Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_44

ОДИН ПРИМЕР ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДОВ АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

Ольга Александровна Сотникова,
Василий Владимирович Чермных
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, sotnikovaoa@syktsu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются приемы, позволяющие выделить методы абстрактной алгебры при изучении некоторых тем алгебраического курса. На примере тем «Подстановки», «Комплексные числа», «Матрицы» и «Многочлены» иллюстрируется выделение связей между понятиями, рассматриваемыми в этих теориях. Выделенные связи позволяют характеризовать предметность элементов рассматриваемых множеств, процедурность трактовки алгебраических действий, также формализованный характер свойств алгебраических действий. По мнению авторов, указанные обстоятельства можно использовать для иллюстрации методов абстрактной алгебры.

Ключевые слова: курс алгебры, подготовка учителя математики, абстрактная алгебра, содержательные связи, формализация

Для цитирования: Сотникова О. А., Чермных В. В. Один пример изучения методов абстрактной алгебры в математическом высшем образовании // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 44–56. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_44

Article

One example of studying abstract algebra methods in mathematic degree programs

Olga A. Sotnikova, Vasilij V. Chermnykh
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, sotnikovaoa@syktsu.ru

Abstract. The article addresses some techniques which are instrumental for outlining abstract algebra methods when exploring some subject matters within the algebra course. As exemplified in such chapters as *Substitution*, *Complex Numbers*, *Matrices* and *Polynomials*, the phenomena considered in these theories are shown to detect connections which offer the possibility to characterize the objectivity of the elements of the sets under consideration, the procedural nature of the interpretation of algebraic operations, and also the formalized nature of the properties of algebraic operations. According to the authors, the conditions mentioned can be used to illustrate the methods of abstract algebra.

Keywords: algebra course, math teacher training, abstract algebra, conceptual connections, formalization

For citation: Sotnikova O. A., Chermnykh V. V. One example of studying abstract algebra methods in mathematic degree programs. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 44–56. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_44

Современная ситуация в нашей стране ставит задачу подготовки выпускников вузов, готовых к созданию прорывных технологий. Эта готовность применительно к математической подготовке означает, в частности, формирование определенного уровня математического мышления.

В настоящее время успешная научно-исследовательская работа невозможна без углубленного понимания той или иной узкой дисциплины. Для высокого уровня математического мышления недостаточно владения фактологическим материалом, важно познать метод, развивающийся в этом материале. В последнее время при изучении алгебраического материала все чаще подчеркивается важность систематизации содержания (например, [1]) Одними из наиболее важных математических методов являются методы абстрактной алгебры: «возрастающее день от дня значение абстрактной алгебры основано не на полученных результатах, а на развитых в этой области математики *методах*» [2, с. 9].

Авторы уже обращались к приемам привлечения студентов к изучению абстрактной алгебры во внеаудиторной работе [3]. В данной статье рассматривается один из примеров приобщения студентов к раскрытию методов абстрактной алгебры при изучении некоторых вопросов алгебраического курса.

Одним из основных методов содержания, рассматриваемого в вузовском курсе алгебры, является метод аксиоматизации. Традиционно содержание материала выдержано в рамках двух основных блоков: интуитивных теорий (матрицы и определители, комплексные числа и др.) и аксиоматических теорий (группы, кольца, поля, векторные пространства). Рассмотрим внедрение аксиоматизации на примере интуитивных теорий.

Выделим общность множеств, рассматриваемых в интуитивных теориях. Элементами множеств таких теорий являются арифметические векторы, подстановки, матрицы, комплексные числа, многочлены одной и нескольких переменных и др. В курсе алгебры они обычно определяются следующим образом.

Арифметический вектор — это упорядоченный набор элементов некоторого множества, поэтому его можно представить в виде

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где a_i принадлежат некоторому (фиксированному) множеству.

Под подстановкой степени n понимают биективное отображение n-элементного множества на себя. Поскольку опорное множество конечно, то подстановку можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Матрицей является таблица элементов, содержащая m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Комплексное число трактуется как число вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Оно допускает *геометрическое представление* в виде вектора декартовой плоскости с координатами (a, b) (или точкой с указанными координатами).

