее электрического тока. Волокна подходят к изолированной границе под углом. Здесь может быть получено точное аналитическое решение [13].

В настоящей работе рассмотрено численное решение методом конечных элементов системы уравнений в частных производных линеаризованной статической бидоменной модели в применении к вышеупомянутым задачам. Сравнивается численное и аналитическое решение этих задач.

2. Материалы и методы

Используемая при исследовании электрических процессов в миокарде полная бидоменная модель имеет следующий вид [2]:

$$\nabla \cdot (D_i \nabla V_m) + \nabla \cdot (D_e \nabla V_e) = \chi I_m + \chi I_{ts} + \tilde{I}_{is}, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot ((D_i + D_e) \nabla V_e) + \nabla \cdot (D_i \nabla V_m) = \tilde{I}_{is} + \tilde{I}_{es}, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (2)$$

при граничных условиях

$$n \cdot (D_i \nabla V_e) = -n \cdot (D_i \nabla V_m), \quad \vec{x} \in \partial\Omega \quad (3)$$

$$n \cdot (D_e \nabla V_e) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь V_i – внутриклеточный потенциал, V_e – внеклеточный потенциал, $V_m = V_i - V_e$ – трансмембранный потенциал, D_i – внутриклеточный тензор проводимости, D_e – внеклеточный тензор проводимости, $I_m = C_m (dV_m/dt) + I_{ion}(V_m, q_1, \dots, q_n)$ – трансмембранный ток, χ – площадь клеточной мембраны на единицу объема миокарда, I_{ts} – дополнительный трансмембранный источник тока, например, связанный с действием активируемых деформацией каналов, $\tilde{I}_{is}, \tilde{I}_{es}$ – внешние источники тока, подводимые к внутриклеточной и внеклеточной среде соответственно, C_m – емкость клеточной мембраны, q_1, \dots, q_n – внутренние переменные, описывающие концентрации ионов, ферментов и т. д., I_{ion} – ток, обусловленный движением ионов через мембрану, $\vec{x} = (x, y)$ – координаты точки, Ω – область, занимаемая миокардом, $\partial\Omega$ – граница этой области.

Если предположить, что тензоры проводимости внутриклеточного и внеклеточного пространства подобны, то можно получить более простую – монодоменную модель сердечной мышцы [2]. Её достаточно для большинства задач о распространении волн возбуждения от уже сформировавшегося очага возбуждения в ткани миокарда [3].

Однако бидоменная модель необходима в тех случаях, когда принимается во внимание сам процесс формирования вышеупомянутых очагов возбуждения от внешних факторов [3]. Для исследования процесса развития возбуждения в этом случае необходимо решение полной системы (1–4). Однако при малой интенсивности и медленном характере воздействия внешних факторов можно считать, что $I_m = I_{ion} = G_0 \bar{V}_m$, где $\bar{V}_m = V_m - V_{rest}$ – отклонение трансмембранного потенциала от потенциала покоя, $G_0 = (\partial I_{ion} / \partial V_m)_{V_m = V_{rest}}$ – линеаризованная около потенциала покоя проводимость мембраны. В этом случае для определения первоначального распределения трансмембранного и внеклеточного по-

тенциалов достаточно решения линейризованной статической бидоменной задачи [8–10]:

$$\nabla \cdot (D_i \nabla \bar{V}_m) + \nabla \cdot (D_i \nabla V_e) = \chi G_0 \bar{V}_m, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot ((D_i + D_e) \nabla V_e) + \nabla \cdot (D_i \nabla \bar{V}_m) = I_{es}, \quad \vec{x} \in \Omega. \quad (6)$$

В уравнениях(5–6) в качестве внешних источников тока представлен только ток, подводимый к внеклеточной среде, потому что в рассматриваемых в данной статье примерах имеется только этот тип внешнего воздействия. В случае необходимости добавить другие типы воздействий, представленные в (1–2), не будет составлять особой проблемы.

Одним из наиболее ярких примеров, в котором бидоменная модель проявляет себя, является образование виртуальных электродов [6] – областей деполяризации и гиперполяризации, возникающих при подведении к миокарду электрического тока в малой области (рис. 1).

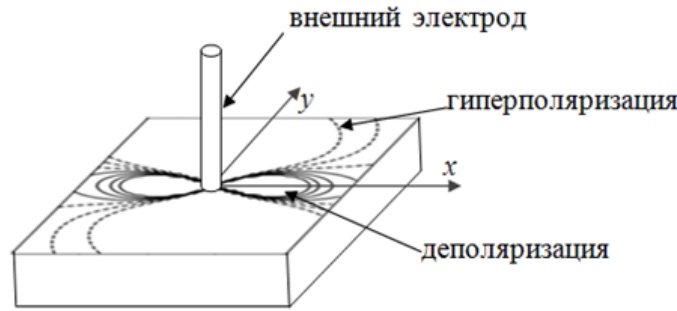


Рис. 1. Характерное распределение электрического потенциала при образовании виртуального электрода в миокарде

Это явление имеет место, когда условие подобия внутри- и внеклеточного тензоров проводимости $D_e = \gamma D_i$ не выполняется, что характерно для реального миокарда. Однако как раз для этого вырожденного случая подобия тензоров проводимости имеется точное решение [9]. Оно имеет вид:

$$V_m^0 = - \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) \frac{\gamma_0}{2\pi} K_0(R), \quad (7)$$

где $X = x/\Lambda_x, Y = y/\Lambda_y$ – приведенные декартовы координаты, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \Theta = \arctan(Y/X)$ – приведенные полярные координаты,

$$\Lambda_x = \sqrt{\frac{1}{\chi G_0} \frac{\sigma_x^i \sigma_x^e}{\sigma_x^i + \sigma_x^e}}, \quad \Lambda_y = \sqrt{\frac{1}{\chi G_0} \frac{\sigma_y^i \sigma_y^e}{\sigma_y^i + \sigma_y^e}} \quad (8)$$

– константы длины сердечной ткани в направлениях x и y , $\alpha = \sigma_x^i / \sigma_x^e$, γ_0 – масштабированная интенсивность источника тока, $K_0(R)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Для оценки конфигурации электродов может быть использовано приближенное решение [10] в главных осях. В этом решении вводится параметр $\epsilon = 1 - (\sigma_x^e / \sigma_y^e) / (\sigma_x^i / \sigma_y^i)$, равный нулю, когда тензоры проводимости внутри- и внеклеточного пространства подобны. Затем проводится анализ возмущений по этому параметру $V_m = V_m^0(R) + \epsilon V_m^1(R, \Theta) + \dots$ вокруг аналитического решения (7).

Другой задачей, где необходимо использование статической линеаризованной бидоменной модели, является поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами и волокнами, подходящими к этой границе под углом при протекании вдоль нее электрического тока (рис. 2).

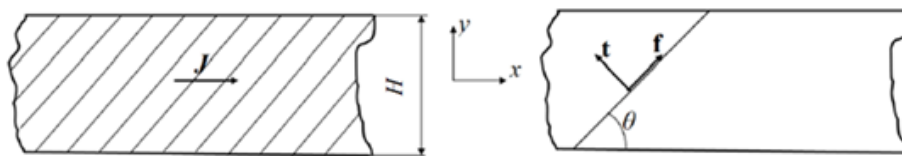


Рис. 2. Поляризация полосы

Эта задача имеет аналитическое точное решение для трансмембранного V_m и внеклеточного V_e потенциала [13]

$$V_m = A \sinh\left(\frac{y}{\Lambda}\right), \quad (9)$$

$$V_e = -B \sinh\left(\frac{y}{\Lambda}\right) + ay - E_x x, \quad (10)$$

где

$$\Lambda = \sqrt{\frac{1}{\chi G_0} \frac{\sigma_{yy}^i \sigma_{yy}^e}{\sigma_{yy}^i + \sigma_{yy}^e}} \quad (11)$$

– константа длины в направлении y , E_x – напряженность электрического поля в направлении x .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(\sigma_{xy}^i/\sigma_{yy}^i - \sigma_{xy}^e/\sigma_{yy}^e) E_x \Lambda}{\cosh(H/2\Lambda)}, & B &= \frac{\chi G_0 \Lambda^2 A}{\sigma_{yy}^e}, \\
a &= \frac{\sigma_{xy}^e}{\sigma_{yy}^e} E_x + \frac{B}{\Lambda} \cosh(H/2\Lambda).
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь компоненты тензоров внутри- (i) и внеклеточной (e) проводимости в осях x и y могут быть выражены через значения угла θ и соответствующих проводимостей вдоль $\sigma_f^{(i,e)}$ и поперек $\sigma_t^{(i,e)}$ волокна с помощью преобразования поворота.

Следует заметить, что при однородном деформировании полосы волокна остаются прямыми, изменяются только угол наклона волокна и значения компонент тензора проводимости. Поэтому аналитическое решение (9–12) применимо и в этом случае, но с другими параметрами.

Для численного решения рассматриваемых задач используется метод конечных элементов в виде, представленном в [2]. С помощью использования метода Галеркина и конечноэлементной дискретизации

$$\bar{V}_m = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j, \quad V_e = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \tag{13}$$

решение статической линейаризованной бидоменной задачи приводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Здесь N – число узлов конечноэлементной сетки, v_j, u_j – значения трансмембранного и внеклеточного потенциала в узле j , φ_j – базовая функция, равная единице в узле j и нулю в остальных узлах сетки.

Эта система имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где элементы субматриц вычисляются как

$$A_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} D_i \nabla \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta dx + \int_{\Omega} \chi G_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta dx, \tag{15}$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} D_i \nabla \varphi_{\alpha} \nabla \varphi_{\beta} dx, \quad (16)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} (D_i + D_e) \nabla \varphi_{\alpha} \nabla \varphi_{\beta} dx. \quad (17)$$

Здесь \mathbf{v} , \mathbf{u} – вектор-столбцы, содержащие значения трансмембранного и внеклеточного потенциала соответственно в точках конечноэлементной сетки, \mathbf{b} – вектор-столбец, описывающий внешнее воздействие, представленное здесь током, подводимым к внеклеточной среде:

$$b_{\alpha} = - \int_{\Omega} \tilde{I}_{es} \varphi_{\alpha} dx. \quad (18)$$

Поскольку внеклеточный потенциал определен до постоянного значения, система (14), в отличие от таковой, получаемой при дискретизации монодоменного уравнения, является сингулярной. Кроме того, необходимо обеспечить баланс между подводимым током и током, протекающим через границу. В [9] этот вопрос решается путем использования бесконечных элементов. В данной работе используются условия Дирихле.

Метод конечных элементов был реализован на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. В качестве прототипа использовались программы из [14].

Для задачи о виртуальных электродах падение трансмембранного потенциала происходит гораздо быстрее, чем внеклеточного. Поэтому на достаточном удалении от точки подведения тока при нахождении внеклеточного потенциала трансмембранным можно пренебречь. Уравнение (6) приводится к виду (анизотропная задача Пуассона)

$$\nabla \cdot ((D_i + D_e) \nabla V_e) = \tilde{I}_{es}. \quad (19)$$

Это уравнение имеет точное решение на бесконечной области при точечном возбуждении.

$$\tilde{V}_e = - \frac{\tilde{I}_{es}}{2\pi \tilde{\Lambda}_x \tilde{\Lambda}_y} \ln(\tilde{r}), \quad (20)$$

где $\tilde{r} = \sqrt{\left(x/\tilde{\Lambda}_x\right)^2 + \left(y/\tilde{\Lambda}_y\right)^2}$, $\tilde{\Lambda}_x = \sqrt{\sigma_x^i + \sigma_x^e}$, $\tilde{\Lambda}_y = \sqrt{\sigma_y^i + \sigma_y^e}$.

Следует заметить, что $\tilde{\Lambda}_x$, $\tilde{\Lambda}_y$ и \tilde{r} в (20) не то же самое, что Λ_x , Λ_y и R в (8). Значения (20) на границах рассматриваемой области можно использовать в качестве граничных условий Дирихле для внеклеточного потенциала при численном решении задачи о виртуальных электродах.

3. Результаты

В данном разделе представлены результаты численного и аналитического решения задачи о виртуальных электродах и задачи о поляризации полосы сердечной ткани с волокнами, подходящими к изолированным границам под углом при протекании вдоль этой полосы электрического тока. Численное решение производилось методом конечных элементов. Аналитическое решение определялось формулами (7–8) для виртуальных электродов и (9–12) для полосы.

При решении задачи о виртуальных электродах в качестве области моделирования был взят квадрат со стороной 64Λ , где $\Lambda = \max(\Lambda_x, \Lambda_y)$, а Λ_x и Λ_y вычислялись согласно (8). В качестве граничных условий на внешних границах области моделирования для внеклеточного потенциала используются условия Дирихле, основанные на решении (20).

Рассмотрим вначале вырожденный случай задачи о виртуальных электродах, когда тензоры внутри- и внеклеточной проводимости подобны. В этом случае образования виртуальных электродов не происходит (рис. 3), но имеется точное решение для трансмембранного потенциала.

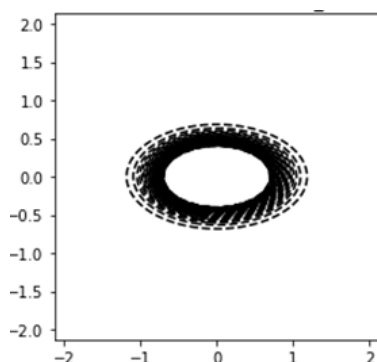


Рис. 3. Распределение трансмембранного потенциала при подобии тензоров проводимости

Предположение о характере распределения трансмембранного и внеклеточного потенциала, сделанное при выводе граничных условий, обусловленных (20), подтверждается при численном решении (рис. 4).

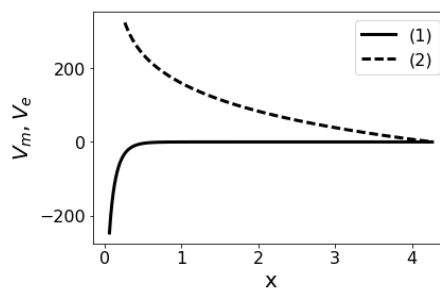


Рис. 4. Характер распределения трансмембранного (1) и внеклеточного (2) потенциалов

Если для трансмембранного потенциала взять естественные граничные условия, то вблизи внешних границ области возникает возмущение (рис. 5).

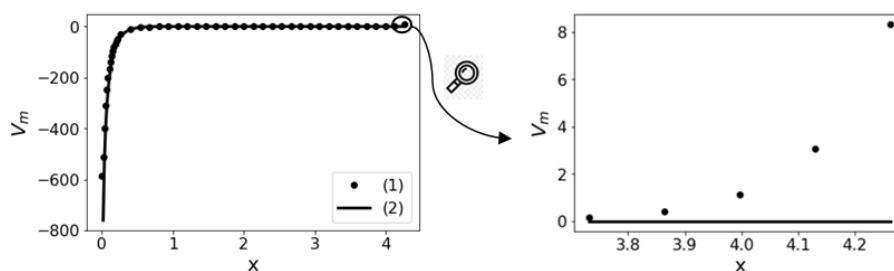


Рис. 5. Сравнение численного (1) и аналитического (2) решений. Возмущение на границе

Если на внешней границе взять $V_m = 0$, то это возмущение исчезает и имеет место неплохая согласованность между аналитическим и конечноэлементным решениями (рис. 6).

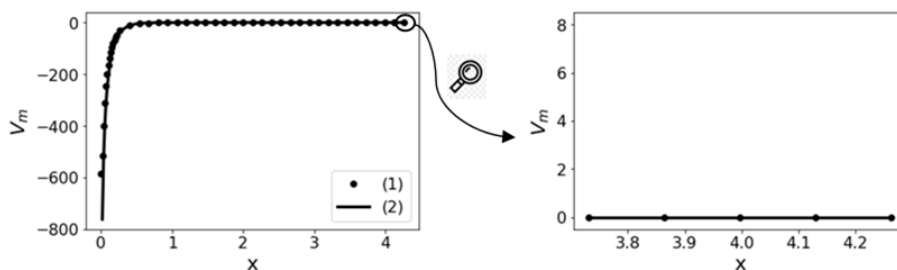


Рис. 6. Сравнение численного (1) и аналитического (2) решений. Коррекция возмущения на границе

Рассмотрим теперь более реальный пример, когда тензоры проводимости не подобны. Пусть главная ось, соответствующая направлению волокна, направлена под углом $\pi/6$ к горизонтали. В этом случае имеют место виртуальные электроды (рис. 7).

