МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

MATHEMATICS EDUCATION

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 378.016, 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_27

ЧТО ТАКОЕ ПОЛУМОДУЛЬ[1]

Евгений Михайлович Вечтомов
Вятский государственный университет, vecht@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются начала теории полумодулей над полукольцом. Определены начальные понятия. Сформулированы некоторые структурные теоремы о полумодулях. Материал носит математико-методический характер, включает систему упражнений учебной направленности.

Ключевые слова: полумодуль над полукольцом, изучение теории полуколец и полумодулей

Для цитирования: Вечтомов Е. М. Что такое полумодуль // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 27–43. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_27

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117

Article

What is a semimodule

Evgeny M. Vechtomov
Vyatka State University, vecht@mail.ru

Abstract. The article deals with the beginnings of the theory of semimodules over a semiring. It considers initial properties and formulates some structure theorems about semimodules. The material is of a mathematical and methodological nature and includes a system of educational exercises.

Keywords: a semimodule over a semiring, study of the theory of semirings and semimodules

For citation: Vechtomov E. M. What is a semimodule. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 27–43. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_27

Введение

Теория полуколец и полумодулей есть развитие и расширение теории колец и модулей, которая, в свою очередь, представляет собой обобщение классической теории векторных пространств под полем.

Статья является элементарным введением в теорию полуколец и полумодулей, служит продолжением нашей вводной работы о полукольцах [1], информацией из которой будем свободно пользоваться. Материал предназначен студентам естественно-математических направлений подготовки. Исходные понятия и результаты о полукольцах и полумодулях можно найти в брошюре [2], книгах [3; 4], а также в статьях [5; 6]. Информацию об упорядоченных множествах можно найти в учебном пособии [7].

Полумодули над полукольцами требуют дальнейшего изучения. Так, в Заключении книги [8] поставлена проблема исследования полумодулей над мультипликативно идемпотентными полукольцами.

1. Начальные понятия

Введем исходные понятия о полумодулях над полукольцами.

Определение 1. *Полукольцом* (с нулем и единицей) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения + и умножения · и выделенными элементами *нуль* 0 и *единица* 1, удовлетворяющими следующим условиям:

1) $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид;

2) $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид;

3) 0 — мультипликативный нуль, т. е. тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$;

4) умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, т. е. в S справедливы тождества $(x+y)z = xz+yz$ и $x(y+z) = xy+xz$.

Полукольцо S называется *полукольцом с делением*, если его ненулевые элементы образуют группу по полукольцевому умножению, т. е. $\langle S \setminus \{0\}, \cdot, 1\rangle$ — группа. Если полукольцо с делением S является кольцом, то оно называется *телом*; если же S не является кольцом, то S называется *полутелом*. Полутела удовлетворяют аддитивному квазитождеству $x+y = 0 \Rightarrow x = 0$ (почему?). Тела и полутела с коммутативным умножением называются, соответственно, *полями* и *полуполями*.

Определение 2. *Полумодулем* (унитарным левым S-полумодулем) над полукольцом S называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0\rangle$ вместе с отображением $S \times A \to A, (s, a) \to sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$):

(1) $(s+t)a = sa+ta$;

(2) $s(a+b) = sa+sb$;

(3) $(st)a = s(ta)$;

(4) $0 \cdot a = 0 = s \cdot 0$;

(5) $1 \cdot a = a$.

Замечание 1. В общей теории полуколец в определении полукольца не требуется существование 0 и 1. Однако в теории полумодулей над полукольцами, находящейся в русле развития теории колец и модулей над ними, обычно принимаются приведенные выше определения полукольца и полумодуля.

Замечание 2. Мы одинаково обозначаем — как 0 — нулевые элементы полукольца S и S-полумодуля A, что не должно вызывать недоразумений.

Отметим, что любое полукольцо S является S-полумодулем.

Можно считать, что $1 \neq 0$ в полукольце S, так как в случае $1 = 0$ полукольцо S и все S-полумодули одноэлементны (почему?).

Будем рассматривать полумодули над фиксированным полукольцом S.

Непустое подмножество B S-полумодуля A называется *подполумодулем* в A, если $x+y, sx \in B$ для любых $x, y \in B$ и $s \in S$. Всегда $0 \in B$.