Многочленом от одной переменной (одного аргумента) является выражение *вида*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Итак, указанные объекты (элементы множеств интуитивных теорий) обладают тем свойством, что имеют представление в виде наглядного образа (т. е. их можно «записать», «представить», они имеют некоторый «внешний» вид и т. п.).

Второе общее свойство элементов множеств интуитивных теорий состоит в том, что они связаны непосредственно с «житейскими» представлениями, практической деятельностью людей. Например, матрица помогает зафиксировать данные производства продукции различного вида разными предприятиями, подстановка — смену «очередности» объектов, арифметический вектор — «координаты» местоположения и т. п. Другими словами, данные объекты имеют «реальную» природу, или по крайней мере ее можно «придать» объектам.

Оба свойства элементов множеств интуитивных теорий (наглядность и связь с практикой) схожи со свойствами реальных явлений («вещей»), поэтому их можно характеризовать одним свойством — *предметности.*

С элементами множеств интуитивных теорий выполняются алгебраические действия. В процессе изучения курса алгебры алгебраические действия над упомянутыми выше элементами множеств определяют следующим образом:

✓ Умножение подстановок задается правилом композиции отображений:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

✓ Сложение комплексных чисел — покомпонентное сложение действительной и мнимой частей соответственно:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

✓ Умножение матриц определяется формулами для вычисления элементов матрицы:

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj},$$

где $A = (\alpha_{ij})_{m,n}$, $B = (\beta_{ij})_{n,s}$, $C = AB = (\gamma_{ij})_{m,s}$.

✓ Действия сложения и умножения многочленов определяются вычислением соответствующих коэффициентов по известным формулам.

Таким образом, алгебраические действия с указанными объектами задаются *вполне определенными* правилами. Эти правила в основном имеют вид формул, которые позволяют однозначно определить результат операции применительно к каким-либо элементам рассматриваемых множеств. Чтобы найти результат алгебраического действия применительно к конкретным элементам, необходимо выполнить определенные вычисления, задаваемые указанными правилами. Например, чтобы перемножить две подстановки f и g, нужно на каждый элемент множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ сначала «подействовать» подстановкой g (найти образ относительно этой подстановки), затем на полученный результат «подействовать» подстановкой f. Иначе говоря, необходимо выполнить последовательно вычислительные операции, заданные формулой (правилом) алгебраического действия. Коли эти операции выполняются последовательно и вполне определены формулой, то в их выполнении имеется алгоритмичность.

Между элементами множеств интуитивных теорий имеются отношения, например отношение равенства. В каждом множестве отношения по своему содержанию различны. Например, равенство подстановок — это равенство отображений. Поэтому «внешность» двух равных подстановок может быть различной. Так, подстановки $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ по своему «внешнему виду» различны, но они равные, так как $f(1) = g(1) = 2$, $f(2) = g(2) = 3$, $f(3) = g(3) = 1$. Чтобы установить, находятся ли две подстановки в отношении равенства, т. е. равны ли они, необходимо выполнить процедуру, адекватную специфике равенства отображений конечных множеств: для каждого элемента множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ необходимо найти образ, определяемый данными двумя постановками, а затем установить их совпадение (или несовпадение). Эта процедура может быть алгоритмизирована каким-либо образом. Например, следующим образом:

1. Переставить столбцы в таблицах подстановок так, чтобы верхние строки совпадали.

2. Определить совпадение полученных таблиц подстановок. Если они совпадают, то подстановки равны, в противном случае — нет.

Равенство матриц, арифметических векторов, многочленов сводится к равенству их соответствующих компонент. То есть опять же сводится к алгоритмическим предписаниям выполнения вполне определенных действий (операций) по установлению равенства рассматриваемых элементов. Иначе говоря, алгебраические действия и отношения между элементами множеств интуитивных теорий «процедурны».

Следовательно, одна сторона понятий интуитивных теорий состоит:

а) в *предметности* элементов рассматриваемых множеств, т. е. <u>что</u> они означают (как наглядно представляются, истолковываются, из каких реальных явлений они возникли и т. п.);

б) *процедурной* трактовке алгебраических действий и отношений, рассматриваемых на их множествах, т. е. характеризует то, <u>как</u> выполняются алгебраические операции (по каким правилам, формулам).