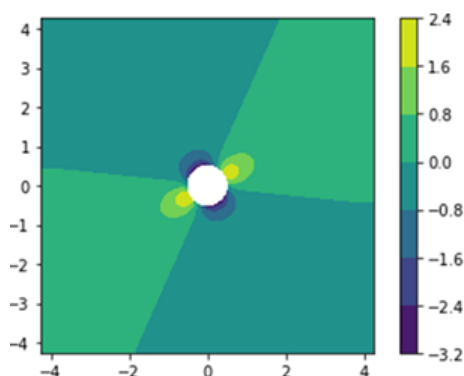


Рис. 7. Виртуальные электроды

Для задачи о виртуальных электродах решение в точке подвода тока стремится к бесконечности. Поэтому имеет смысл оценивать решение вне некоторой окрестности этой точки.

Для конечноэлементного моделирования поляризации полосы рассматривается фрагмент конечной длины (рис. 8), на левой и правой границе которого заданы значения внеклеточного потенциала V_0 и V_1 соответственно. Толщина полосы H была взята равной 4Λ , угол θ – равным $\pi/6$. Длина L была взята равной $6H$. Здесь Λ – константа длины в направлении x , вычисляемая по формуле (11).

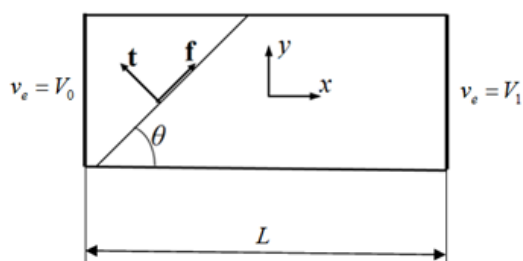


Рис. 8. Фрагмент полосы

При численном моделировании распределение внеклеточного потенциала оказывается почти линейным вдоль длины полосы за исключением небольших участков рядом с границей. На рис. 9 показано распределение внеклеточного потенциала по длине полосы при $y = 0$. Если

в аналитическом решении взять напряженность электрического поля E_x в соответствии с наклоном линейного участка, то для распределения потенциалов по толщине полосы при $x = 0$ имеет место практически полное совпадение численного решения с аналитическим (рис. 10).

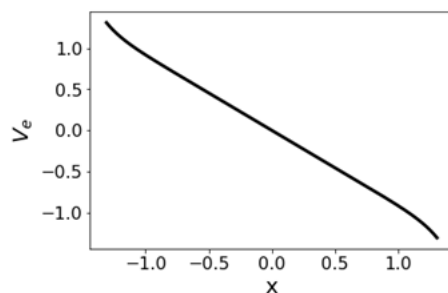


Рис. 9. Распределение внеклеточного потенциала по длине полосы

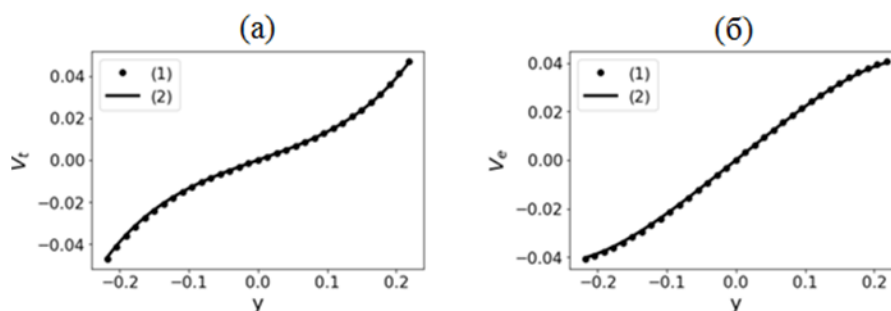


Рис. 10. Сравнение численного (1) и аналитического (2) решений для распределения по толщине полосы (а) – трансмембранного, (б) – внеклеточного потенциала

Значительное расхождение между аналитическим и численным решением имеет место только вблизи левой и правой границ (рис. 11).

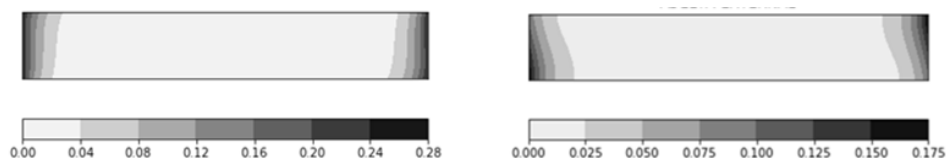


Рис. 11. Абсолютное значение расхождения между аналитическим и численным решениями: (а) – для трансмембранного, (б) – внеклеточного потенциала

4. Обсуждение

Дана формулировка линеаризованной статической бидоменной задачи, позволяющая исследовать процесс формирования этих очагов возбуждения от внешних факторов при достаточно медленном характере воздействия внешних факторов. На основе разработанного конечно-элементного алгоритма решения задач о распределении электрических потенциалов в рамках бидоменной модели получены численные результаты для задачи о формировании виртуальных электродов и поляризация полосы сердечной ткани с изолированными границами и волокнами, подходящими к этой границе под углом при протекании вдоль нее электрического тока. При практическом применении линеаризованной статической бидоменной модели (например, в кардиостимуляторах) необходимо выяснить границы ее применимости при импульсном возбуждении, то есть когда можно пренебречь емкостной составляющей трансмембранного тока.

Для задачи о виртуальных электродах сформулированы граничные условия Дирихле для внеклеточного потенциала. Они позволяют рассматривать эту задачу в конечной области, что важно для численного решения, и обеспечивают баланс между подводимым током и током, протекающим через границу. Эти условия определяются значениями на границе рассматриваемой области аналитического решения анизотропной задачи Пуассона для бесконечной области при точечном возбуждении.

В случае задачи о виртуальных электродах удалось достичь совпадения численного и аналитического решения только для вырожденного случая. Для общего случая удалось получить только качественные результаты. Необходимо дальнейшее исследование влияния граничных условий.

Для задачи о поляризации полосы удалось достичь практически полного совпадения численного и аналитического решений в середине фрагмента полосы. Таким образом, задачу о поляризации полосы можно использовать для верификации метода конечных элементов в применении к линеаризованной статической бидоменной модели. Поскольку аналитическое решение применимо и для однородно деформированной полосы, поляризация полосы может оказаться полезной при идентификации зависимости тензоров проводимости от деформации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Sachse F.B.** Computational Cardiology. Modelling of Anatomy, Electrophysiology and Mechanics. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 326 p.
2. **Sundnes J. et al** Computing the Electrical Activity in the Heart. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 318 p.
3. **Poste M. et al** A Comparison of Monodomain and Bidomain Reaction-Diffusion Models for Action Potential Propagation in the Human Heart // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2006. Vol. 53. Issue 12. Pp. 2425–2435.
4. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** Numerical simulation of the propagation of electrical excitation in the heart wall taking its fibrous laminar structure into account // *Biophysics*. 2015. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.
5. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** The mechanism of the initiation of cardiac arrhythmias due to a pathological distribution of myocardial conductivity // *Biophysics*. 2016. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.
6. **Roth B. J.** How to explain why „Unequal anisotropy ratios“ is important using pictures but no mathematics // *Proc. of the 2006 Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. New York, USA, August 30 – September 3, 2006. Pp. 580–583.
7. **Roth B. J., Beaudoin D. L.** Approximate analytical solutions of the Bidomain equations for electrical stimulation of cardiac tissue with curving fibers // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. Issue 5. Pp. 051925.
8. **Vasserman I. N.** Numerical Simulation of Mechanoelectric Feedback in a Deformed Myocardium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2020. Vol. 61. Issue 7. Pp. 1116–1127.
9. **Sepulveda N. G. et al.** Current injection into a two-dimensional anisotropic bidomain // *Biophys. J.* 1989. Vol. 55. Pp. 987–999.
10. **Goel. V., Roth B. J.** Approximate analytical solutions to the bidomain equations describing electrical activity in cardiac tissue //

Proceedings of the 13th Southern Biomedical Conference. Washington, DC, April 16–17, 1994. Pp. 967–970.

11. **Wikswow J. P. et al.** Virtual Electrodes in Cardiac Tissue: A Common Mechanism for Anodal and Cathodal Stimulation // *Biophys. J.* 1995. Vol. 69. Pp. 2195–2210.
12. **Roth B. J.** A mathematical model of make and break electrical stimulation of cardiac tissue by unipolar anode or cathode // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1995. Vol. 42. Pp. 1174–1184.
13. **Roth B. J.** Mechanism for polarization of cardiac tissue at a sealed boundary // *Med. Biol. Eng. Compute.* 1999. Vol. 37. Pp. 523–525.
14. **Ferreira A. J. M.** MATLAB Codes for Finite Element Analys. Berlin: Springer, 2009. 235 p.

References

1. **Sachse F. B.** *Computational Cardiology. Modelling of Anatomy, Electrophysiology and Mechanics.* Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 326 p.
2. **Sundnes J. et al.** *Computing the Electrical Activity in the Heart.* Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. 318 p.
3. **Poste M. et al** A Comparison of Monodomain and Bidomain Reaction-Diffusion Models for Action Potential Propagation in the Human Heart. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2006. Vol. 53. Issue 12. Pp. 2425–2435.
4. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** Numerical simulation of the propagation of electrical excitation in the heart wall taking its fibrous laminar structure into account. *Biophysics* 2015. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.
5. **Vasserman I. N., Matveenko V. P., Shardakov I. N., Shestakov A. P.** The mechanism of the initiation of cardiac arrhythmias due to a pathological distribution of myocardial conductivity. *Biophysics* 2016. Vol. 61. Issue 2. Pp. 297–302.

6. **Roth B. J.** How to explain why „Unequal anisotropy ratios“ is important using pictures but no mathematics. *Proc. of the 2006 Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. New York, USA, August 30 – September 3, 2006. Pp. 580–583.
7. **Roth B. J., Beaudoin D. L.** Approximate analytical solutions of the Bidomain equations for electrical stimulation of cardiac tissue with curving fibers. *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. Issue 5. Pp. 051925.
8. **Vasserman I. N.** Numerical Simulation of Mechanoelectric Feedback in a Deformed Myocardium. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2020. Vol. 61. Issue 7. Pp. 1116–1127.
9. **Sepulveda N. G. et al.** Current injection into a two-dimensional anisotropic bidomain. *Biophys. J.* 1989. Vol. 55. Pp. 987–999.
10. **Goel V., Roth B. J.** Approximate analytical solutions to the bidomain equations describing electrical activity in cardiac tissue. *Proceedings of the 13th Southern Biomedical Conference*. Washington, DC , April 16-17, 1994. Pp. 967–970.
11. **Wikswa J. P. et al.** Virtual Electrodes in Cardiac Tissue: A Common Mechanism for Anodal and Cathodal Stimulation. *Biophys. J.* 1995. Vol. 69. Pp. 2195–2210.
12. **Roth B. J.** A mathematical model of make and break electrical stimulation of cardiac tissue by unipolar anode or cathode. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1995. Vol. 42. Pp. 1174–1184.
13. **Roth B. J.** Mechanism for polarization of cardiac tissue at a sealed boundary. *Med. Biol. Eng. Compute.* 1999. Vol. 37. Pp. 523–525.
14. **Ferreira A. J. M.** *MATLAB Codes for Finite Element Analys.* Berlin: Springer, 2009. 235 p.

Сведения об авторах / Information about authors

Вассерман Игорь Николаевич / Igor' N. Vasserman

к.ф.-м.н., научный сотрудник ИМСС УрО РАН / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher, IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Шардаков Игорь Николаевич / Igor' N. Shardakov
д.ф.-м.н., заведующий лабораторией ИМСС УрО РАН / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of IMSS Ural Branch RAS

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Глот Ирина Олеговна / Irina. O. Glot
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ИМСС УрО РАН / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Senior Researcher, IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Шестаков Алексей Петрович / Aleksey P. Shestakov
к.ф.-м.н., научный сотрудник ИМСС УрО РАН / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher, IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Институт механики сплошных сред УрО РАН / Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
614018, Россия, Пермь, ул. Академика Королева, 1 / 1, st. Academician Korolev, Perm, 614018, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 30.10.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 11.11.2024
Принята к публикации / Accepted for publication 20.11.2024

ИНФОРМАТИКА

COMPUTER SCIENCES

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.

Выпуск 4 (53)

Bulletin of Syktывkar University.

Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 004.94

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_39

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ВЛИЯНИЯ КАЧЕСТВА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА ЗДОРОВЬЕ НАСЕЛЕНИЯ

Виктор Александрович Рыбак

Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, v.gubak@bsuir.by

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы построения различных информационных моделей для анализа и прогнозирования влияния загрязнения атмосферного воздуха и почвенного покрова на здоровье детского населения. Исходными данными выступают числовые ряды, сформированные при исследованиях областных центров Республики Беларусь. Уровни заболеваемости получены с учётом деления территорий городов на районы обслуживания поликлиник. Для оценки и анализа качества окружающей среды выполнены натурные исследования с отбором проб и дальнейшим построением картосхем вероятностного распределения концентраций загрязняющих веществ. В случае атмосферного воздуха средствами геоинформационных технологий выполнена обработка данных об основных источниках загрязнения: промышленных предприятий и автотранспорта, и их объёмов. Для анализа степени загрязнения почв разработаны сетки отбора проб, результаты геохимических исследований

интерполированы в соответствии с новыми алгоритмами для получения непрерывных полей концентраций. Для выявления взаимосвязей в системе «Окружающая среда — здоровье населения» построены модели линейной и квадратичной регрессии. Обосновано применение искусственных нейронных сетей совместно с теорией нечётких множеств. Разработанная нейро-нечёткая система оказалась точнее двух выше указанных моделей. Полученные результаты, кроме научной новизны, обладают практической значимостью и могут быть использованы для оценки эффективности градостроительных и природоохранных мероприятий.

Ключевые слова: нейронные сети, регрессионные модели, анализ качества окружающей среды, нейро-нечёткая модель

Для цитирования: Рыбак В. А. Построение моделей влияния качества окружающей среды на здоровье населения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Вып. 4 (53). С. 39–51. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_39

Article

CONSTRUCTION OF MODELS OF THE IMPACT OF ENVIRONMENTAL QUALITY ON PUBLIC HEALTH

Viktor A. Rybak

Belarusian State University of Informatics
and Radioelectronics, v.rybak@bsuir.by

Abstract. The paper considers the issues of constructing various information models for analyzing and forecasting the impact of air and soil pollution on the health of children. The initial data are numerical series generated during studies of regional centers of the Republic of Belarus. Morbidity levels were obtained taking into account the division of city territories into service areas of polyclinics. To assess and analyze the quality of the environment, field studies were carried out with sampling and subsequent construction of maps of the probability distribution of pollutant concentrations. In the case of atmospheric air, data on the main sources of pollution, industrial enterprises and motor transport, and their volumes were processed by means of geoinformation technologies. To analyze the degree of soil pollution, sampling grids were developed, the results

of geochemical studies were interpolated in accordance with new algorithms to obtain continuous concentration fields. Linear and quadratic regression models were built to identify relationships in the „Environment — population health“ system. The use of artificial neural networks in conjunction with the theory of fuzzy sets is substantiated. The developed neuro-fuzzy system turned out to be more accurate than the two above-mentioned models. The obtained results, in addition to scientific novelty, have practical significance and can be used to assess the effectiveness of urban development and environmental protection measures.