Гомоморфизмом (S-гомоморфизмом) полумодуля A в полумодуль B называется произвольное отображение $f : A \to B$, для которого $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(sx) = sf(x)$ при всех $x, y \in A$ и $s \in S$. Ясно, что $f(0) = 0$. S-полумодули A и B *изоморфны*, если существует *изоморфизм* $A \to B$, т. е. биекция, являющаяся S-гомоморфизмом; тогда обратное отображение $B \to A$ также будет S-гомоморфизмом, значит, изоморфизмом. Отметим, что изоморфные S-полумодули имеют совершенно одинаковые алгебраические свойства, т. е. свойства, выражаемые на языке S-полумодулей.

Отношение эквивалентности ρ на S-полумодуле A называется *конгруэнцией* на A, если $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ и $(sa)\rho(sb)$ при любых $a, b, c, d \in A$ и $s \in S$ (можно считать, что $c = d$).

Класс элемента $a \in A$ конгруэнции ρ на полумодуле A обозначим $a/\rho = \{x \in A : x\rho a\}$. Множество $A/\rho = \{a/\rho : a \in A\}$ всех классов относительно операций $a/\rho + b/\rho = (a+b)/\rho$ и $s(a/\rho) = (sa)/\rho$, где $a, b \in A$ и $s \in S$, образует S-полумодуль, называемый *фактор-полумодулем* полумодуля A по конгруэнции ρ. При этом каноническое отображение $\pi : A \to A/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ для всех $a \in A$ является S-гомоморфизмом полумодуля A на фактор-полумодуль A/ρ.

Упражнение 1. Проверьте справедливость утверждений предыдущего абзаца.

Пусть S — полукольцо.

Для S-полумодуля A обозначим через $\operatorname{End} A$ множество всевозможных гомоморфизмов полумодуля A в себя. Введем на множестве $\operatorname{End} A$ операции сложения (поточечное) и умножения (композиция):

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \text{ и } (f \cdot g)(a) = g(f(a))$$

для любых $f, g \in \operatorname{End} A, a \in A$.

Упражнение 2. Покажите, что алгебраическая структура $\langle \operatorname{End} A, +, \cdot \rangle$ является полукольцом с нулевым гомоморфизмом $A \to \{0\}$ в качестве нуля и тождественным отображением $A \to A$ в роли единицы. Полученное полукольцо называется *полукольцом эндоморфизмов* полумодуля A.

S-полумодуль A называется:

нулевым, если $A = \{0\}$;

модулем, если моноид $\langle A, +, 0\rangle$ является группой;

антимодулем, если A удовлетворяет квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$;

сократимым, если A удовлетворяет квазитождеству $x + z = y + z \Rightarrow x = y$;

идемпотентным, если A удовлетворяет тождеству $x + x = x$;

зероидным, если $\forall a \in S\, \exists b \in S\; a + b = b$;

циклическим, когда $A = Sa = \{sa : s \in S\}$ для некоторого элемента $a \in A$, называемого *образующим* полумодуля A;

простым, когда на A существуют ровно две конгруэнции — отношение равенства и одноклассовая.

Подполумодуль B S-полумодуля A называется:

собственным, если $B \subset A$;

строгим, если $x + y \in B$ влечет $x \in B$ для любых $x, y \in A$;

полустрогим, если $x + y \in B$ и $x \in B$ влекут $y \in B$ для любых $x, y \in A$.

Упражнение 3. Убедитесь, что класс $0/\rho$ всякой конгруэнции ρ на любом S-полумодуле A будет полустрогим подполумодулем полумодуля A.

По любому подполумодулю B S-полумодуля A определяется, как и в случае полукольца, *конгруэнция Бёрна* $\rho(B)$ на полумодуле A:

$$x\rho(B)y \Leftrightarrow \exists\, a, b \in B\; x + a = y + b\, (\forall x, y \in A).$$

Упражнение 4. Проверьте, что $\rho(B)$ есть конгруэнция на полумодуле A, класс $0/\rho(B)$ нуля которой содержит подполумодуль B.