В понятиях интуитивных теорий имеется и другая сторона *формализованного характера*. Элементы множеств интуитивных теорий, как бы они ни были представлены наглядно и что бы они ни отражали из реальной действительности, т. е. какова бы ни была их предметность, они — элементы множеств, т. е. части той совокупности, которая «мыслится как единое целое». Они обозначаются символами или комбинациями букв и знаков.

Как бы ни было задано равенство элементов интуитивных множеств, оно обладает рядом свойств (рефлексивность, симметричность, транзитивность, подстановочность) *формализованной* сущности.

Элементы множеств можно группировать в подмножества. Например, среди комплексных чисел можно выделить чисто мнимые числа, гауссовы числа и т. д., среди подстановок — циклы, среди матриц — невырожденные и т. п. Ясно, что состав выделяемых подмножеств будет различным, но сущность процесса «выделения» по своей форме (синтаксическому выражению) одинакова: определяется характеристическое свойство элементов выделяемого подмножества, понятно его отношение ко всему множеству (отношение включения) и отношения между другими подмножествами этого же множества и т. д. Результативность «выделения» подмножеств также имеет формализованную общность. Она связана с новыми «объектами» в интуитивных теориях — подмножествами. Подмножества могут находиться в отношении включения. Вне зависимости от того, на подмножествах какого множества интуитивной теории оно рассматривается, включение обладает такими формализованными свойствами, как транзитивность, рефлексивность и антисимметричность (т. е. является отношением порядка). Равенство множеств определяется в соответствии с принципом объемности: два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов, или: два множества равны тогда и только тогда, когда каждое является подмножеством второго. В символическом виде:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)).$$

Иначе говоря, равенство множеств сводится к отношению «быть элементом множества», т. е. «равенство множеств (подмножеств)» связано с понятием «равенство элементов» в формализованном плане.

Такого же рода связи имеются и между алгебраическими действиями и отношениями на множествах интуитивных теорий. Так, конкретная алгебраическая операция на рассматриваемом множестве по сути задает отображение его декартовой степени в себя со всеми существенными свойствами понятия отображения. Имеются связи между свойствами алгебраических операций на различных множествах, которые формальны по существу. Например, умножение матриц, сложение комплексных чисел, умножение подстановок и другие обладают свойством ассоциативности, которое может быть записано своей формой в известном виде:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

При этом символы a, b, c означают элементы конкретного множества, а $\circ$ — рассматриваемую бинарную операцию. Естественно, доказательства этого свойства в конкретных множествах имеют отличия, обусловленные «природой» алгебраической операции, той операционной компонентой, которая задает алгебраическое действие.

Прокомментируем сказанное двумя примерами.

Пример 1. Рассмотрим множество матриц с числовыми компонентами. Пусть имеются три матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,k}$, $C = (c_{ij})_{kt}$. Обозначим: $AB = (u_{ij})_{m,k}$, $BC = (v_{ij})_{n,t}$, $A(BC) = (x_{ij})_{m,t}$, $(AB)C = (y_{ij})_{m,t}$. По определению произведения матриц:

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} v_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \sum_{l=1}^{k} b_{sl} c_{lj} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} a_{is} b_{sl} c_{lj} =$$
$$= \sum_{l=1}^{k} \left(\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sl} \right) c_{lj} \right) = \sum_{l=1}^{k} u_{il} c_{lj} = y_{ij}.$$

Итак, $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(\forall j \in \{1, 2, \ldots, t\})(x_{ij} = y_{ij})$. Следовательно, $\underline{A(BC) = (AB)C}$.

Пример 2. Рассмотрим множество S_n подстановок степени n. Пусть f, g, h — некоторые подстановки из S_n. Выберем произвольно $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда по определению произведения подстановок:

$$(f(gh))(x) = f((gh)(x)) = f(g(h(x))) = (fg)(h(x)) = ((fg)h)(x).$$

Итак, $(\forall x \in \{1, 2, \ldots, n\})((f(gh))(x) = ((fg)h)(x))$. Следовательно, $\underline{f(gh) = (fg)h}$.