Keywords: neural networks, regression models, environmental quality analysis, neuro-fuzzy model

For citation: Rybak V. A. Construction of models of the impact of environmental quality on public health. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 39–51. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_39

1. Введение

С развитием информационных технологий и ростом вычислительных мощностей становится возможным создание сложных моделей, отражающих взаимное влияние показателей друг на друга.

По мере возрастания обеспокоенности общества ухудшением качества окружающей среды учёные пытаются выявить статистически значимые закономерности, описывающие влияние степени загрязнения на здоровье населения [1; 2]. Сегодня концепция предельно допустимых концентраций подвергается справедливой критике, хотя она по-прежнему занимает важную часть основы санитарно-гигиенической науки.

Таким образом, с одной стороны, есть заинтересованность граждан получать актуальную информацию о качестве среды обитания и рисках неблагоприятного воздействия, а с другой — существующая система мониторинга не позволяет это осуществить в полном объёме. Кроме того, не существует единой утверждённой методики оценки вредного воздействия на здоровье населения.

Данная проблема может быть решена с использованием элементов искусственного интеллекта для обработки больших объёмов статистической информации [3].

Исследования в области создания первых элементов искусственного интеллекта начались в 40-х годах прошлого века. Благодаря повышению качества оптических приборов учёным удалось установить точную структуру нейронов головного мозга, после чего была создана упрощённая модель нервной клетки. Группируя и объединяя их в сеть, удалось создать инструмент для выполнения логических операций. Далее Дональд Хебб обосновал правила компьютерного обучения [4; 5].

После некоторого прорыва в развитии нейронных сетей в 50-е годы, связанного с их первым использованием в работе компьютеров и созданием алгоритма распознавания образов, научный интерес в данной сфере несколько снизился, что было обусловлено выявленными проблемами по дальнейшей реализации из-за ограниченных вычислительных мощностей того времени. Только к 2000 году мощь вычислительной техники выросла настолько, что позволила реализовать многие ранее предложенные методы и алгоритмы [6; 7].

Кроме нейронных сетей эффективным инструментом для решения нетривиальных задач является теория нечётких множеств (ТНМ), которая берёт своё начало с момента публикации статьи Л. Заде [8], в которой вместо традиционных характеристических функций были предложены новые функции принадлежности элемента подмножеству со значениями в интервале $[0, 1]$. Дальнейшее развитие ТНМ было связано с предложенным Л. Заде принципом обобщения, который ввёл общий метод адаптации стандартных математических средств к обработке нечётких данных [9]. ТНМ и нечёткая логика составляют основу лингвистического подхода. При этом каждое лингвистическое значение характеризуется меткой или, как ещё говорят, первичным термом (например, «высокий») и смыслом, который определяется степенью принадлежности. Такой подход позволяет оперировать близкими к пониманию человека терминами, например «высокий рост», «низкая зарплата», «среднее качество». Вместе с тем предложенные научные методы позволяют осуществлять переход от нечётких множеств к чётким значениям. Этот процесс принято называть «дефузификацией» [10].

Цель работы — разработка и компьютерная реализация моделей с повышенной точностью прогнозирования влияния загрязнения окружающей среды на здоровье населения.

2. Материалы и методы

Для установления и подтверждения закономерностей в системе «Окружающая среда — здоровье населения» в рамках корректировок генеральных планов областных городов Республики Беларусь было выполнено исследование качества основных природных сред и уровня заболеваемости людей. В результате обработки проб почвы, воздуха и воды в среде ArcView Gis новыми алгоритмами были построены карто-схемы вероятностного распределения концентраций. При этом фактические концентрации, измеряемые в мг/м³, обрабатывались с учётом функционально-экологического зонирования территорий для получения оценки по пятибалльной шкале. Фрагмент исходных данных, характеризующих качество атмосферного воздуха, приведён в табл. 1.

Таблица 1

**Итоговая балльная оценка качества воздуха г. Могилёва
(для каждого подрайона), фрагмент**

Код	Подрайон	Площадь га	Балльная оценка загрязнения атмосферного воздуха			
			Р	ПТ	СЗ	сводная
03_05	Юго-западный узел	442,27	3,07	0,23	0,33	3,15
04_02	Речной порт	168,52	3,12	0,10	0,17	3,15
04_19	Габровская – Лавсановское кладбище (усадебная застройка)	159,84	2,43	0,17	1,47	3,02
01_03	Дубровенка	116,70	2,82	0,87	0,26	3,05
03_06	Фатина – Димитрова	235,51	2,14	1,54	0,42	3,10
04_14	Холмы (усадебная застройка)	78,35	1,49	0,14	2,21	3,03
05_02	Могилёв-II – Мелькомбинат	284,34	2,81	0,24	0,40	2,83
06_12	Областная больница	103,19	2,48	0,60	0,50	2,72
04_17	Зона отдыха у озера Святое	135,27	2,69	0,57	0,15	2,86
03_03	Карабановка	315,16	2,10	0,53	0,95	2,84
04_14	Южный узел	604,44	2,65	0,22	0,11	2,80
02_07	Подниколье	109,65	2,73	0,20	0,20	2,64
04_25	Гребенёво (усадебная застройка)	273,17	2,38	0,46	0,41	2,67
05_13	Зелёный Луг (зона перспективной застройки)	196,01	2,40	0,23	0,38	2,51
06_21	Габровская – Гребенёва (коммунально-складская зона)	94,86	2,63	0,16	0,23	2,54
05_05	Юго-западный промузел	442,27	3,04	0,16	0,31	3,20

Примечание. Р – балльные оценки по комплексному показателю загрязнения атмосферы;

ПТ – дополнительные баллы по территориям с повышенными требованиями;

СЗ – баллы по расположению в санитарно-защитных зонах.

Для примера на рис. 1 представлена картосхема загрязнённости атмосферного воздуха г. Могилёва.

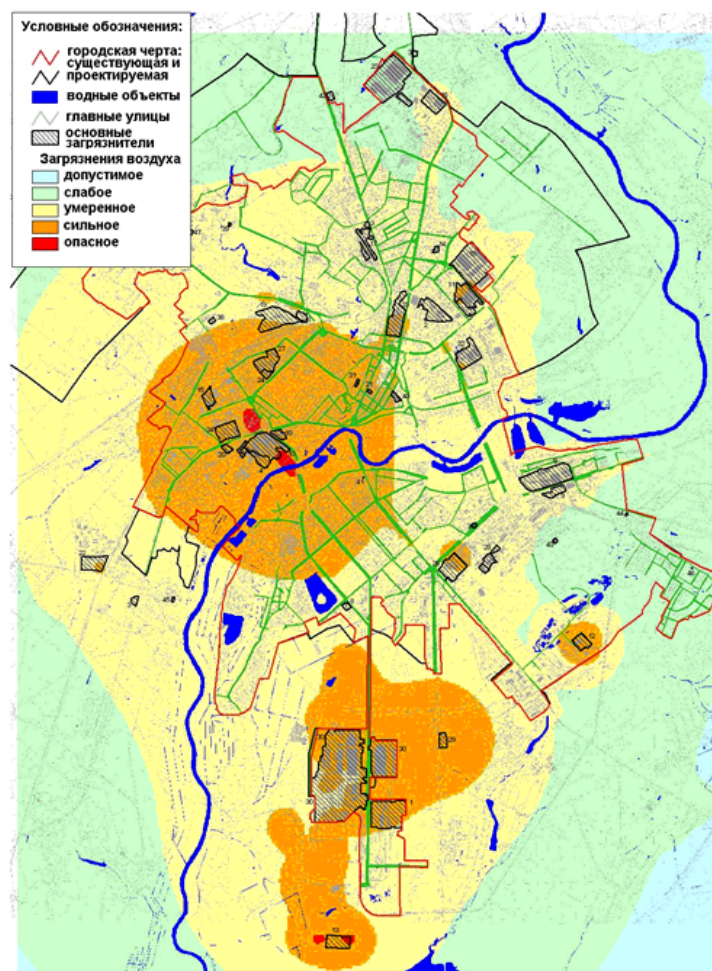


Рис. 1. Степень загрязнённости атмосферного воздуха г. Могилёва

При этом задача получения непрерывных полей по точкам сетки отбора проб и деление на качественные степени не является тривиальной. Для почвенного покрова, например, был разработан следующий алгоритм:

- 1) построение полей концентраций тяжёлых металлов по кригинг-методу, оптимизирующему процедуру интерполяции на основе анализа статистической природы поля;
- 2) расчёт вспомогательного поля на основе комплексного показателя Z_c с учётом его градаций (Z_c — суммарный показатель загрязне-

ния, учитывающий отношение фактической концентрации вещества к геохимическому фону);

- 3) итоговый расчёт балльной оценки с учётом ограничений на концентрацию тяжёлых металлов, зависящих от местоположения и вида использования территорий.

Для анализа качества атмосферного воздуха был разработан новый алгоритм, основанный на официальной методике ОНД-86 [11] с дополнительными модификациями, обусловленными функциональным использованием территорий. Это позволило учитывать определённые требования к уровню загрязнённости для медицинских учреждений, школ, детских садов и др.

Информация о заболеваемости населения ведётся районными поликлиниками и аккумулируется в соответствующих отделах исполкомов. Хотя деление территории города на районы обслуживания поликлиниками является условным, оно позволяет соотносить показатели заболеваемости и уровня загрязнённости (рис. 2) [12]. Сформированные таким образом несколько числовых рядов, характеризующие как показатели здоровья, так и уровень загрязнённости окружающей среды, обрабатывались для выявления взаимосвязей, при этом заболеваемость представлена количеством случаев на 1000 человек, а загрязнённость – балльная оценка, полученная на основании концентраций, выраженных в $\text{мг}/\text{м}^3$.

В исследованиях были использованы показатели детской заболеваемости, так как дети, в отличие от взрослых, в меньшей мере подвержены влиянию производственной среды и, таким образом, находясь в районе проживания, являются более точным индикатором качества окружающей среды.

3. Результаты

Традиционным способом анализа и прогноза является вычисление линейной регрессии. Исходными данными при этом выступают три числовых ряда одинакового размера: x_1 – балльная оценка качества атмосферного воздуха для территории обслуживания поликлиники, усреднённая с учётом вклада нескольких оценок с учётом площади, x_2 – балльная оценка качества почвенного покрова, x_3 – показатель общей детской заболеваемости (случаи на 1000 человек за год). Фрагмент данных представлен в табл. 2.

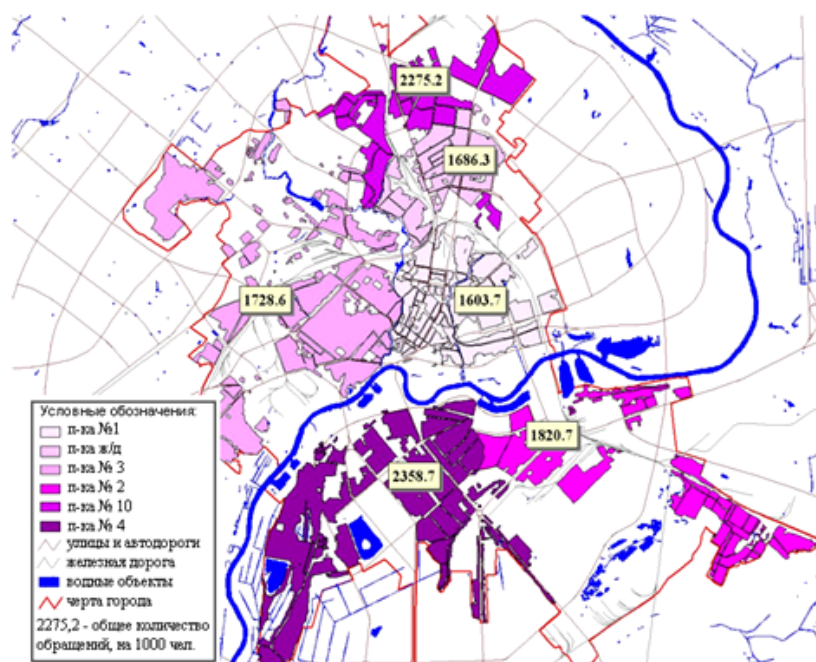


Рис. 2. Показатели общей заболеваемости для участков обслуживания детских поликлиник г. Могилёва, случаи на 1000 человек

Таблица 2

Пример части исходных данных для построения модели

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	3,14	4,12	4,41	3,69	3,6	3,9	2,34	3,87	4,23	4,74
x_2	4,87	4,21	2,03	4,29	3,38	4,3	3,13	2,03	3,56	3,51
x_3	1729	2281	1861	1823	1372	1935	1108	1229	1960	2098

Расчёт влияния качества атмосферного воздуха и почвенного покрова на уровень заболеваемости детей в среде MATLAB показал, что средняя квадратичная ошибка получаемой модели $x_3 = 0,373 - 0,098x_1 + 0,458x_2$ на обучающей и тестовой выборках составляют 2,02 и 2,08 соответственно, что не превышает значение 0,2 % от среднего значения заболеваемости.

Модель квадратичной регрессии $x_3 = -25,564 + 0,87x_1 + 0,314x_2 - 0,008x_1^2 + 0,004x_2^2 - 0,002x_1x_2$ имеет ошибки 1,94 и 1,99 соответственно.

Статистическая значимость разработанных моделей была подтверждена с использованием t -критерия Стьюдента и находится на уровне значимости ошибки 0,1 %.

Для повышения точности моделирования обратимся к нейронным сетям и теории нечётких множеств. В отличие от задач, для решения которых происходит разработка и программная реализация точного алгоритма, нейронные сети, подобно живым организмам, «приобретают знания» через обучение. Такая их особенность является решающим отличием от обычных алгоритмов, наделяя их рядом преимуществ. Процесс обучения при этом состоит не в накоплении и хранении данных или знаний, а в подборе регулирующих работу нейронов коэффициентов. При этом нейронные сети способны не только находить очевидные связи между входными и выходными данными, но и выявлять зависимости, о которых исследователь даже не подозревал. Кроме того, данный инструмент эффективно используется для прогнозирования временных рядов, распознавания образов, классификации, кластеризации и др. Дополнительным преимуществом искусственных нейронных сетей является возможность обрабатывать неполные, частично искажённые или «зашумленные» данные [13].

Когда вместо обычной функции активации нейронов используется функция принадлежности нечёткого числа, получаемую систему принято называть нейро-нечёткой. Такие решения являются универсальными аппроксиматорами и были использованы в описываемых исследованиях. С учётом количества числовых рядов была спроектирована нейронная сеть, состоящая из входного, выходного и полносвязного слоя нечётких правил.

Для обучения спроектированной нечёткой системы типа Сугено были использованы обучающая выборка из 120 записей и тестовая из 30. Для этого выполним следующие команды, по которым в рабочей области формируются обучающая выборка (*trn_s*) и тестовая выборка (*tst_s*) [14]:

```
data=load('c:\data.d');
illness_number=length(data);
test_index=[6:10:illness_number 7:10:illness_number];
tr_index=setdiff(1:illness_number, tst_index);
trn_s=ill(tr_index, [1 2 3]);
tst_s=ill(test_index, [1 2 3]);
```

После настройки ошибка обучения (средний квадрат разницы между входными и выходными сигналами) составляет 1,89. Ошибка на тестовой выборке — 1,87.

4. Обсуждение

Для установления зависимостей в системе «Окружающая среда — здоровье населения» были сформированы числовые ряды, отражающие уровень заболеваемости детского населения, степень загрязнения атмосферного воздуха и почвенного покрова для крупных городов и промышленных центров Республики Беларусь. Далее выполнена разработка моделей для обработки числовых данных.

Проведённые исследования и полученные результаты продемонстрировали преимущество нейро-нечёткой модели в точности описания и прогнозирования влияния уровня загрязнения атмосферного воздуха и почвенного покрова на показатели детской заболеваемости на 4–11 % по сравнению с линейной и квадратичной регрессией.

Полученные результаты могут быть использованы на государственном уровне для планирования и анализа градостроительных и природоохранных мероприятий, расчёта их эффективности и сроков окупаемости.