Упражнение 5. Для подполумодуля B S-полумодуля A докажите эквивалентность следующих утверждений:

1) $B = 0/\rho(B)$;

2) $B = 0/\rho$ для некоторой конгруэнции ρ на A;

3) подполумодуль B полустрогий.

Для S-полумодуля A положим $m(A) = \{x \in A : \exists y \in A\; x + y = 0\}$ — множество всех элементов из A, имеющих противоположный элемент. Нетрудно показать, что $m(A)$ есть строгий подполумодуль в A, являющийся модулем над S. Подполумодуль $m(A)$ можно назвать *модульной* *частью* полумодуля A. Отметим, что $m(S)$ обозначается нами $r(S)$ — кольцевая часть полукольца S.

Упражнение 6. Докажите последнее утверждение.

Определим *зероидную часть* S-полумодуля A как $z(A) = \{x \in A : \exists y \in A\, x + y = y\}$. Получаем полустрогий подполумодуль $z(A)$ полумодуля A.

Упражнение 7. Опишите — с точностью до изоморфизма — все конечные S-полумодули над двухэлементным полукольцом S; над трехэлементной цепью $S = \{0 < s < 1\}$.

2. Пропедевтика

Приведем два основания для рассмотрения и изучения полумодулей над полукольцами.

Векторные пространства. Откуда это пошло? Истоком служат конечномерные векторные пространства $V = {}_{\mathbb{R}}V$ над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и их наглядные геометрические интерпретации в случае размерности $\dim V \leqslant 3$.

Векторным (*линейным*) *пространством* $V = {}_PV$ *над телом* P называется коммутативная группа $\langle V, +\rangle$, аддитивно записанная, на пару с внешним умножением $P \times V \to V, (s, a) \to sa \in V$, связанным со сложением равенствами (1)–(5) из определения полумодуля.

Пусть дано векторное пространство V над телом P. Напомним некоторые основные понятия теории векторных пространств.

Элементы из V называют *векторами*, а элементы из P — *скалярами*. Сумма вида $p_1v_1 + \ldots + p_nv_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$ с коэффициентами $p_1, \ldots, p_n \in P$.

Пусть B — непустое подмножество в V. Множество (B) всевозможных линейных комбинаций векторов из B образует *подпространство* векторного пространства V, называемое *линейной оболочкой* B: это по определению означает, что линейная оболочка (B) замкнута относительно сложения векторов и умножения вектора на произвольный скаляр. Ясно, что (B), как и всякое подпространство в V, вместе с конечным числом своих векторов содержит и любую их линейную комбинацию.

Множество векторов B называется:

линейно зависимым, если в B существуют такие различные векторы $v_1, \ldots, v_n$, что $p_1v_1 + \ldots + p_nv_n = 0$ для некоторых ненулевых скаляров $p_1, \ldots, p_n \in P$;

линейно независимым, если для любых векторов $v_1, \ldots, v_n \in B$ равенство $p_1v_1 + \ldots + p_nv_n = 0$ влечет $p_1 = \ldots = p_n = 0$;

множеством образующих (в V), если $(B) = V$;

базисом векторного пространства V, если любой ненулевой вектор $v \in V$ однозначно представим, с точностью до порядка слагаемых, как линейная комбинация $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$ некоторых векторов $v_1, \ldots, v_n \in B$ с ненулевыми скалярами $p_1, \ldots, p_n \in P$.

Мы видим, что любое непустое множество векторов векторного пространства либо линейно зависимо, либо линейно независимо.

Замечание 3. В теории векторных пространств обычно говорят не о множестве векторов B, а о системе (семействе) векторов, когда векторы могут повторяться. Тогда всякая система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

Ясно, что линейная зависимость одноэлементного множества $\{v\}$ векторного пространства равносильна тому, что $v = 0$. Легко видеть, что множество B векторного пространства, содержащее не менее двух векторов, линейно зависимо тогда и только тогда, когда в B найдется вектор, являющийся линейной комбинацией некоторых других векторов из B. Отсюда следует, что множество B, содержащее линейно зависимое множество, также линейно зависимо. Значит, любое непустое подмножество линейно независимого множества векторов само линейно независимо.