Сравним выводы примера 1 и примера 2 (они подчеркнуты). По языковому выражению они одинаковы, но по содержанию — нет. В первом случае речь идет о равенстве матриц, во втором — о равенстве отображений. Поэтому доказательства основываются на специфике элементов множеств и правил алгебраических действий на них. То есть по содержанию доказательства различны, но идея доказательства сходна. Используются:

— определения равных элементов, которые в каждом конкретном случае имеют содержательные отличия, но общие формальные особенности, указанные выше;

— правила алгебраических действий, введенных на данных множествах, которые имеют содержательные особенности, но общие связи формализованного направления.

Обратимся к строению интуитивных теорий (рис.). Первые два блока в схеме на рисунке означают задание множества и алгебраических операций на нем, что неизбежно присутствует в любой интуитивной теории. Понятия «множество» и «алгебраическая операция» для интуитивной теории означает три компонента характеристики основных понятий интуитивной теории (следующий блок схемы): природа элементов, характеристические свойства элементов, способ задания алгебраического действия.

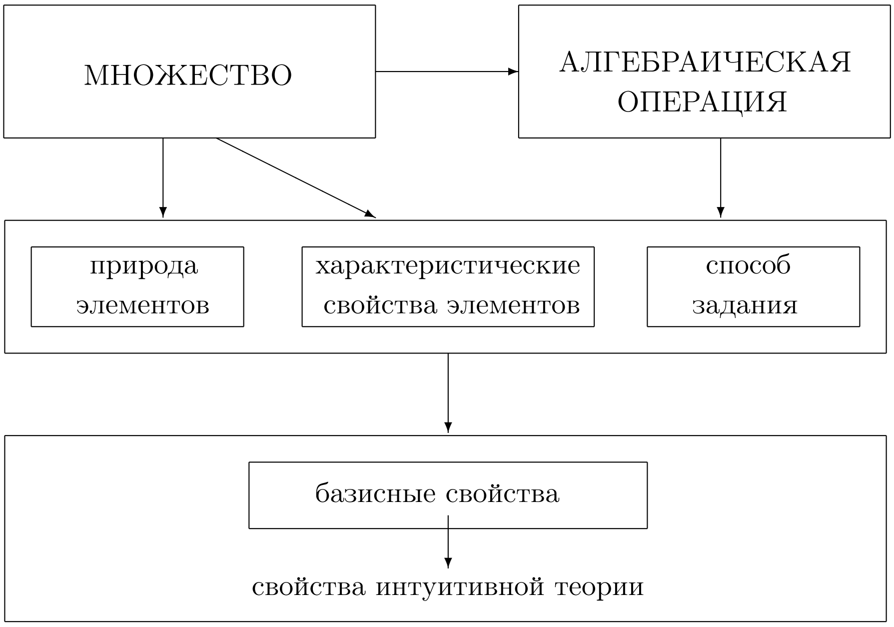

Рис. Строение интуитивной теории

Из характеристик основных понятий алгебраической структуры логически вытекают свойства интуитивной теории. Среди них можно выделить базисные. Существенное отличие базисных свойств от «небазисных» состоит в том, что они служат основанием к получению других свойств. Иначе говоря, базисные свойства доказываются на основе «предметности» и «процедурности», а небазисные — на основе формальных характеристик объектов.

Прокомментируем сказанное на примере темы, посвященной интуитивной теории подстановок. Определением понятия подстановки и действия умножения подстановок задается интуитивная теория. Доказательство свойств ассоциативности, наличие тождественной подстановки и обратной каждой, использует координатизационные связи. Некоторые дальнейшие свойства могут рассматриваться без привлечения указанных фактов.

Например, пусть требуется доказать свойство подстановок, состоящее в том, что для любых подстановок f, g степени n выполняется равенство

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}.$$

Проведем сначала один из вариантов доказательства данного свойства, основанного на специфике подстановок.

Выберем произвольно $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим $y = g^{-1}(f^{-1}(x))$. Тогда:

$$g(y) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(g(y)) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow f(g(y)) = x \Rightarrow \\ (fg)(y) = x \Rightarrow y = (fg)^{-1}(x).$$

Следовательно, $(\forall x \in \{1, 2, \ldots, n\})(g^{-1}(f^{-1}(x)) = (fg)^{-1}(x))$. Отсюда по определению равных подстановок: $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Разберем обоснования доказательства (табл.). Из таблицы видно, что аргументами в приведенном доказательстве в основном являются «предметность» и «процедурность» умножения подстановок, т. е. используются координатизационные связи интуитивной теории.