Список источников

1. Балабина Н. М. Роль загрязнения атмосферного воздуха в развитии железодефицитной анемии у взрослого городского населения // *Санитария и гигиена*. 2006. № 6. С. 12–14.
2. Мун С. А. Бенз(а)пирен в атмосферном воздухе и онкологическая заболеваемость в Кемерово // *Санитария и гигиена*. 2006. № 4. С. 28–29.
3. Рыбак В. А., Рябычина О. П. Аппаратное обеспечение системы для экологической диагностики загрязнения атмосферного воздуха // *Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника*. 2020. № 3. Т. 23. С. 93–99.
4. Чайка П. Нейронные сети: их применение, работа // *Научно-популярный журнал «Познавайка»*. 2018 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.poznavayka.org/nauka-i-tehnika/neuronnyie-seti-ih-primenenie-rabota> (дата обращения: 01.11.2024).
5. Режепа В. Простые слова о комплексе: что такое нейронные сети? // *Новостной портал о технологиях*. 2017 [Электронный ресурс].

- сурс]. URL: <https://gagadget.com/another/27575-prostyimi-slovami-o-slozhnom-cto-takoe-nejronnyie-seti> (дата обращения: 01.11.2024).
6. **Иванько А. Ф., Иванько М. А., Сизова Ю. А.** Нейронные сети: общие технологические характеристики // *Научное обозрение. Технические науки*. 2019. № 2. С. 17–23.
 7. **Дударов С. П.** История нейронных сетей // Портал об искусственном интеллекте. 2013 [Электронный ресурс]. URL: <https://neuronus.com/history/5-istoriya-nejronnykh-setej.html> (дата обращения: 01.11.2024).
 8. **Zadeh L.** Fuzzy sets // *Information and Control*. 1965. Vol. 8. Pp. 338–353.
 9. **Zadeh L.** The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning // *Information Sciences*. 1975. Vol. 8. Pp. 199–249.
 10. **Леоненков А. В.** Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 736 с.
 11. Методика расчета концентрации в атмосферном воздухе веществ, содержащихся в выбросах предприятий / ОНД–86: Госгидромет. Л.: Гидрометиздат, 1987. 92 с.
 12. **Науменко Т. Е., Рыбак В. А.** Законодательное обеспечение оценки риска воздействия на здоровье населения качества атмосферного воздуха в Республике Беларусь // *Анализ риска здоровью*. 2013. № 1. С. 30–35.
 13. **Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы : пер. с польск. М.: Горячая линия – Телеком, 2006. 452 с.
 14. **Рыбак В. А.** Методологические основы принятия решений для управления природоохранной деятельностью. Минск: РИВШ, 2009. 274 с.

References

1. **Balabina N. M.** The role of air pollution in the development of iron deficiency anemia in the adult urban population. *Sanitariya i gigiyena* [Sanitation and hygiene]. 2006. No 6. Pp. 12–14. (In Russ.)
2. **Moon S. A.** Benz(a)pyrene in the atmospheric air and cancer incidence in Kemerovo. *Sanitariya i gigiyena* [Sanitation and hygiene]. 2006. No 4. Pp. 28–29. (In Russ.)
3. **Rybak V. A., Ryabychina O. P.** Hardware of the system for environmental diagnostics of air pollution. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy Rossii. Radioelektronika* [News of higher educational institutions of Russia. Radio electronics]. 2020. No 3. Vol. 23. Pp. 93–99. (In Russ.)
4. **Chaika P.** Neural networks: their application, work. *Nauchno-populyarnyy zhurnal „Poznavayka“* [Scientific popular magazine „Poznavayka“]. 2018 [Electronic resource]. Available at: <http://www.poznavayka.org/nauka-i-tehnika/neyronnyie-seti-ih-primenenie-rabota> (accessed: 01.11.2024). (In Russ.)
5. **Rezhepa V.** Simple words about the complex: what are neural networks? *Novostnoy portal o tekhnologiyakh* [Technology news portal]. 2017 [Electronic resource]. Available at: <https://gadget.com/another/27575-prostyimi-slovami-o-slozhnom-chto-takoe-nejronnyie-seti> (accessed: 01.11.2024). (In Russ.)
6. **Ivanko A. F., Ivanko M. A., Sizova Yu. A.** Neural networks: general technological characteristics. *Nauchnoye obozreniye. Tekhnicheskiye nauki* [Scientific review. Technical Sciences]. 2019. No 2. Pp. 17–23. (In Russ.)
7. **Dudarov S. P.** History of neural networks. *Portal ob iskusstvennom intellekte* [Portal about artificial intelligence]. 2013 [Electronic resource]. Available at: <https://neuronus.com/history/5-istoriya-nejronnykh-setej.html> (accessed: 01.11.2024). (In Russ.)
8. **Zadeh L.** Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8. Pp. 338–353.

9. **Zadeh L.** The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences*. 1975. Vol. 8. Pp. 199–249.
10. **Leonenkov A. V.** *Nechetkoye modelirovaniye v srede MATLAB i fuzzyTECH* [Fuzzy modeling in MATLAB and fuzzyTECH environments]. SPb.: BHV-Petersburg, 2005. 736 p. (In Russ.)
11. *Metodika rascheta kontsentratsii v atmosfernom vozdukh veshchestv, sodержashchikhsya v vybrosakh predpriyatiy* [Methodology for calculating the concentration of substances in the atmospheric air contained in emissions from enterprises]. OND-86: Goshydromet. L.: Gidrometizdat, 1987. 92 p. (In Russ.)
12. **Naumenko T. E., Rybak V. A.** Legislative support for assessing the risk of impact on public health of atmospheric air quality in the Republic of Belarus. *Analiz riska zdorov'yu* [Health risk analysis]. 2013. No 1. Pp. 30–35. (In Russ.)
13. **Rutkovskaya D., Pilinsky M., Rutkovsky L.** *Neyronnyye seti, geneticheskiye algoritmy i nehotkiye sistemy : per. s pol'sk.* [Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems : transl. from Polish]. Moscow: Goryachaya Liniya – Telecom, 2006. 452 p. (In Russ.)
14. **Rybak V. A.** *Metodologicheskiye osnovy prinyatiya resheniy dlya upravleniya prirodookhrannoy deyatel'nost'yu* [Methodological foundations of decision-making for environmental management]. Minsk: RIVSH, 2009. 274 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author

Рыбак Виктор Александрович / Victor A. Rybak

к.т.н., доцент, проректор по учебной работе / Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Vice-Rector for Academic Affairs

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники / Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics 220013, Республика Беларусь, г. Минск, ул. П. Бровки, 6 / 6, P. Brovki Street, Minsk, 220013, Belarus

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 02.11.2024

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 04.11.2024

Принята к публикации / Accepted for publication 20.11.2024

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ

THEORY AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.

Выпуск 4 (53)

Bulletin of Syktuykar University.

Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 372.851; 378.4

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ
И СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Владимир Афанасьевич Тестов¹,

Роман Андреевич Попков²

¹Вологодский государственный университет, vladafan@inbox.ru

²Университет ИТМО, r-popkov@yandex.ru

Аннотация. В статье показывается, что цифровая трансформация общества и образования связана с новым этапом математизации знаний и на современном этапе изменился и стиль математического мышления, и математическая парадигма. В соответствии с переменами необходимо менять как содержание математических курсов, так и методы их преподавания, отдавая предпочтение исследовательскому обучению и применению систем компьютерной алгебры. В настоящее время оптимальным выбором является система Sage. Особенности этой системы могут стать основой для анализа ведущих алгебраических идей, включая взаимодействие между алгеброй и геометрией. Это позволяет продемонстрировать силу достижений математики и значимость компьютерной алгебры. Важную роль в контексте обеспечения преемственности между программами средней школы и

вузов и исследовательским обучением могут выполнять многочлены и векторы. Приводятся конкретные примеры использования системы Sage в теме «Векторные пространства» при решении различных исследовательских задач в вузовских математических курсах, обсуждаются некоторые «подводные камни».

Ключевые слова: математизация знаний, математическое моделирование, исследовательское обучение, компьютерные эксперименты

Для цитирования: Тестов В. А., Попков Р. А. Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Вып. 4 (53). С. 52–68. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52

Article

INVESTIGATIVE TRAINING IN MATHEMATICS AND COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS

Vladimir A. Testov¹, Roman A. Popkov²

¹Vologda State University, vladafan@inbox.ru

²ITMO University, r-popkov@yandex.ru

Abstract. The article shows that the digital transformation of society and education is associated with a new stage of mathematization of knowledge and at the present stage both the style of mathematical thinking and the mathematical paradigm have changed. In accordance with the changes, it is necessary to change both the content of mathematical courses and the methods of teaching them, giving preference to inquiry-based learning and the use of computer algebra systems. The current solution is the Sage system. Features of this system can serve to analyze leading algebraic ideas, including the interaction between algebra and geometry. This allows us to advance the achievements of mathematics and the originality of computer algebra. Polynomials and vectors can play an important role in the context of ensuring continuity between secondary school and university programs and research teaching. Specific examples of using the Sage system in the topic "Vector Spaces" are given when solving various research problems in university mathematics courses, and some pitfalls are discussed.

Keywords: mathematization of knowledge, mathematical modeling, exploratory training, computer experiments

For citation: Testov V. A., Popkov R. A Investigative training in mathematics and computer algebra systems. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 52–68. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52

1. Введение

Процесс цифровизации современного общества возник не только с появлением новых компьютерных технологий, но и в связи с началом нового этапа математизации знаний, с возникновением таких математизированных областей знаний, как искусственный интеллект, большие данные, нейросети и т. д. Информатизация общества стремительно ускоряется, происходит «революция искусственного интеллекта», по своему масштабу сопоставимая с предыдущими информационными революциями [1]. Для перехода к цифровизации потребовалось достижение математикой некоторого нового, более высокого уровня развития. Все это свидетельствует о необходимости рассматривать математизацию знаний как фундамент процесса цифровизации [2].

Необходимо заметить, что на протяжении всей истории развития математики её основные результаты были получены сначала с помощью экспериментов и индуктивных рассуждений. Ускорение процесса математизации знаний произошло в XVII веке в результате решения с помощью экспериментов ряда прикладных задач Кеплером, Кавальери и другими учеными. Значительный вклад в этот процесс внесли Г. Лейбниц и И. Ньютон, но и они при доказательствах тоже опирались на индуктивные рассуждения.

С конца XIX века в математике преобладающим стал теоретико-множественный подход, который позволил значительно повысить строгость математических доказательств, опираясь на теорию множеств и аксиоматический метод. Идеи новой аксиоматической парадигмы в математике были связаны, прежде всего, с развитием математической логики, абстрактной алгебры, топологии. Наглядным примером использования этих идей стал многотомный труд группы французских математиков под псевдонимом Н. Бурбаки. Большой вклад в становление этой парадигмы в математике внёс А. Н. Колмогоров, который построил

основы аксиоматической теории вероятностей. С этого времени математика стала образцом применения логики и точных понятий в научных исследованиях.

Строгая логическая структура математики с середины XX века начала преобладать и при построении школьных и вузовских математических курсов. Такие курсы приобрели в основном теоретический характер, а авторы пособий и учебников по математике стремились всё логически обосновать и доказать. Однако во многих случаях они были вынуждены заменять строгую логику доказательств некими компромиссами.

Начиная с 60-70-х годов XX века идеи аксиоматического построения математики стали уступать место другим направлениям, которые оказались ближе к практике и экспериментам. Ряд крупных математиков, в частности В. И. Арнольд, выступили с критикой принципов аксиоматического мышления. По мнению М. Клайна, «математика утратила определённую, критерии абсолютной истинности и неизменности» [3].

В наше время различные направления в математике, в частности вероятностные методы, стали широко применяться не только в физике, но и во многих других науках. Математика находит все большее применение не только в традиционно близких ей науках, но и таких, как социология, психология, история и др. В научный аппарат многих областей знаний вошли такие математические понятия, как алгоритм, модель, отношение, изоморфизм и др. Характерной чертой математизации становится взаимодействие различных её направлений, в том числе экспериментальных и теоретических методов, жёсткого и мягкого моделирования и т. д. Это взаимодействие создаёт синергетический эффект, который способствует выходу математических исследований на новый уровень [4].

С появлением программных средств для обработки математических данных существенно увеличились возможности проведения экспериментов с объектами математических исследований, вычислительными экспериментами, заменяющими реальные натурные эксперименты. Сравнение возросшей роли математики и роли компьютера привел В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счёт развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз...» [5].

Использование систем компьютерной математики оказало заметное влияние на подходы к математическому мышлению и на всю математическую парадигму. Все чаще обсуждается необходимость внедрения

методов экспериментальной математики не только в научные исследования, но и в образовательный процесс. Эти методы рассматриваются как ключ к успешной реализации исследовательского обучения как в школьных, так и в университетских математических курсах.

Впервые термин «экспериментальная математика» в современном понимании, по-видимому, использовал академик Н. Н. Красовский. Однако широкое распространение в научном мире данный термин получил лишь в последнее десятилетие XX века. С этим подходом связаны надежды на более глубокое вовлечение как студентов, так и школьников в исследовательскую деятельность и развитие их аналитических способностей. В результате актуальность внедрения методов экспериментальной математики в учебный процесс становится все более очевидной, что открывает новые горизонты для повышения эффективности обучения и подготовки будущих специалистов.

Тем не менее, мышление преобладающей части педагогов и авторов учебников все же остаётся в пределах аксиоматической парадигмы. По-прежнему наблюдается стремление все обосновать и доказать, в то время как методы исследовательского обучения получают недостаточное применение. Содержание математических курсов остаётся верным традициям и не отражает современных реалий, связанных с появлением новых компьютерных технологий. В настоящее время в математике наиболее яркими примерами исследований, соответствующими цифровой эпохе, являются математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы.

В современном обществе становится всё более очевидным, что учащиеся в школах и вузах должны быть освобождены от необходимости вручную выполнять сложные символьные преобразования и запоминать обширные массивы информации. Образование должно сосредоточиться на развитии навыков творческого мышления, а не на овладении рутинными навыками.

2. Материалы и методы

Как показывает анализ литературы, многие учителя и преподаватели вузов предприняли шаги по обновлению методов и содержания обучения математике в соответствии с новой парадигмой, стремясь усилить экспериментальную составляющую и использовать с этой целью современные цифровые технологии. Подавляющее большинство из этих инициатив относилось к курсу геометрии с использованием си-

стем GeoGebra, 1С: Математический конструктор и др., причём как для школьников, так и для студентов.

Однако основные математические курсы (алгебры, математического анализа) пытаются перестроить лишь отдельные энтузиасты. Одним из таких энтузиастов был известный петербургский алгебраист Н. А. Вавилов, работавший в Санкт-Петербургском и ряде зарубежных университетов. В одной из своих последних работ [6] он вместе с соавторами поделился опытом чтения нового курса «Математика и компьютер».

Анализ программ вузовских классических математических дисциплин для технических, педагогических и экономических направлений подготовки и применяемых методик позволяет увидеть значительные недостатки. Во-первых, это проявляется в консерватизме как при выборе содержания, так и в способах его представления. Основное содержание этих дисциплин не обновлялось во многих вузах более полувека. Такая застарелость проистекает из того, что последние вузовские стандарты предполагают, что содержание и наименование курсов определяются самими вузами, то есть кафедрами. А многие преподаватели математических кафедр не стремятся к обновлению своих курсов. Во-вторых, студенты вынуждены вручную решать, например, системы линейных уравнений с помощью метода Крамера, теряют много времени на вычисление интегралов, на решение дифференциальных уравнений, хотя, используя компьютер, все это можно сделать намного быстрее. Студентам зачастую предлагается большое количество бессмысленных вычислительно-синтаксических задач, которые не представляют собой никаких значимых идей.

Такой консерватизм видимо объясняется тем, что значительное число учителей и преподавателей вузов выступают против использования компьютера при изучении математики, полагая, что простое нажатие кнопок затруднит понимание материала. Однако совершенно ясно, что в своей будущей профессиональной деятельности современные студенты не будут вручную вычислять интегралы или искать точные решения уравнений с частными производными.