Справедливо следующее очевидное утверждение:

Лемма 1. *Множество векторов произвольного векторного пространства линейно независимо тогда и только тогда, когда линейно независимо любое его непустое конечное подмножество.*

По законам логики (контрапозиции и отрицания всеобщности) лемма 1 равносильна утверждению: *множество векторов векторного пространства линейно зависимо тогда и только тогда, когда линейно зависимо некоторое его конечное подмножество.*

В определении базиса B однозначность представления $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$ означает, что каждое равенство $v = q_1w_1 + \ldots + q_mw_m$, где $w_1, \ldots, w_m \in B$ и $q_1, \ldots, q_m \in P \setminus \{0\}$ влечет $m = n$ и, после соответствующей перестановки слагаемых, $w_1 = v_1, \ldots, w_n = v_n$ и $q_1 = p_1, \ldots, q_n = p_n$.

Векторное пространство V называется *конечномерным* (*n-мерным*), если V имеет конечный базис (n-элементный базис при $n \in \mathbb{N}$). Известно, что любые базисы конечномерного векторного пространства V над полем P имеют одно и то же число векторов (инвариант V), называемое *размерностью* V. См., например, [9, теоремы 1.5 и 3.4]. Верно ли это для некоммутативных тел P?

Замечание 4. Пусть P — некоторое тело и $Z = \{p \in P : \forall x \in P\ px = xp\}$ — его центр. Легко видеть, что Z является полем, т. е. коммутативным подтелом тела P. Ясно также, что P будет векторным пространством над полем Z. Предположим, что P конечномерно над Z и имеет размерность n. Рассмотрим произвольное конечномерное векторное пространство V над телом P с каким-то базисом из m векторов. Тогда V будет конечномерным векторным пространством над полем Z размерности mn. Например, если P есть тело кватернионов, то $Z = \mathbb{R}$ и V, как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, будет иметь размерность $4m$.

Замечание 5. Если V есть n-мерное векторное пространство над телом P с базисом $\{v_1, \ldots, v_n\}$, то любой вектор $v \in V$ представим в виде $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$ с однозначно определенными коэффициентами $p_1, \ldots, p_n \in P$, среди которых могут быть нули. В частности, $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$ и $0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$.

Пример 1. *Арифметическое n-мерное векторное пространство над телом* P ($n \in \mathbb{N}$) есть множество $P^n = \{(p_1, \ldots, p_n) : p_i \in P\}$ всех упорядоченных n-ок элементов тела P с покоординатными операциями сложения n-ок и умножения слева элементов из $s \in P$ на n-ки: $(p_1, \ldots, p_n) + (q_1, \ldots, q_n) = (p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$ и $s(p_1, \ldots, p_n) = (sp_1, \ldots, sp_n)$. В результате получаем n-мерное векторное пространство P^n с каноническим базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Имеем $(p_1, \ldots, p_n) = p_1e_1 + \ldots + p_ne_n$.

Пример 2. Множество $\oplus_{\mathbb{N}}P$ всевозможных последовательностей (p_n) элементов из тела P, в которых почти все координаты $p_i = 0$ (другими словами, все их координаты $p_i = 0$, начиная с некоторого номера) образует векторное пространство над P относительно покоординатных операций (как в примере 1). Очевидно, оно обладает счетным базисом $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ при векторе-последовательности e_n, все координаты которой равны 0, кроме n-й координаты, равной 1.

Пример 3. Множество V всех сходящихся последовательностей действительных чисел с поточечно определенными операциями сложения последовательностей и умножение числа на последовательности образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Подпространством векторного пространства V служит векторное пространство V_0 всех последовательностей, сходящихся к 0. Фактор-пространство V/V_0 изоморфно одномерному векторному пространству $\mathbb{R}$.

Упражнение 8. Что представляют собой фактор-пространства $V/\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ и $V_0/\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ для векторного пространства V из примера 3?

Предложение 1. *Любое n-мерное векторное пространство V над телом P изоморфно арифметическому векторному пространству P^n.*

Доказательство. Действительно, если $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис V над телом P, то, как легко видеть, отображение $v \to (p_1, \dots, p_n)$, где $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$, осуществляет изоморфизм V на P^n.