Возможно и другое доказательство названного свойства. Приведем его. Найдем произведение подстановок:

1) $(g^{-1}f^{-1})(fg) = g^{-1}(f^{-1}f)g = g^{-1}\varepsilon g = g^{-1}g = \varepsilon$;

2) $(fg)(g^{-1}f^{-1}) = f(gg^{-1})f^{-1} = f\varepsilon f^{-1} = ff^{-1} = \varepsilon$.

Из п. 1) и 2) по определению обратной подстановки получаем равенство: $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Заметим, что данное доказательство полностью совпадает с доказательством указанного свойства в теории групп.

Таким образом, совокупность свойств алгебраической операции интуитивных теорий порождает вид связей, которые дают «выход» в алгебраическую структуру. Поэтому данные связи можно охарактеризовать как *структурно-абстрактные*. Более подробное описание видов содержательных связей в алгебраическом материале, используемого при подготовке учителя математики, представлено в монографии [4].

Приведенные фрагменты содержания интуитивных теорий, рассматриваемые на этапах систематизации, позволяют выделить основные принципы, приводящие к понятию алгебраической структуры, дающие выход к рассмотрению абстрактной алгебры.

Таблица 1

Обоснование доказательства

Шаг доказательства	**Обоснование**
$y = g^{-1}(f^{-1}(x))$	Определение подстановки
$y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \Rightarrow g(y) = f^{-1}(x)$	Определение подстановки
$g(y) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(g(y)) = f(f^{-1}(x))$	Определение подстановки
$f(g(y)) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow f(g(y)) = x$	Свойство тождественной подстановки
$f(g(y)) = x \Rightarrow (fg)(y) = x$	Определение умножения подстановок
$(fg)(y) = x \Rightarrow y = (fg)^{-1}(x)$	Свойство обратной подстановки
$f(g(y)) = x \Rightarrow (fg)(y) = x$	Определение умножения подстановок
$y = (fg)^{-1}(x) \wedge y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \Rightarrow$ $(fg)^{-1}(x) = g^{-1}f^{-1}(x)$	Свойство равенства
$(fg)^{-1}(x) = g^{-1}f^{-1}(x) \Rightarrow (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$	Определение равных подстановок

Список источников

1. **Яшина Е. Ю.** Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 69–82.

2. **Фрид Э.** Элементарное введение в абстрактную алгебру / пер. с венгер. Ю. А. Данилова. М.: Мир, 1979. 260 с.

3. **Сотникова О. А., Чермных В. В.** О привлечении студентов к изучению абстрактной алгебры (на примере одной задачи теории групп и ее приложениях) // *Психология образования в поликультурном пространстве.* 2024. № 2 (66). С. 138–147.

4. **Сотникова О. А.** Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания : монография. Архангельск: Поморский университет, 2004. 356 с.

References

1. **Yashina E. Yu.** Dokazatel'stvo teoremy Frobeniusa kak zavershenie kursa algebry i chislovyk sistem v pedagogicheskom universitete. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2023. No 2 (47). Pp. 69–82. (In Russ.)

2. **Fried E.** *Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru* [An Elementary Introduction to Abstract Algebra]. Perevod s vengerskogo Yu. A. Danilova. Moscow: Mir, 1979. 260 p. (In Russ.)

3. **Sotnikova O. A., Chermnykh V. V.** On attracting students to study abstract algebra (using the example of one problem in group theory and its applications). *Psihologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve* [Psychology of education in a multicultural space]. 2024. No 2 (66). Pp. 138–147. (In Russ.)

4. **Sotnikova O. A.** *Tselostnost' vuzovskogo kursa algebry kak metodologicheskaya osnova ego ponimaniya : monografiya* [The integrity of a university algebra course as a methodological basis for its understanding : monograph]. Arhangel'sk: Pomorskiy universitet, 2004. 356 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Сотникова Ольга Александровна / Olga A. Sotnikova
д.пед.н., доцент, ректор СГУ им. Питирима Сорокина /
Doctor of Sciences in Pedagogical , Associate Professor, Rector of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Чермных Василий Владимирович / Vasilij V. Chermnykh
д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, chief researcher
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.09.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 12.09.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 18.09.2024