3. Результаты

Теоретический анализ и выводы из практики работы со студентами показывают, что задачи, использующие компьютерную алгебру, должны быть нестандартными и носить исследовательский характер. Для усвоения теории важно вручную решить несколько упражнений, одна-

ко это не должно стать регулярной практикой. Основное применение компьютерных технологий в математике должно заключаться в том, чтобы акцентировать внимание на их роли в выполнении стандартных вычислений, которые при ручном режиме требуют слишком много времени. Кроме того, использование таких технологий должно углубить понимание математической природы изучаемого предмета. Алгебраические задачи хорошо подходят для применения компьютеров в массовом образовании, так как в курсах алгебры уже накоплен опыт использования систем формальных вычислений. Более того, именно алгебра позволяет компьютерам проводить огромные вычисления с бесконечной точностью.

Разумеется, встаёт вопрос, какую систему компьютерной алгебры всё же использовать. Чаще всего в качестве таких систем рассматривают Maple и Mathematica, однако их стоимость может стать препятствием для их лицензионного использования в образовательных целях. В настоящее время представляется, что оптимальным выбором является система SageMath (или просто Sage). Её ключевое преимущество состоит в том, что она доступна для бесплатного использования и основана на популярном ныне языке Python.

Характерные особенности системы Sage могут стать основой для анализа ведущих алгебраических идей, включая взаимодействие между алгеброй и геометрией, которые можно продемонстрировать при решении систем полиномиальных уравнений. Здесь естественным образом возникают понятия базиса Грёбнера, классическим методом нахождения которого является алгоритм Бухбергера и некоторые его модификации. Это позволяет продемонстрировать силу достижений математики и значимость компьютерной алгебры. Важную роль в этом контексте могут выполнять многочлены, которые помогают обеспечить преемственность между учебными программами средней школы и высших учебных заведений. Многочлены способны стать фундаментом для курса с использованием компьютерных технологий, позволяя изучать нелинейную алгебру как «конкретную алгебраическую геометрию» [7].

Необходимо подчеркнуть, что внедрение систем компьютерной алгебры (СКА) в курс математики не должно сводить его к изучению программирования или численных методов. Основное внимание следует уделять алгоритмическим задачам и точным расчётам. Компьютерные эксперименты должны служить поводом для обсуждения значительных

и глубоких концепций. В математическом образовании крайне важно в одном курсе соединить как вычисления, так и теоретические идеи.

Одной из проблем при восприятии курса является появление теорем как «откровений», которым потом даются доказательства. Однако взгляд на математику как на экспериментальную науку позволяет понять теоремы, прежде всего, как экспериментальные факты. Мы не хотим сказать, что эксперимент должен заменить доказательство, но только лишь то, что СКА позволяют самостоятельно получить и осмыслить то, что впоследствии будет строго доказываться. Такие эксперименты позволяют наполнить семинарские задачи и обсуждением важных идей, и знакомством со СКА, и рассмотреть примеры, которые при ином подходе превращаются в кучу громоздких вычислений.

Приведём примеры из раздела «Векторные пространства», с которым студенты инженерных специальностей и педагогики-математики обычно знакомятся в рамках алгебры на первом курсе. Мы будем работать обычно с пространством \mathbb{Q}^n , так как в силу известной теоремы любое конечномерное векторное пространство над полем \mathbb{Q} изоморфно \mathbb{Q}^n . Выбор поля \mathbb{Q} вместо более привычного \mathbb{R} обусловлен тем, что в Sage именно поле рациональных чисел относится к точным полям (внутреннее понятие для структур данных Sage) и потому позволяет не заботиться о погрешностях и точности вычислений. Кроме того, мы сознательно рассматриваем случай $n > 3$, который уже не соответствует человеческой интуиции о геометрии подпространств.

```
{sage:} W = QQ^5 #W - векторное пространство Q^5
{sage:} U = W.span([(1,2,3,1,1), (1,0,1,-2,-2),
(2,0,1,-1,0), (0,1,1,0,0)])
{sage:} V = W.span([(1,2,0,0,2), (0,1,-2,3,-3),
(-1,2,1,2,0), (1,1,-2,0,0)])
# Подпространства U и V заданы как линейные оболочки
# Найдём размерности подпространств U и V
{sage:} U.dimension(), V.dimension()
(4, 4)
```

То есть порождены подпространства, каждое размерности 4. Посмотрим, что нам выдаст система, если мы просто спросим, что из себя представляют объекты U и V .

```
{sage:} U
Vector space of degree 5 and dimension 4 over Rational Field
```



```

Basis matrix:
[ 1  0  0  0  1]
[ 0  1  0  0  1]
[ 0  0  1  0 -1]
[ 0  0  0  1  1]
{sage:} V
Vector space of degree 5 and dimension 4 over Rational Field
Basis matrix:
[  1  0  0  0  6/13]
[  0  1  0  0 10/13]
[  0  0  1  0  8/13]
[  0  0  0  1 -11/13]

```

Видим, что, помимо полной информации о подпространстве, выведен ещё и один из базисов. Здесь уместно задать студентам вопрос, на что похожи эти векторы, если составить из них матрицу? Sage выдаёт базис, с её точки зрения, наиболее простого вида — соответствующий виду расширенной матрицы после прямого и обратного ходов Гаусса при решении системы линейных уравнений.

Узнаем размерности суммы и пересечения подпространств U и V .

```

{sage:} (U + V).dimension()
5
# То есть  $U + V = \mathbb{Q}^5$ 
{sage:} (V.intersection(W)).dimension()
3
# размерности пересечения равна 3

```

Мы можем узнать и больше о подпространстве $U \cap V$.

```

{sage:} (U.intersection(V))
Vector space of degree 5 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[  1  0  0 -7/24 17/24]
[  0  1  0 -1/8  7/8]
[  0  0  1  7/8 -1/8]

```

Ряд подобных экспериментов (причём можно рассмотреть и другие точные поля, например конечные) позволяют студентам сформулировать гипотезу, что $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$, которая потом уже может быть доказана.

Для проверки понимания теории можно спросить студентов, является ли пересечение подпространств подпространством каждого из изначальных подпространств. Если они затрудняются с ответом, то пусть зададут этот вопрос Sage.

```
{sage:} (U.intersection(V)).is_subspace(V)
#Является ли пространство подпространством другого?
True
{sage:} U.is_subspace(V)
False
```

Традиционные трудности вызывают фактор-структуры (в частности, фактор-пространства) и связанные с ними теоремы. Увидим, что выдаёт Sage, если попросить её определить размерности $(U + V)/U$ и $V/(U \cap V)$.

```
# (A).quotient(B) - факторпространство A/B
{sage:} ((U + V).quotient(V)).dimension()
1
{sage:} (V.quotient(U.intersection(V))).dimension()
1
```

Несколько подобных вычислений если и не помогут сформулировать, то облегчат восприятие теоремы Нётер об изоморфизме: если $U, V \leq W$, то $(U + V)/U \simeq V/(U \cap V)$.

Часто подпространства возникают в связи с рассмотрением ядер и образов гомоморфизмов, которые в случае конечномерных пространств задаются в привычном для студентов матричном виде.

```
{sage:} A = matrix(QQ, 3, 5,
[2, 2, -1, 2, -1,
2, 1, 1, 2, -1/2,
2, -2, -1, 2, -1/2])
# матрица 3 на 5 с рациональными элементами
# задаёт гомоморфизм из  $\mathbb{Q}^5$  в  $\mathbb{Q}^3$ 
{sage:} A.kernel() # найдём ядро гомоморфизма
Vector space of degree 3 and dimension 0 over Rational Field
Basis matrix:
[]
```

Видно, что система выдала тривиальное ядро. Однако если вручную просто решить систему уравнений, то ядро получится другим. В чём проблема? Подсказка содержится в выданном Sage ответе: ядро — подпространство в \mathbb{Q}^3 , однако мы понимаем, что оно должно быть подпространством в \mathbb{Q}^5 . Здесь можно попросить студентов исследовать справочную систему Sage и найти объяснение: по умолчанию ищется левое ядро (`left_kernel`, `kernel`). Нам же надо найти правое.

```
{sage:} A.right_kernel() # правое ядро
Vector space of degree 5 and dimension 2 over Rational Field
Basis matrix:
[ 1  0  0 -1  0]
[ 0  1 -3/2 9/4  8]
```

С аналогичной проблемой мы столкнёмся, если попробуем найти образ гомоморфизма.

```
{sage:} A.image()
Vector space of degree 5 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[ 1  0  0  1 -9/32]
[ 0  1  0  0 -1/8]
[ 0  0  1  0  3/16]
```

Ясно, что образ не может быть подпространством \mathbb{Q}^5 , так как должен находиться в \mathbb{Q}^3 . Дело в том, что Sage по умолчанию находит образ как линейную оболочку строк матрицы гомоморфизма. Решение проблемы должно быть найдено студентами без труда — транспонирование матрицы.

```
{sage:} (A.transpose()).image()
Vector space of degree 3 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
# образом является всё пространство  $\mathbb{Q}^3$ .
```

Ряд аналогичных экспериментов позволяет сформулировать теорему о сумме размерностей ядра и образа гомоморфизма $\mathcal{A}: U \rightarrow V$: $\dim \ker \mathcal{A} + \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \dim U$.

Заметим, что в рамках Sage возможны разные подходы к одной задаче. Так, можно изначально задать подпространство как линейную оболочку столбцов матрицы.

```
{sage:} A.column_space()
Vector space of degree 3 and dimension 3 over Rational Field
Basis matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

Видно, что результат совпадает с предыдущим. Так как $\ker \mathcal{A} \leq U$, то, естественно, возникает вопрос о фактор-пространстве $U/\ker \mathcal{A}$. Зададим его Sage.

```
{sage:} (QQ^5).quotient(A.right_kernel())
Vector space quotient V/W of dimension 3
over Rational Field where
```

Подобные результаты приводят к формулировке теоремы: $U/\ker \mathcal{A} \simeq \text{im } \mathcal{A}$. Таким образом, ряд фундаментальных теорем возникает как результат экспериментов, причём не численных, а точных.

Возможности Sage позволяют рассмотреть и менее традиционные задачи, например, о пространствах над конечными полями. Например, найдём число k -мерных подпространств n -мерного пространства над полем \mathbb{F}_q , $k \leq n$. Пусть $q = 8$, $n = 5$.

```
{sage:} V = VectorSpace(GF(7), 5)
{sage:} V0 = V.subspaces(0); list(V0)
# выводим все подпространства V размерности 0
[Vector space of degree 5 and dimension 0 over Finite Field
of size 7
Basis matrix:
[]]
```

Если $k > 0$, то список из подпространств получается уже достаточно длинным, приведём лишь начало ответа при $k = 1$.

```
{sage:} V1 = list(V.subspaces(0)); V1
# выводим все подпространства V размерности 1
[Vector space of degree 5 and dimension 1 over Finite Field
of size 7
Basis matrix:
[1 0 0 0 0],
Vector space of degree 5 and dimension 1 over Finite Field
of size 7
Basis matrix:
[1 0 0 0 1]...
```

Однако нам и не нужны элементы списка, нужна лишь его длина.

```
{sage:} V0 = list(V.subspaces(0)); len(V0)
1
{sage:} V1 = list(V.subspaces(1)); len(V1)
2801
{sage:} V2 = list(V.subspaces(2)); len(V2)
140050
{sage:} V3 = list(V.subspaces(3)); len(V3)
140050
{sage:} V4 = list(V.subspaces(4)); len(V4)
2801
{sage:} V5 = list(V.subspaces(5)); len(V5)
1
```

Данные результаты хотя и не позволяют определить нужную формулу, однако показывают, что она должна быть достаточно симметричной. Аналогичная симметрия встречается, например, в биномиальных коэффициентах. Здесь ответ студенты должны получить из соображений, использующих как алгебру, так и комбинаторику, а полученные результаты позволяют проверить его правильность. Ответом является *q-биномиальный коэффициент*.

В качестве экспериментальной задачи студентам можно предложить, например, такую, ответ в которой сразу далеко не очевиден:

В пространстве $\mathbb{R}[x]_8$ заданы два подпространства

$$V_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_8 \mid f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0\},$$

$$V_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_8 \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = f'''(-1) = f^{IV}(-1) = 0\}.$$

Нужно найти базисы суммы и пересечения этих подпространств. Благодаря изоморфизму $\mathbb{R}[x]_8 \simeq \mathbb{R}^9$ можно перейти к подпространствам в \mathbb{R}^9 заданными системами уравнений. После этого решение становится идейно простым, а вычисления перепоручаются СКА. Разумеется, после этого стоит обсудить и более концептуальное решение без вычислений, основанное на том, что кратные корни — это корни производных. Приведём начало СКА-решения. При этом мы стремимся не к оптимальности кода, а к его понятности, и экономим своё время, а не компьютерное.