Предложение 2. *Каждое линейно независимое множество любого векторного пространства V над телом P содержится в некотором базисе этого пространства.*

Доказательство. Пусть B — произвольное линейно независимое множество векторного пространства V. Обозначим через X множество всевозможных линейно независимых множеств в V, содержащих B. Относительно отношения включения $\subseteq$ множеств X является упорядоченным множеством, удовлетворяющим следующему условию: любая цепь множеств в X ограничена сверху. Действительно, пусть $\{B_i : i \in I\}$ — цепь в упорядоченном множестве $\langle X, \subseteq\rangle$, т. е. для любых индексов $i, j \in I$ имеем $B_i \subseteq B_j$ или $B_j \subseteq B_i$. Рассмотрим объединение $U = \cup\{B_i : i \in I\} \supseteq B$. Всякое непустое конечное множество векторов из U содержится в некотором линейно независимом множестве B_i, поэтому оно линейно независимо. По лемме 1 само множество U линейно независимо и, стало быть, принадлежит X. Значит, произвольная цепь $\{B_i : i \in I\}$ упорядоченного множества X имеет в X верхнюю грань U, являющуюся точной верхней гранью множества $\{B_i : i \in I\} \subseteq X$. Тем самым мы доказали, что наше упорядоченное множество $\langle X, \subseteq\rangle$ удовлетворяет необходимому условию леммы Цорна, эквивалентной аксиоме выбора, которая в современной теоретико-множественной математике принимается именно в качестве аксиомы (без доказательства).

Лемма Цорна. *Если любая цепь произвольного упорядоченного множества $\langle Y, \leqslant\rangle$ ограничена сверху в Y, то в Y существует хотя бы один максимальный элемент $m : \forall y \in Y (m \leqslant y \Rightarrow y = m)$.*

Поскольку для упорядоченного множества $\langle X, \subseteq\rangle$ выполнено условие леммы Цорна, то, следовательно, выполнено и ее заключение, т. е. в X существует максимальный элемент M. Ясно, что M представляет собой максимальное линейно независимое множество векторов векторного пространства V, содержащее исходное линейно независимое множество B. Остается показать, что M является базисом в V. Пусть вектор $v \in V \setminus (M)$, т. е. $v \in V$ не является линейной комбинацией векторов из M. Отсюда легко выводится линейная независимость множества $M \cup \{v\}$, что противоречит максимальности M. Поэтому M служит множеством образующих векторного пространства V. Предположим от противного, что некоторый вектор из V имеет два разных представления в виде линейных комбинаций векторов из M. Тогда разность этих линейных комбинаций есть нулевой вектор, представленный как линейная комбинация векторов из M, не все коэффициенты которой равны 0, что означает линейную зависимость множества M. Полученное противоречие показывает, что M — базис векторного пространства V.

Упражнение 9. Подробно изложите заключительную часть доказательства предложения 2.

Следствием предложения 2 является

Предложение 3. *Любое ненулевое векторное пространство над телом P обладает базисом.*

Упражнение 10. Докажите, что векторное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех числовых последовательностей имеет несчетный базис.

Упражнение 11. Являются ли векторные пространства V и V_0 из примера 3 счетномерными?

Предложение 4. *Для любого непустого множества B векторного пространства V над телом P эквивалентны следующие утверждения:*

1) B — *базис* V;

2) B — *линейно независимое множество образующих* V;

3) B — *максимальное линейно независимое множество в* V;

4) B — *минимальное множество образующих* V.

Доказательство нетрудно провести по циклу 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1). Можно воспользоваться рассуждениями из доказательства предложения 2.

Упражнение 12. Докажите, что любые два базиса любого векторного пространства V над полем P равномощны.

Мощность некоторого (любого) базиса векторного пространства V над полем P (предложение 3 и упражнение 12) называется *размерностью* векторного пространства V, в обозначениях $\dim_P V$.

Упражнение 13. Покажите, что $\dim_P W \leqslant \dim_P V$ для всякого подпространства W любого векторного пространства V над полем P.