```
{sage:} var('x, a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8')
{sage:} P = a0 + a1*x + a2*x^2 + a3*x^3 + a4*x^4 + a5*x^5 +
a6*x^6 + a7*x^7 + a8*x^8
# Произвольный многочлен 8-й степени
{sage:} l0 = P.subs(x=1), l0 # P(1)
a0 + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + a8
{sage:} l1 = P.diff(x).subs(x=1); l1 # P'(1)
a1 + 2*a2 + 3*a3 + 4*a4 + 5*a5 + 6*a6 + 7*a7 + 8*a8
{sage:} l2 = P.diff(x).diff(x).subs(x=1); l2 # P''(1)
2*a2 + 6*a3 + 12*a4 + 20*a5 + 30*a6 + 42*a7 + 56*a8
{sage:} l3 = P.diff(x).diff(x).diff(x).subs(x=1); l3 # P'''(1)
6*a3 + 24*a4 + 60*a5 + 120*a6 + 210*a7 + 336*a8
{sage:} eq = [l0 == 0, l1 == 0, l2 == 0, l3 == 0]; eq
[a0 + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + a8 == 0,
 a1 + 2*a2 + 3*a3 + 4*a4 + 5*a5 + 6*a6 + 7*a7 + 8*a8 == 0,
 2*a2 + 6*a3 + 12*a4 + 20*a5 + 30*a6 + 42*a7 + 56*a8 == 0,
 6*a3 + 24*a4 + 60*a5 + 120*a6 + 210*a7 + 336*a8 == 0]
{sage:} solve(eq, a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8)
[[a0 == 35*r1 + 20*r2 + 10*r3 + 4*r4 + r5,
 a1 == -120*r1 - 70*r2 - 36*r3 - 15*r4 - 4*r5,
 a2 == 140*r1 + 84*r2 + 45*r3 + 20*r4 + 6*r5,
 a3 == -56*r1 - 35*r2 - 20*r3 - 10*r4 - 4*r5,
 a4 == r5, a5 == r4, a6 == r3, a7 == r2, a8 == r1]]
```

Отсюда видно, что $\dim V_1 = 5$. Аналогично можно рассмотреть V_2 , перейти к ФСР каждой из систем, найти сумму и пересечение уже подпространств в \mathbb{R}^9 . Основной содержательный этап этой работы — возвращение в $\mathbb{R}[x]_8$ и интерпретация результатов для многочленов. Понятно, что аналогичные задачи можно придумать для пространств разной природы над разными полями.

4. Заключение

В заключение отметим, что процесс цифровой трансформации в науке и образовании, основанный на достижениях математики, способствует совершенствованию и человеческого мышления. Но в большинстве случаев уровень математической подготовки и особенно её фундаментальность не соответствует современным требованиям. Все более очевидной становится необходимость улучшения математической подготовки в школах и вузах, а также внедрения систем компьютерной алгебры в учебные курсы математики.

Список источников

1. Семёнов А. Л. О продолжении российского математического образования в XXI веке // *Вестник Московского университета. Педагогическое образование*. 2023. Т. 20. № 2. С. 7–45.
2. Тестов В. А. Цифровизация науки и образования как результат синергии процессов информатизации и математизации // *Педагогическая информатика*. 2024. № 2. С. 111–120.
3. Клайн М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир; 1984. 434 с.
4. Перминов Е. А., Тестов В. А. Математизация профильных дисциплин как основа фундаментализации ИТ-подготовки в вузах // *Образование и наука*. 2024. Т. 26. № 7. С. 12–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-7-12-43.
5. Садовничий В. А. Большие данные в современном мире. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.
6. Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. Небеса падают: Математика для нематематиков // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 2023. Т. 511. № 1. С. 144–160.
7. Попков Р. А., Москаленко М. А., Табиева А. В., Матвеева М. В. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования // *Современное профессиональное образование*. 2024. № 3. С. 50–53.

References

1. **Semenov A. L.** On the continuation of Russian mathematical education in the 21st century. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Pedagogicheskoye obrazovaniye* [Bulletin of Moscow University. Teacher education]. 2023. Vol. 20. No 2. Pp. 7–45. (In Russ.)
2. **Testov V. A.** Digitalization of science and education as a result of the synergy of the processes of informatization and mathematization. *Pedagogicheskaya informatika* [Pedagogical informatics]. 2024. No 2. Pp. 111–120. (In Russ.)
3. **Klein M.** *Matematika. Utrata opredelennosti* [Mathematics. Loss of certainty]. Moscow: Mir; 1984. 434 p. (In Russ.)
4. **Perminov E. A., Testov V. A.** Mathematization of specialized disciplines as the basis for the fundamentalization of IT training in universities *Obrazovaniye i nauka* [Education and Science]. 2024. Vol. 26. No 7. Pp. 12–43. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-7-12-43. (In Russ.)
5. **Sadovnichy V. A.** *Bol'shiye dannyye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. Moscow: Moscow State University named after. M. V. Lomonosov, 2017. 28 p. (In Russ.)
6. **Vavilov N. A., Khalin V. G., Yurkov A. V.** The skies are falling: Mathematics for non-mathematicians. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya* [Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes]. 2023. Vol. 511. No 1. Pp. 144–160. (In Russ.)
7. **Popkov R. A., Moskalenko M. A., Tabieva A. V., Matveeva M. V.** Algebra vs computer algebra in the context of mass mathematical education. *Sovremennoye professional'noye obrazovaniye* [Modern professional education]. 2024. No 3. Pp. 50–53. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Тестов Владимир Афанасьевич / Vladimir A. Testov

д.пед.н., профессор, профессор кафедры математики и информатики, /
Doctor of Sciences in Pedagogical, Professor, Professor of the Department
of Mathematics and Computer Science

Вологодский государственный университет / Vologda State University
160000, Россия, Вологодская область, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15 / 15,
Lenina st., Vologda, Vologda region, 160000, Russia

Попков Роман Андреевич / Roman A. Popkov
к.ф-м.н. доцент научно-образовательного центра математики /
Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor of
Mathematics Research and Education Center

Национальный исследовательский университет ИТМО / ITMO
University
197101, Россия, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49, лит. А. / 49,
bldg. A., Kronverksky pr., St. Petersburg, 197101, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.12.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 04.09.2024
Принята к публикации / Accepted for publication 06.09.2024

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

METHODICAL MATERIALS

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.

Выпуск 4 (53)

Bulletin of Syktyvkar University.

Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 517.9, 539.3

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_69

Автоматизированный анализ изображений микроскопии шунгитов

Владимир Александрович Устюгов¹,
Игорь Викторович Антонец¹,
Евгений Александрович Голубев²

¹Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, ustyugov@syktsu.ru

²Институт геологии ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, golubev@geo.komisc.ru

Аннотация. Работа посвящена вопросам автоматизированного анализа изображений высокоразрешающей просвечивающей электронной микроскопии образцов шунгита с применением технологии компьютерного зрения. Описана методика предварительной обработки изображений. Разработан алгоритм выделения структурных элементов шунгита на основе метода поиска по шаблону.

Ключевые слова: шунгит, электронная микроскопия, компьютерное зрение

Финансирование. Статья подготовлена в рамках государственного задания ФГБОУ ВО «СГУ имени Питирима Сорокина» от 17.01.2024 № 075-03-2024-162 по теме «Влияние структуры на статические и динамические электропроводящие свойства разупорядоченного углерода».

Для цитирования: Устюгов В. А., Антонец И. В., Голубев Е. А. Автоматизированный анализ изображений микроскопии шунгитов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Вып. 4 (53). С. 69–83. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_69

Article

AUTOMATED ANALYSIS OF SHUNGITE MICROSCOPY IMAGES

Vladimir A. Ustyugov, Igor V. Antonets, Evgeny A. Golubev

¹Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ustyugov@syktsu.ru

²Institute of Geology, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, golubev@geo.komisc.ru

Abstract. The paper is devoted to the issues of automated analysis of high-resolution transmission electron microscopy images of shungite samples using computer vision technology. The technique of image preprocessing is described. An algorithm for the selection of shungite structural elements based on the template search method is developed.

Keywords: shungite, electron microscopy, computer vision

Funding. The article was prepared within the framework of the state assignment of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education „SSU named after Pitirim Sorokin“ dated January 17, 2024 No 075-03-2024-162 on the topic „The influence of structure on the static and moving electrically conductive properties of a disordered formation“.

For citation: Ustyugov V. A., Antonets I. V., Golubev E. A. Automated analysis of shungite microscopy images. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 69–83. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_69

1. Введение

Шунгитовым называют углерод, который в различной форме проявлений и с различной концентрацией присутствует в горных породах Карелии в районе Онежского озера [1]. Вопрос о строгом описании его структуры является дискуссионным, что проявляется в существовании как минимум трех структурных моделей [2]. Ключевым методом для изучения строения разупорядоченных углеродных веществ является микроскопия высокого разрешения [3; 4]. Согласно данному методу, шунгитовый углерод состоит из графеновых слоев, размеры которых составляют первые нанометры, и их разнообразных агрегатов в виде стопок графеновых слоев, лент, многослойных фуллереноподобных глобул. Углерод шунгитов проявляет себя как слабо упорядоченный графит [5], аморфный углерод [6], фуллереноподобный углерод [7] и др. При этом даже современные методы изучения не позволяют построить однозначную картину распределения этих структурных единиц, оценить их отношения, найти преобладающий тип структуры.

2. Методы и материалы

Современные представления о структуре шунгитового углерода сформировались прежде всего по данным высокоразрешающей просвечивающей электронной микроскопии (ВРПЭМ, далее — ЭМ) [2; 8–10].

Основными наноструктурными элементами шунгитового углерода являются пачки графеновых слоев, ленты и многослойные фуллереноподобные глобулы.

Пачки представляют собой собранные в стопку графеновые слои со средним расстоянием между слоями около 0.350 нм, размеры их составляют первые нанометры. Слои чаще всего слегка изогнутые. На рис. 1а черной рамкой обведена характерная компактная пачка.

Лента представляет собой протяженный (до нескольких десятков нанометров) агрегат графеновых слоев толщиной в несколько слоев, многократно изогнутый и часто перевитый. Основным отличием пачек от лент мы считаем отношение длины к ширине этой наноструктуры. Для целей исследования мы вводим величину 3:1 как границу, отделяющую ленту (где это соотношение больше) от пачки (где это соотношение меньше или равно). На рис. 1а внутри белой рамки находится лента со слоями, изгибающимися практически под прямым углом.

Из-за сложной и незакономерной наноструктуры чаще всего доступно только ее качественное описание. На этом фоне перспективным пу-

тем оценки структурной упорядоченности и пористости является математическая обработка картин ЭМ. В частности, путем ручной обработки картин микроскопии, например, была обнаружена связь с проводимостью некоторых структурных характеристик шунгитового углерода [11–14]. Взаимосвязь электрических, проводящих и отражающих свойств шунгитов с их структурными характеристиками описаны авторами, использующими и другие математические модели [15–17]. Автоматизированная обработка картин ЭМ позволяет исключить субъективный момент из анализа и сделать результаты доступными и проверяемыми для других исследователей.

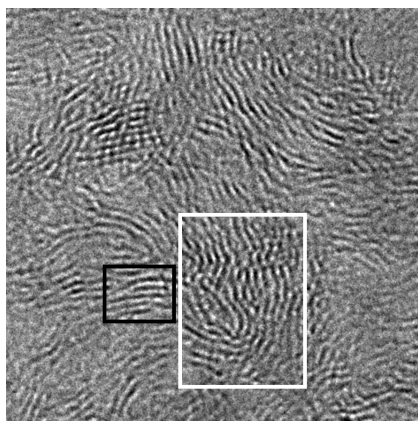


Рис. 1а. Исходное изображение карты шунгита

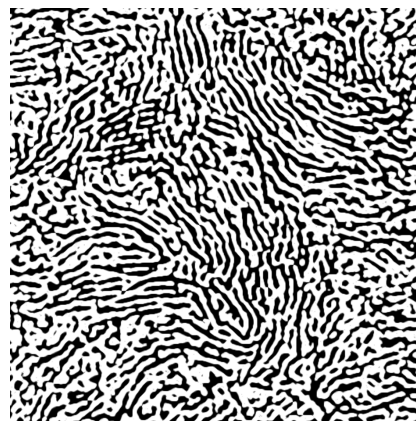


Рис. 1б. Карта шунгита после фильтрации

Целью настоящего исследования является цифровая обработка изображений ЭМ шунгитового углерода с целью выделить характерные структурные элементы. Для решения описанной задачи был разработан алгоритм с использованием технологии компьютерного зрения на базе языка Python, популярного инструмента для анализа данных (см., например, [18; 19]).

3. Применение метода компьютерного зрения для анализа изображений ВРПЭМ шунгита

3.1. Предварительная обработка изображения

Изображения шунгита, получаемые методом ЭМ (пример на рис. 1а) имеют малый уровень контраста и высокую степень зашумленности, что делает невозможным прямое применение алгоритмов анализа без предварительной обработки.

Для обработки была выбрана следующая последовательность процедур фильтрации:

1. Незначительное общее поднятие контраста изображения для улучшения работы последующих фильтров.
2. Медианный фильтр, предназначенный для подавления импульсных помех в сигнале, позволяющий эффективно удалить мелкий шум, за счёт чего происходит «слияние» в единые элементы имеющих на изображениях ЭМ полос.
3. Фильтр «Разница по Гауссу», представляющий собой алгоритм поиска краёв на изображении за счет нахождения разницы результатов двух гауссовых размываний; при обработке ЭМ позволяет повысить чёткость границ искомых элементов.
4. Фильтр Собеля, позволяющий дополнительно уточнить границы элементов и эффективно отделить от них пиксели, находящиеся между элементами и содержащие шумовую информацию. Эти пиксели в последующем удаляются в автоматическом режиме.

Обработка производилась с использованием свободного программного обеспечения Gimp 2, но её можно реализовать и в виде программного алгоритма с использованием библиотек для языка Python из пакета scikit-image или конвейерного редактора изображений ImageMagick. Выполнение указанных процедур позволяет радикально очистить изображение ЭМ шунгита от шума (рис. 1b).

3.2. Поиск структурных элементов шунгита на изображениях микроскопии

Задачу поиска объекта на изображении (по англ. Object detection) можно решать различными программными средствами. В рамках данного исследования был разработан алгоритм на основе компонента Template Matching (поиск по шаблону) библиотеки компьютерного зрения OpenCV для языка Python.

Функция Template Matching требует для работы два изображения — исходное, на котором производится поиск, и шаблона, который по размеру в пикселях не должен превышать исходное. Программный алгоритм библиотеки последовательно совмещает шаблон со всеми возможными участками исходного изображения, вычисляя специальную метрику для оценки сходства. Библиотека поддерживает шесть различных

метрик, из которых можно выбрать ту, которая позволяет получить наиболее точный результат для исследуемой карты шунгита. Так, для реализации алгоритма использовалась метрика следующего вида (в терминах библиотеки `TM_SQDIFF_NORMED`):

$$R(x, y) = \frac{\sum_{x', y'} (T(x', y') - I(x + x', y + y'))^2}{\sqrt{\sum_{x', y'} T(x', y')^2 \sum_{x', y'} I(x + x', y + y')^2}}, \quad (1)$$

где $T(x, y)$ — значения пикселей шаблонного изображения, $I(x, y)$ — пиксели исходного. Функция возвращает матрицу, в ячейках которой записаны значения метрики.

В дальнейшем, анализируя массив и находя ячейки со значением, близким к минимальному или максимальному (в зависимости от конкретной выбранной метрики), можно определить участки изображения, наиболее схожие с выбранным шаблоном.

Для улучшения точности работы алгоритм был разбит на две части. Перед непосредственным поиском пачек и лент на изображении определялись неконтрастные области без четко выраженной структуры с помощью специального шаблона с шумом.

Рассмотрим подробнее программную реализацию анализа поиска структурных элементов на изображениях ЭМ с фрагментами программного кода.

Перед работой с изображениями необходимо перевести их в монохромное цветовое пространство, в противном случае возникает необходимость работы с многомерными массивами. Эта процедура выполняется встроенными в `OpenCV` функциями:

```
src = cv2.imread("cart-test.jpg")
pattern = cv2.imread("noise-pattern.jpg")
src = cv2.cvtColor(src, cv2.COLOR_RGB2GRAY)
pattern = cv2.cvtColor(pattern, cv2.COLOR_RGB2GRAY)
```

Файл `cart-test.jpg` содержит исходную карту, файл `noise-pattern.jpg` — шаблон с шумом.

Задаем метод вычисления метрики и вызываем основную функцию для работы с шаблоном. Матрица `result` является программной реализацией матрицы из формулы (1). Функция `minMaxLoc` возвращает максимальное, минимальное значения в матрице и их позиции:

```
method = cv2.TM_SQDIFF_NORMED
result = cv2.matchTemplate(src2, pattern, method)
```

Исходная исследуемая карта и графическое отображение получаемой матрицы `result` показаны на рис. 2. Обратим внимание на то, что размер изображения на рис. 2b меньше, чем на рис. 2a, что связано с алгоритмом работы функции `matchTemplate`, при котором сравнение шаблона с фрагментами основного изображения может производиться только в пределах последнего. Отсюда следует, что размерность матрицы `result` меньше размера исходного изображения в пикселях на размер шаблона.

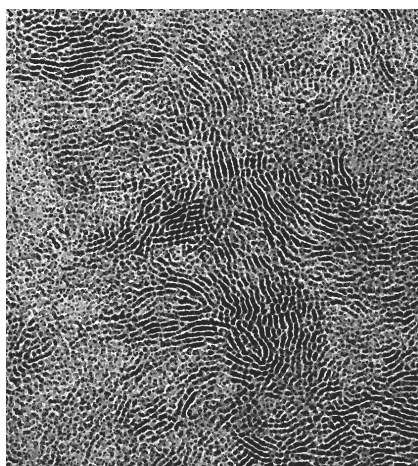
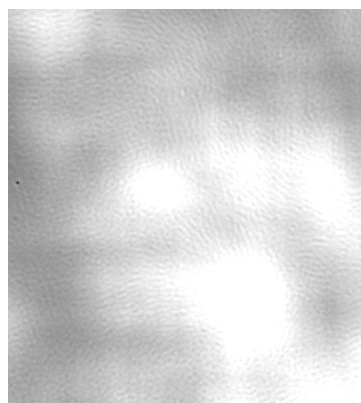


Рис. 2a. Исследуемая карта шунгита

Рис. 2b. Матрица `result`

Вследствие того что мы используем метрику `TM_SQDIFF_NORMED`, наибольшее сходство соответствует минимальным значениям ячеек матрицы, соответственно более темные области на рис. 2b соответствуют шумовым областям, более светлые — областям с выраженной полосовой структурой. Именно в последних имеет смысл искать структурные элементы.

Определение пачек и лент производилось аналогичным описанному выше методом с использованием метрики `TM_CCOEFF_NORMED`. Функция `matchTemplate` при использовании шаблона с полосами возвращает новый массив `result_map`. Задавая определенное пороговое значение `threshod`, из этого массива можно отобрать набор точек, которые предварительно являются искомыми, то есть соответствуют областям карты со структурными элементами:


```
match_loc = min_loc
(xCoords, yCoords) =
    np.where(result > threshold * result_map[match_loc])
```

Поскольку функция `matchTemplate` производит последовательный обход изображения, и в той области, которая близка по содержанию к шаблону, возникает множество точек матрицы `result_map` с близкими значениями. Для решения этой проблемы был адаптирован код функции `pop_max_suppression`¹, позволяющий из множества накладывающихся друг на друга и схожих с шаблоном областей выбирать одну, после чего она обводится прямоугольной рамкой для визуального контроля.

Последняя стадия фильтрации областей, соответствующих шаблону поиска, заключалась в отборе тех, которые лежат в пределах нешумовых регионов (светлые области на рис. 2b).

Итоговый набор отобранных областей, наложенных на исходную карту, изображен на рис. 3. На этом же рисунке в виде наложенного полупрозрачного слоя представлен результат поиска шумовых областей, отдельно изображенный на рис. 2b.

4. Заключение

Обнаруженным недостатком метода поиска по шаблону применительно к изображениям ЭМ является невысокая точность и негибкость. Для определения лент, ориентированных под углом, имеющих различную длину и ширину, необходимо модифицировать шаблон поиска (библиотека `OpenCV` имеет встроенную функцию для аффинных преобразований изображений, например вращений и растяжений) и использовать метод прямого перебора. При этом метод перебора, очевидно, не подходит для поиска искривленных лент. Вероятно, наиболее рациональным подходом, обеспечивающим высокую адаптивность к сложно структурированным изображениям, будет применение нейросетевой технологии.

Анализируя рис. 3, можно видеть, что разработанная программа позволяет обнаруживать четко определяемые пачки, а протяженные ленты разбивает на отдельные фрагменты, считая их пачками. Также описанный выше алгоритм позволяет удовлетворительно отделить сильно зашумленные области, непригодные для дальнейшего анализа.

¹Оригинал доступен по ссылке: <https://pyimagesearch.com/2015/02/16/faster-non-maximum-suppression-python/> (дата обращения: 31.10.2024).

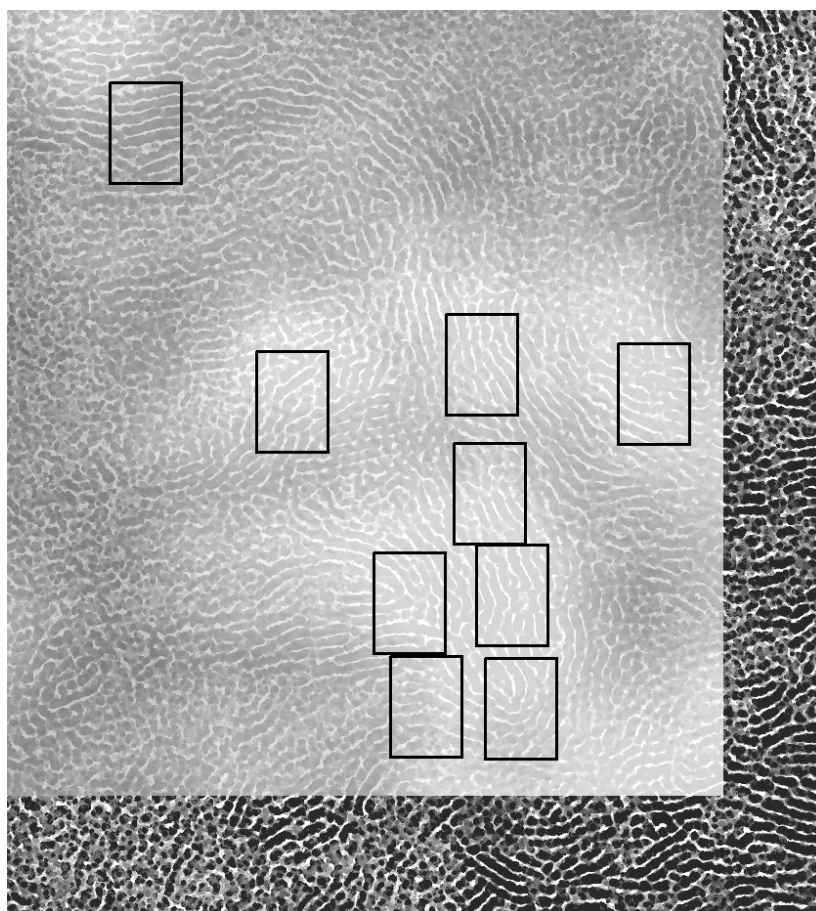


Рис. 3. Результат работы алгоритма

Данную часть программы можно применять как фильтр в дальнейших разработках более совершенных систем распознавания структурных элементов шунгита.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Melezhik V. A., Filippov M. M., Romashkin A. E. A giant palaeoproterozoic deposit of shungite in NW Russia: Genesis and practical applications // *Ore Geol. Rev.* 2004. Vol. 24. Pp. 135–154. DOI: 10.1016/j.oregeorev.2003.08.003.
2. Golubev Ye. A., Antonets I. V., Korolev R. I. et al. Characterization of nanostructure of naturally occurring

- disordered sp² carbon by impedance spectroscopy // *Materials Chemistry and Physics*. 2024. Vol. 317. P. 129181. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2024.129181.
3. **Harris P. J. F.** New perspectives on the structure of graphitic carbons // *Crit. Rev. Solid State Mater. Sci.* 2005. Vol. 30. Pp. 235–253. DOI: 10.1080/10408430500406265.
 4. **Toth P.** Nanostructure quantification of turbostratic carbon by HRTEM image analysis: State of the art, biases, sensitivity and best practices // *Carbon*. 2021. Vol. 178. Pp. 688–707. DOI: 10.1016/j.carbon.2021.03.043.
 5. **Kviecinska B.** Investigations of shungite // *Bull. Polish Acad. Sci. (Chem.)* 1968. Vol. 16. Pp. 61–65.
 6. **Buseck P. R., Huang B. J.** Conversion of carbonaceous material to graphite during metamorphism // *Geochem. Cosmochim. Acta*. 1985. Vol. 49. Pp. 2003–2016. DOI: 10.1016/0016-7037(85)90059-6.
 7. **Kovalevski V. V.** Structure of shungite carbon // *Russ. J. Inorg. Chem.* 1994. Vol. 39. Pp. 28–32.
 8. **Golubev Ye. A., Antonets I. V.** Electrophysical Properties and Structure of Natural Disordered sp² Carbon // *Nanomaterials*. 2022. Vol. 12 (21). P. 3797. DOI: 10.3390/nano12213797.
 9. **Kovalevski V. V., Rozhkova N. N., Zaidenberg A. Z., Yermolin A. P.** Fullerene-like structures in shungite and their physical properties // *Mol. Mater.* 1994. Vol. 4. Pp. 77–80.
 10. **Sheka E. F., Rozhkova N. N., Holderna-Natkaniec K., Natkaniec I.** Nanoscale reduced-graphene-oxide origin of shungite in light of neutron scattering // *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2014. Vol. 5. Pp. 659–672.
 11. **Antonets I. V., Golubev E. A., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.** Investigation of electrical conductivity of graphene-contained shungite using the high-resolution scanning electron microscopy // *Journal of Radio Electronics* 2021. No 3. DOI: 10.30898/1684-1719.2021.3.9.

12. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Ignatiev G. V. et al.** Influence of layers orientation of graphene stacks in shungite disordered carbon to its integral electrical conductivity // *J. Phys. Confer. Ser.* 2022. Vol. 2315. 012039. DOI: 10.1088/1742-6596/2315/1/012039.
13. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I.** Application of the trinary discretization method for the structural analysis of natural disordered sp² carbon // *Fullerenes Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 2024. Vol. 32. Issue 3. Pp. 246–253. DOI: 10.1080/1536383X.2023.2273416.
14. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I.** Evaluation of microstructure and conductivity of two-phase materials by the scanning spreading resistance microscopy (the case of shungite) // *Ultramicroscopy*. 2021. Vol. 222. P. 113212. DOI: 10.1016/j.ultramic.2021.113212.
15. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I. et al.** Estimation of local conductivity of disordered carbon in a natural carbon-mineral composite using a model of intragranular currents // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2022. Vol. 171. P. 110994. DOI: 10.1016/j.jpics.2022.110994.
16. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I.** The effect of structure on the conductivity of disordered carbon (the case of graphene-containing shungite) // *Fullerenes Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 2023. Vol. 31. Issue 10. Pp. 961–970. DOI: 10.1080/1536383X.2023.2226273.
17. **Golubev Y. A., Antonets I. V., Shcheglov V. I.** Static and dynamic conductivity of nanostructured carbonaceous shungite geomaterials // *Materials Chemistry and Physics*. 2019. Vol. 226. Pp. 195–203. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2019.01.033.
18. **Бабикова Н. Н., Котелина Н. О., Тентюков Ф. Н.** Анализ данных о лесных пожарах в Республике Коми с помощью Excel и Python. *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2023. Вып. 4 (49). С. 29–46. DOI: 10.34130/1992-2752_2023_4_29.

19. **Бабикова Н. Н.** Применение библиотеки NumPy для векторизации кода Python // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 1 (46). С. 14–29. DOI: 10.34130/1992-2752_2023_14.

References

1. **Melezhik V. A., Filippov M. M., Romashkin A. E.** A giant palaeoproterozoic deposit of shungite in NW Russia: Genesis and practical applications. *Ore Geol. Rev.* 2004. Vol. 24. Pp. 135–154. DOI: 10.1016/j.oregeorev.2003.08.003.
2. **Golubev Ye. A., Antonets I. V., Korolev R. I. et al.** Characterization of nanostructure of naturally occurring disordered sp² carbon by impedance spectroscopy. *Materials Chemistry and Physics.* 2024. Vol. 317. P. 129181. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2024.129181.
3. **Harris P. J. F.** New perspectives on the structure of graphitic carbons. *Crit. Rev. Solid State Mater. Sci.* 2005. Vol. 30. Pp. 235–253. DOI: 10.1080/10408430500406265.
4. **Toth P.** Nanostructure quantification of turbostratic carbon by HRTEM image analysis: State of the art, biases, sensitivity and best practices. *Carbon.* 2021. Vol. 178. Pp. 688–707. DOI: 10.1016/j.carbon.2021.03.043.
5. **Kviecinska B.** Investigations of shungite. *Bull. Polish Acad. Sci. (Chem.)* 1968. Vol. 16. Pp. 61–65.
6. **Buseck P. R., Huang B. J.** Conversion of carbonaceous material to graphite during metamorphism. *Geochem. Cosmochim. Acta.* 1985. Vol. 49. Pp. 2003–2016. DOI: 10.1016/0016-7037(85)90059-6.
7. **Kovalevski V. V.** Structure of shungite carbon. *Russ. J. Inorg. Chem.* 1994. Vol. 39. Pp. 28–32.
8. **Golubev Ye. A., Antonets I. V.** Electrophysical Properties and Structure of Natural Disordered sp² Carbon. *Nanomaterials.* 2022. Vol. 12 (21). P. 3797. DOI: 10.3390/nano12213797.

9. **Kovalevski V. V., Rozhkova N. N., Zaidenberg A. Z., Yermolin A. P.** Fullerene-like structures in shungite and their physical properties. *Mol. Mater.* 1994. Vol. 4. Pp. 77–80.
10. **Sheka E. F., Rozhkova N. N., Holderna-Natkaniec K., Natkaniec I.** Nanoscale reduced-graphene-oxide origin of shungite in light of neutron scattering. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2014. Vol. 5. Pp. 659–672.
11. **Antonets I. V., Golubev E. A., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.** Investigation of electrical conductivity of graphene-contained shungite using the high-resolution scanning electron microscopy. *Journal of Radio Electronics* 2021. No 3. DOI: 10.30898/1684-1719.2021.3.9.
12. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Ignatiev G. V. et al.** Influence of layers orientation of graphene stacks in shungite disordered carbon to its integral electrical conductivity. *J. Phys. Confer. Ser.* 2022. Vol. 2315. 012039. DOI: 10.1088/1742-6596/2315/1/012039.
13. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I.** Application of the trinary discretization method for the structural analysis of natural disordered sp² carbon. *Fullerenes Nanotubes and Carbon Nanostructures.* 2024. Vol. 32. Issue 3. Pp. 246–253. DOI: 10.1080/1536383X.2023.2273416.
14. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I.** Evaluation of microstructure and conductivity of two-phase materials by the scanning spreading resistance microscopy (the case of shungite). *Ultramicroscopy.* 2021. Vol. 222. P. 113212. DOI: 10.1016/j.ultramic.2021.113212.
15. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I. et al.** Estimation of local conductivity of disordered carbon in a natural carbon-mineral composite using a model of intragranular currents. *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 2022. Vol. 171. P. 110994. DOI: 10.1016/j.jpcs.2022.110994.
16. **Antonets I. V., Golubev Y. A., Shcheglov V. I.** The effect of structure on the conductivity of disordered carbon (the case of graphene-containing shungite). *Fullerenes Nanotubes and*

Carbon Nanostructures. 2023. Vol. 31. Issue 10. Pp. 961–970. DOI: 10.1080/1536383X.2023.2226273.

17. **Golubev Y. A., Antonets I. V., Shcheglov V. I.** Static and dynamic conductivity of nanostructured carbonaceous shungite geomaterials. *Materials Chemistry and Physics*. 2019. Vol. 226. Pp. 195–203. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2019.01.033.
18. **Babikova N. N., Kotelina N. O., Tentyukov F. N.** Analysis of data on forest fires in the Komi Republic using Excel and Python. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2023. No 4 (49). Pp. 29–46. DOI: 10.34130/1992-2752_2023_4_29. (In Russ.)
19. **Babikova N. N.** Using NumPy to vectorization of Python code. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2023. No 1 (46). Pp. 14–29. DOI: 10.34130/1992-2752_2023_1_14. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Устюгов Владимир Александрович / Vladimir A. Ustyugov

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Information Security Department

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Антонец Игорь Викторович / Igor V. Antonets

к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры радиофизики и электроники / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Radiophysics and Electronics Department

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Голубев Евгений Александрович / Evgeny A. Golubev

д.г.-м.н., ведущий научный сотрудник / Doctor of Geology and Mineralogy, leading researcher

Институт геологии ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Geology, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS

167982, Россия, г. Сыктывкар, ул. Первомайская, 54 / 4, Pervomayskaya str., Syktyvkar, 167982, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 01.11.2024

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 27.12.2024

Принята к публикации / Accepted for publication 06.12.2024

НАСТАВНИК-УЧЕНИК

TUTOR-FOLLOWER

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.

Выпуск 4 (53)

Bulletin of Syktyvkar University.

Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 4 (53)

Научная статья

УДК 517.9

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

**О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Андрей Васильевич Ермоленко,

Яков Алексеевич Поздеев

Сыктывкарский государственный университет

имени Питирима Сорокина, ea74@list.ru

Аннотация.

Решение уравнений в частных производных для произвольной области является нетривиальной задачей. В статье приводится алгоритм численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Приводятся примеры численных расчетов, оценивается погрешность полученных результатов.

Ключевые слова: численное решение, уравнение Пуассона, уравнение Лапласа, задача Дирихле

Для цитирования: Ермоленко А. В., Поздеев Я. А. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 4 (53). С. 84–94. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

Article

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN AN ARBITRARY DOMAIN

Andrey V. Yermolenko, Yakov A. Pozdeev

Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

Abstract. Solving partial differential equations for an arbitrary domain is a non-trivial task. The article presents an algorithm for numerically solving the Dirichlet problem for the Poisson's equation. Examples of numerical calculations are given, and the error of the results obtained is estimated.

Keywords: numerical solution, Poisson's equation, the Laplace equation, the Dirichlet problem

For citation: Yermolenko A. V., Pozdeev Ya. A. On the numerical solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation in an arbitrary domain. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 4 (53), pp. 84–94. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

1. Введение

В математическом моделировании уравнения эллиптического типа используются для определения стационарных состояний различной физической природы. Примером таких уравнений являются уравнения Лапласа и Пуассона [1]. Существуют как аналитические методы решения названных уравнений, например метод разделения переменных, использование функции источника (функции Грина) [1], так и численные методы, например метод конечных элементов, метод Либмана [2; 3]. Решения строят, как правило, для простейших областей, например прямоугольной или круглой.

Важным является оператор Лапласа и в механике пластин и оболочек, так как на его основе определяется бигармонический оператор, на основе которого формулируются уравнения равновесия пластин [2; 4]. При этом востребовано как быстроедействие и точность методов, так и применимость к произвольным областям.

Все сказанное обуславливает востребованность усовершенствования методов решения уравнения Пуассона.

В численных методах для решения систем уравнений с большим числом узлов оказываются удобны итерационные методы – одним из наиболее простых и одновременно эффективных является процесс усреднения Либмана.

Метод Либмана основан на идее последовательного улучшения приближённого решения. На каждом шаге итерации вычисляется новое значение для каждой переменной на основе её предыдущего значения и текущих значений окружающих переменных.

Простота метода Либмана делает его привлекательным для реализации на ЭВМ, так как он не требует хранения больших объемов данных и обладает высокой устойчивостью к ошибкам округления. Эти свойства делают его удобным инструментом для инженерных и научных вычислений, позволяя эффективно решать задачи, возникающие в различных областях науки и техники.

Цель данной статьи – решить методом Либмана задачу Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области.

2. Материалы и методы

Применение теоретического метода позволило провести анализ существующих методов решения дифференциальных уравнений в частных производных и выбор метода Либмана для непосредственного решения. Практические методы заключаются в написании программы на языке Python [5] с последующим проведением численного эксперимента.

3. Результаты

3.1. Постановка задачи

Задачу Дирихле для уравнения Пуассона в двумерной односвязной области $D \subset \mathbf{R}^2$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta u &= f, \\ u|_G &= g,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}u &= u(x, y), f = f(x, y), (x, y) \in D, \\ g &= g(x, y), (x, y) \in G,\end{aligned}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовых координатах.

3.2. Метод Либмана

При построении графиков решений эллиптического уравнения приходится выбирать или численное моделирование, или построение точных аналитических решений в виде рядов или интегралов с последующим их упрощением. В обоих случаях приходится использовать численные методы.

Рассмотрим решение задачи (1) с использованием итерационного метода Либмана [3]. Для этого выберем прямоугольную сетку с узлами (x_m, y_n) , где

$$x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$y_n = nl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad h > 0, \quad l > 0.$$

К сеточной области D_h отнесем все узлы, принадлежащие области $\bar{D} = D \cup G$ (рис. 1) [6].

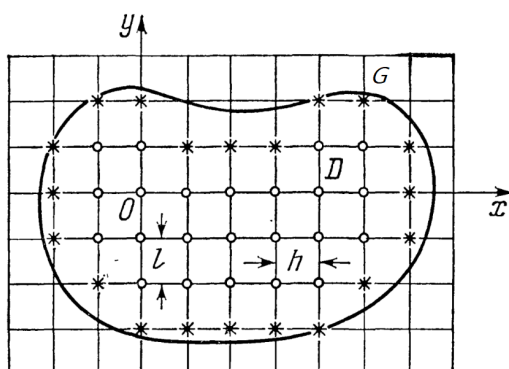


Рис. 1. Распределение узлов [6]

На основе пятиточечного шаблона (рис. 2) разобьем узлы области на две категории – внутренние и граничные. Узел (m, n) считается внутренним, если он сам и четыре соседние точки шаблона принадлежат области D_h , внутренние узлы помечены на рис. 1 знаком \circ , их множество обозначим через D_h° . Остальные узлы назовем граничными, они помечены на рис. 1 знаком $*$, множество этих узлов обозначим через G_h . В итоге получаем, что $D_h = D_h^\circ \cup G_h$. Таким образом, разбиение узлов области D_h на внутренние и граничные зависит от того, какой шаблон выбран для аппроксимации дифференциального уравнения.

Рассмотрим узел $(m, n) \in D_h^\circ$. Тогда уравнение $(1)_1$ во внутренних узлах принимает вид

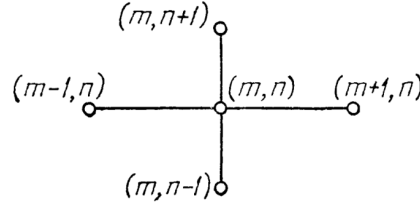


Рис. 2. Пятиточечный шаблон

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m, y_n)} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n), \quad (2)$$

где в соответствии с работой [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m, y_n)} &\approx \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n)} &\approx \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1})}{l^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n)}{h^2} + \\ &+ \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1})}{l^2} = f(x_m, y_n), \quad (m, n) \in D_h^\circ. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножив обе части разностных уравнений (4) на $h^2 l^2$ и разделив полученные равенства на $2(h^2 + l^2)$, имеем

$$u_{mn} = \frac{l^2(u_{m+1,n} + u_{m-1,n}) + h^2(u_{m,n+1} + u_{m,n-1})}{2(h^2 + l^2)} - \frac{h^2 l^2}{2(h^2 + l^2)} f_{mn}, \quad (5)$$

где $f_{mn} = f_{x_m, y_n}$.

Итерационный процесс Либмана для полученной системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{mn}^{(k)} &= \frac{l^2(u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m-1,n}^{(k)}) + h^2(u_{m,n+1}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)})}{2(h^2 + l^2)} - \frac{h^2 l^2}{2(h^2 + l^2)} f_{mn}, \\ &k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

В случае $h = l$ процесс (6) для уравнения Пуассона можно представить так:

$$u_{mn}^{(k)} = \frac{1}{4}[u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m-1,n}^{(k)} + u_{m,n+1}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)} - h^2 f(x_m^{(k)}, y_n^{(k)})],$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

а для уравнения Лапласа – в следующем виде:

$$u_{mn}^{(k)} = \frac{1}{4}[u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m-1,n}^{(k)} + u_{m,n+1}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)}], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В работе [6] показано, что итерационный процесс (6) сходится, то есть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{mn}^{(k)} = u_{mn}.$$

Для ускорения итерационного процесса при вычислении последующих значений необходимо использовать не только значения предыдущего приближения, но и текущего.

Для того чтобы начать вычислять последовательные приближения $u_{mn}^{(k)}$ по формуле (7), нужно задать начальное приближение $u_{mn}^{(0)}$. При этом $u_{mn}^{(0)}$ должны удовлетворять граничным условиям

$$u_{mn}^{(0)} = g(x_m, y_n), (x_m, y_n) \in G_h.$$

Полагая $k = 0, 1, \dots$, последовательно вычисляем по формулам (7) $u_{mn}^{(1)}, u_{mn}^{(2)}, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$. Вычисления $u_{mn}^{(k)}$ проводим до такого значения k , при котором

$$|u_{mn}^{(k+1)} - u_{mn}^{(k)}| \leq \varepsilon$$

для заданного малого числа $\varepsilon > 0$ [6].

3.3. Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента использовался язык программирования Python [5]. Одним из главных преимуществ Python является большое количество библиотек, которые значительно ускоряют процесс разработки программ. Например, библиотека `matplotlib` позволяет создавать красивые и информативные графики, что полезно для анализа результатов вычислений. Библиотека `numpy` предоставляет широкие возможности для работы с многомерными массивами данных, де-

лая использование численных методов в Python удобным и эффективным. А библиотека numba позволяет ускорить функции, написанные на Python, до уровня машинного кода.

Python также широко используется в научных и инженерных расчётах, что делает его идеальным выбором для разработки программ, связанных с численными методами.

При проведении численного эксперимента во всех случаях на границе использовались значения, полученные в результате аналитического решения задачи.

Чтобы проверить точность вычислений, были подобраны контрольные примеры. При этом погрешность вычислений определялась по формуле

$$\delta = \frac{\|u - u_{true}\|}{\|u_{true}\|} \cdot 100\%, \quad (8)$$

где u – решение задачи, вычисленное одним из методов, u_{true} – точное решение этой задачи.

Пример 1. Аналитическим решением задачи

$$\Delta u = 5e^{3x} \cos 2y - 5e^{2x} \cos 3y, (x, y) \in D,$$

$$u|_G = e^{3x} \cos 2y + e^{2x} \cos 3y,$$

где D – треугольник, задаваемый системой неравенств

$$\begin{cases} y > 2x - 1, \\ y > -2x + 1, \\ y > 0,9, \end{cases}$$

является функция $u_{true} = e^{3x} \cos 2y + e^{2x} \cos 3y, (x, y) \in D$ (рис. 3).

Пример 2. Аналитическим решением задачи

$$\Delta u = 8 \cos^2(x + y) - 4, (x, y) \in D,$$

$$u|_G = \sin^2(x + y),$$

где D – круг, определенный неравенством

$$(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 < 0,19,$$

является функция $u_{true} = \sin^2(x + y), (x, y) \in D$ (рис. 4).

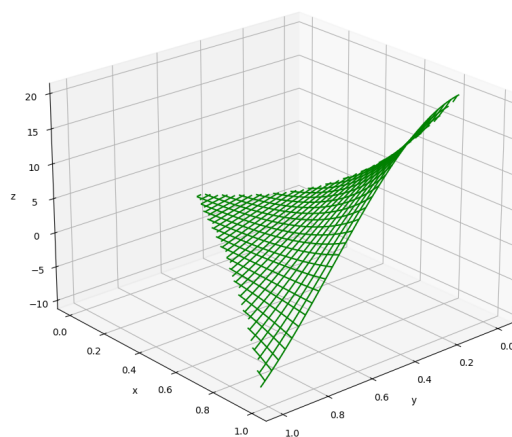


Рис. 3. $a = 1, b = 1, M = 100, N = 100, \varepsilon = 0,000001$.
 Погрешность после 7179 итераций: 0,005 %

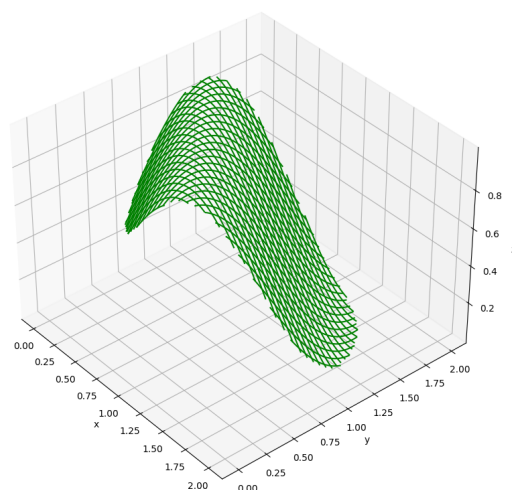


Рис. 4. $a = 2, b = 2, M = 100, N = 100, \varepsilon = 0,00001$.
 Погрешность после 6658 итераций 0,65 %

Пример 3. Аналитическим решением задачи

$$\Delta u = (2 - y^2) \sin x + (2 - x^2) \sin y, (x, y) \in D,$$

$$u|_G = x^2 \sin y + y^2 \sin x,$$

где D – сложная фигура, состоящая из четырёх пересекающихся кругов, описываемых следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 < 5, \\ (x - 3)^2 + (y - 7)^2 < 5, \\ (x - 7)^2 + (y - 3)^2 < 5, \\ (x - 7)^2 + (y - 7)^2 < 5, \end{cases}$$

является функция $u_{true} = x^2 \sin y + y^2 \sin x \in D$ (рис. 5).

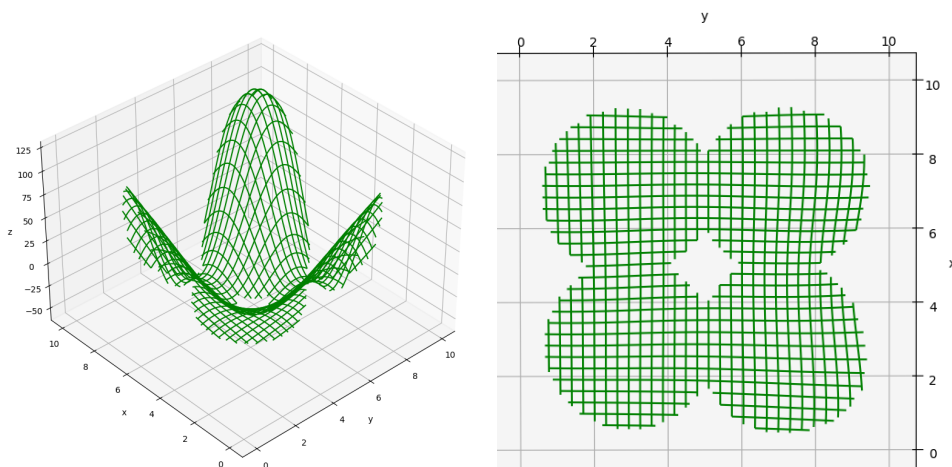


Рис. 5. $a = 10$, $b = 10$, $M = 100$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,000001$.

Погрешность после 5016 итераций 0,035 %

На рис. 3 – 5 приведены примеры работы программы. Получено, что приемлемая погрешность достигается всегда.

4. Обсуждение

Представленная работа была выполнена в рамках курсовой работы по направлению «Математика и компьютерные науки», а также является дополнением к лекционному курсу по дисциплине «Численные методы».

Представленная работа поможет также исследователям, использующим численные методы при решении уравнений в частных производных в произвольной области.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. **Ермоленко А. В., Кожгаельдиев Н. В.** Численное решение неоднородного бигармонического уравнения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Вып. 3 (44). С. 64–78.
3. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 400 с.
4. **Ермоленко А. В.** Контактные задачи со свободной границей : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). 105 с.
5. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.
6. **Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И.** Вычислительные методы : учеб. пособие. М. : Наука, 1977. Т. 2. 399 с.

References

1. **Tixonov A. N., Samarskij A. A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1977. 736 p. (In Russ.)
2. **Yermolenko A. V., Kozhageldiev N. V.** On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2022. No 3 (44). Pp. 64–78. (In Russ.)
3. **Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z.** *Chislennyye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moscow: State

Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 400 p.
(In Russ.)

4. **Yermolenko A. V.** *Kontaktnyye zadachi so svobodnoy granitsej : uchebnoye posobiye* [Contact problems with free boundary : textbook]. Syktyvkar: Izd. Pitirim Sorokin, 2020. 1 opt. compact disc (CD-ROM). 105 p. (In Russ.)
5. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2019. No 4 (33). Pp. 86–95. (In Russ.)
6. **Kry'lov V. I., Bobkov V. V., Monasty'rskij P. I.** *Vychislitel'nyye metody : ucheb. posobiye* [Computational methods : textbook]. Moscow: Nauka, 1977. Vol. 2. 399 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Ермоленко Андрей Васильевич / Andrei V. Yermolenko

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Поздеев Яков Алексеевич / Yakov A. Pozdeev

обучающийся бакалавриата / undergraduate student

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 20.11.2024

Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 30.11.2024

Принята к публикации / Accepted for publication 06.12.2024

Contents

Applied mathematics and mechanics

Borkov P. V., Maltseva O. A., Polyakova I. V.,
Startseva E. N. *Estimation of investment activity based on
the news background* 4

Vasserman I. N., Shardakov I. N., Glot I. O.,
Shestakov A. P. *Numerical and analytical simulation of
two-dimensional static bidomain effects in the myocardium* 21

Computer sciences

Rybak V. A. *Construction of models of the impact of environmental
quality on public health* 39

Theory and methods of teaching mathematics and computer science

Testov V. A., Popkov R. A. *Investigative training in mathematics
and computer algebra systems* 52

Methodical materials

Ustyugov V. A., Antonets I. V., Golubev E. A. *Automated
analysis of shungite microscopy images* 69

Tutor-follower

Yermolenko A. V., Pozdeev Ya. A. *On the numerical solution of
the Dirichlet problem for the Poisson equation in an arbitrary domain* 84

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 4 (53) 2024

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет Е. Н. Старцевой
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 11.12.2024. Дата выхода в свет 20.12.2024.

Формат $70 \times 108 \frac{1}{16}$.

Гарнитура Computer Modern.

Усл. печ. л. 11.1

Тираж 30 экз. Заказ № 105.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
Сайт: komitip.ru