Упражнение 14. Докажите, что любое подпространство W произвольного векторного пространства V над телом выделяется *прямым слагаемым* в пространстве V, т. е. существует такое подпространство U пространства V, что любой вектор $v \in V$ представим как сумма $v = w + u$ для однозначно определенных векторов $w \in W$ и $u \in U$, в записи $V = W \oplus U$ — *прямая сумма* подпространств W и U. Отметим, что $V = W \oplus U \Leftrightarrow V = W + U = \{w + u : w \in W, u \in U\}$ и $W \cap U = \{0\}$.

Пример 4. Множество $\mathbb{R}$ образует полумодуль (модуль) над полуполем $\mathbb{R}^+$ всех неотрицательных действительных чисел. Подполумодули в $\mathbb{R}$ исчерпываются: нулевым модулем $\{0\}$, модулем $\mathbb{R}$, аддитивно сократимыми циклическими полумодулем $\mathbb{R}^+$ и полумодулем $\mathbb{R}^-$ всех неположительных действительных чисел. Единственным собственным полустрогим полумодулем является нулевой модуль. Поэтому $\{0\}$ будет классом 0 неодноклассовых конгруэнций на $\mathbb{R}^+$-модуле $\mathbb{R}$. Легко заметить, что единственной нетривиальной конгруэнцией на $\mathbb{R}^+$-модуле $\mathbb{R}$ будет трехклассовая конгруэнция, индуцированная разбиением $\{\mathbb{R}^- \setminus \{0\}, \{0\}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$. Минимальными множествами образующих $\mathbb{R}^+$-полумодуля $\mathbb{R}$ служат в точности двухэлементные множества $\{r, s\}$, где $r < 0, s > 0$. Любое такое множество $\{r, s\}$ линейно зависимо в смысле векторных пространств, так как $sr + (-r)s = 0$. И мы видим, что теория полумодулей над полуполем $\mathbb{R}^+$ кардинально отличается от теории векторных пространств над полем $\mathbb{R}$.

Упражнение 15. Найдите все линейно независимые множества $\mathbb{R}^+$-модуля $\mathbb{R}$. Какие из них максимально линейно независимые?

Представление полукольца эндоморфизмами полумодулей. Рассмотрим произвольный полумодуль A над фиксированным полукольцом S. Для произвольного элемента $t \in S$ зададим отображение $\alpha(t) : A \to A$ формулой: $\alpha(t)(a) = ta$ для всех $a \in A$.

Множество A^A всевозможных отображений $A \to A$ относительно поточечной операции сложения отображений: $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ для любого $a \in A$, будет коммутативным моноидом с нулевым отображением $0 : A \to \{0\}$ в качестве нейтрального элемента.

Получаем гомоморфизм коммутативных моноидов $\alpha = \alpha_A : \langle S, +, 0\rangle \to \left\langle A^A, +, 0\right\rangle$, $t \to \alpha(t)$ для каждого $t \in S$ в силу условия (1) определения полумодуля. В самом деле, для любых $s, t \in S$ имеем $\alpha(s+t) = \alpha(s) + \alpha(t)$, поскольку для каждого $a \in A$

$$\alpha(s+t)(a) = (s+t)a = sa + ta = \alpha(s)(a) + \alpha(t)(a) = (\alpha(s) + \alpha(t))(a).$$

Возникает вопрос: когда α отображает полукольцо S в $\operatorname{End} A$, т. е. когда $\alpha(t)(sa) = s(\alpha(t)(a))$ для любых $s, t \in S$ и $a \in A$? Последнее равенство равносильно равенству $(ts)a = (st)a$ в силу условия (3) определения полумодуля.

Если полукольцо S коммутативно, то α отображает S в полукольцо $\operatorname{End} A$ эндоморфизмов при любом S-полумодуле A, причем $\alpha : S \to \operatorname{End} A$ будет полукольцевым гомоморфизмом. Действительно, выше доказано, что отображение α аддитивно. Поскольку также

$$\begin{gathered}\alpha(st)(a) = (st)a = (ts)a = t(sa) = t(\alpha(s)(a)) = \\ = \alpha(t)(\alpha(s)(a)) = (\alpha(s) \cdot \alpha(t))(a),\end{gathered}$$

т. е. $\alpha(st) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$, то α есть гомоморфизм полукольца S в полукольцо $\operatorname{End} A$, сохраняющий единицу: α переводит $1 \in S$ в единицу полукольца $\operatorname{End} A$, являющуюся тождественным отображением 1_A полумодуля A в силу условия (5) определения 2.

Если $A = S$ как S-полумодуль, то при $a = 1$ равенство $(ts)a = (st)a$ влечет $ts = st$ — коммутативность полукольца S.

Тем самым доказано следующее

Предложение 5. *Для произвольного полукольца S отображение $\alpha A : S \to \operatorname{End} A$ является полукольцевым гомоморфизмом для всех S-полумодулей A тогда и только тогда, когда полукольцо S коммутативно.*

Имеет место и следующее утверждение:

Предложение 6. *Любое полукольцо S изоморфно полукольцу* $\operatorname{End} S$ *всех эндоморфизмов S-полумодуля S.*

Доказательство. Определим теперь отображение $\gamma : S \to \operatorname{End} S$, отличающееся от отображения α_S умножением на элементы t справа (а не слева). Именно для каждого $t \in S$ положим $\gamma(t) : S \to S$, где $\gamma(t)(a) = at$ для всех $a \in S$. Покажем, что γ является искомым изоморфизмом полукольца S на полукольцо $\operatorname{End} S$.

Легко видеть, $\gamma(t) \in \operatorname{End} S$, а само отображение γ, $t \to \gamma(t)$ для всех $t \in S$, осуществляет гомоморфизм полукольца S в полукольцо $\operatorname{End} S$. Так как равенство $\gamma(s) = \gamma(t)$ при $s, t \in S$ влечет $s = 1_S = \gamma(s)(1) = \gamma(t)(1) = t$, то γ инъективно. Возьмем $\varphi \in \operatorname{End} S$ и положим $t = \varphi(1)$. Тогда для любого $a \in S$ имеем $\varphi(a) = \varphi(a1) = a\varphi(1) = at = \gamma(t)(a)$, т. е. $\varphi = \gamma(t)$. Значит, мономорфизм γ сюръективен. Следовательно, γ — изоморфизм.

Наряду с процессом естественного обобщения векторных пространств, введение понятия полумодуля над полукольцом мотивируют и проясняют предложения 5 и 6.

3. Некоторые первоначальные структурные результаты

Будем рассматривать полумодули над фиксированным полукольцом S.

Зачастую в терминах класса (категории) всех S-полумодулей выражаются, характеризуются свойства самого полукольца S. Такие свойства полуколец принято называть гомологическими. Приведем простейшие связи гомологического характера.

Предложение 7. *Для любого полукольца S верны следующие утверждения:*

1) *S — кольцо $\Leftrightarrow$ все S-полумодули суть модули;*

2) *S аддитивно идемпотентно $\Leftrightarrow$ все S-полумодули идемпотентны;*

3) *S — зероидное $\Leftrightarrow$ все S-полумодули зероидные.*

Упражнение 16. Докажите предложение 7.

Для полумодулей и их гомоморфизмов (S-гомоморфизмов) имеют место общеалгебраические теоремы о гомоморфизмах и подпрямом представлении, аналогичные теоремам 4.1–4.3 [1] для полуколец.

Упражнение 17. Сформулируйте аналоги этих теорем для полумодулей.

Полумодуль A является *расширением* полумодуля B при помощи полумодуля C, если на A существует такая конгруэнция ρ, что подполумодуль $0/\rho$ полумодуля A изоморфен B и фактор-полумодуль A/ρ изоморфен C.

Справедлив аналог теоремы 4.4 [1] о расширении:

Предложение 8. *Любой полумодуль A над полукольцом S является расширением модуля $m(A)$ при помощи антимодуля $A/\rho(m(A))$.*

Классом нуля конгруэнции Бёрна $\rho(m(A))$ по подполумодулю $m(A)$ служит $m(A)$, а фактор-полумодуль $A/\rho(m(A))$ является антимодулем. Предложение 8 впервые появилось в статье [5].

Упражнение 18. Самостоятельно докажите предложение 8.

Полумодульным аналогом теоремы 4.5 [1] является

Предложение 9. *Пусть полукольцо S таково, что его кольцевая часть $r(S)$ имеет единицу. Тогда модульная часть $m(A)$ любого S-полумодуля A выделяется прямым слагаемым в A.*

Упражнение 19. Дайте подробное доказательство предложения 9.

Для зероидной части полумодулей имеет место результат, подобный предложению 8.

Предложение 10 [6]**.** *Любой полумодуль A над полукольцом S является расширением своей зероидной части $z(A)$ при помощи полумодуля $A/\rho(z(A))$ с нулевой зероидной частью.*

Упражнение 20. Самостоятельно докажите предложение 10.

Далее возьмем полутело S и рассмотрим S-полумодуль A. Элемент $a \in A$ назовем *сократимым*, если $a + x = a + y$ влечет $x = y$ при любых $x, y \in A$. Множество $c(A)$ всех сократимых элементов образует сократимый строгий подполумодуль полумодуля A, который был назван *сократимой частью* полумодуля A. На полумодуле A вводится конгруэнция τ такая, что $a\tau b$ означает, что $a + x = a + y$ равносильно $b + x = b + y$ для любых $x, y \in A$.

Упражнение 21. Покажите, что бинарное отношение τ действительно будет конгруэнцией на полумодуле A, класс нуля которой равен $c(A)$, а фактор-полумодуль A/τ идемпотентен.

Верно следующее

Предложение 11 [6]. *Любой полумодуль A над полутелом S является расширением сократимого полумодуля при помощи идемпотентного полумодуля.*

Следствием предложения 11 является хорошо известное утверждение:

Предложение 12. *Всякий простой полумодуль над полутелом либо сократим, либо идемпотентен.*

Упражнение 22. Выведите предложение 12 из предложения 11.

Список источников

1. **Вечтомов Е. М.** Что такое полукольцо // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 21–42. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

2. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000. 44 с.

3. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е.Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец : монография. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.

4. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

5. **Вечтомов Е. М.** Две общие структурные теоремы о полумодулях // *Абелевы группы и модули.* 2000. Вып. 15. С. 17–23.

6. **Вечтомов Е. М.** О трех радикалах для полумодулей // *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета.* 2005. № 13. С. 148–151

7. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Упорядоченные множества и решетки : учебное пособие. СПб: Лань, 2024. 248 с.

8. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением : учебное пособие. СПб.: Лань, 2022. 180 с.

9. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е.Н.** Линейная алгебра : учебное пособие для вузов. 2-е изд. М.: Юрайт, 2019. 150 с.

References

1. **Vechtomov E. M.** What is a semiring. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024. No 1 (50). Pp. 21–42. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M.** *Vvedeniye v polukol'tsa* [Introduction to Semirings]. Kirov: Izd-vo vyatsk. gos. ped. un-ta. 2000. 44 p. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnykh V. V.** *Elementy teorii polukolets : monografiya* [Elements of the theory of semirings : monograph]. Kirov: Izdatelstvo OOO «Raduga-PRESS». 2012. 228 p. (In Russ.)

4. **Golan J. S.** *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

5. **Vechtomov E. M.** Two general structure theorems about semimodules. *Abelevy gruppy i moduli* [Abelian groups and modules]. 2000. Vol. 15. Pp. 17–23. (In Russ.)

6. **Vechtomov E. M.** On three radicals for semimodules. *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* [Bulletin of Vyatka State University of Humanities]. 2005. No 13. Pp. 148–151. (In Russ.)

7. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki : uchebnoye posobiye* [Ordered sets and lattices : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan'. 2024. 248 p. (In Russ.)

8. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Funktsionalnaya algebra i polukoltsa. Polukoltsa s idempotentnym umnozheniyem : uchebnoye posobiye* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan'. 2022. 180 p. (In Russ.)

9. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N.** *Lineynaya algebra : uchebnoye posobiye dlya vuzov. 2-e izd.* [Linear algebra : a study guide for universities. 2nd ed.]. Moscow: Urait. 2019. 150 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeny M. Vechtomov
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Россия, Киров, ул. Московская, д. 36 / 36, Moskovskaya St., Kirov, 610000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 04.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.02.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024