

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.*

*Выпуск 2 (51)*

*Bulletin of Syktuykar University.*

*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)*

Научная статья

УДК 531

[https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2024\\_2\\_4](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_4)

## СВЯЗАННАЯ ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ОТВЕРЖДЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗДЕЛИЯ

Надежда Александровна Беляева<sup>1</sup>,

Илья Олегович Машин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сыктывкарский государственный

университет имени Питирима Сорокина, nabel24@yandex.ru

<sup>2</sup>Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

**Аннотация.** В работе рассматривается формирование поло-го цилиндрического изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости. Исследование является продолжением работ по «несвязанной» задаче и включает в себя рассмотрение влияния на процесс формирования изделия аддитивного вязкоупругого слагаемого в уравнении теплопроводности. Построена и исследована математическая модель. Для численного анализа использован метод прогонки. Представлены графические результаты исследований, отражающих распределение температуры, глубины полимеризации и напряженно-деформированного состояния формируемого изделия.

**Ключевые слова:** связанная задача, термовязкоупругость, метод прогонки, численный анализ

**Для цитирования:** Беляева Н. А., Машин И. О. Связанная вязкоупругая модель отверждения цилиндрического изделия // *Вестник*

Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2 (51). С. 4–13. [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2024\\_2\\_4](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_4)

Article

### A coupled model of viscoelastic curing of a cylindrical product

Nadezhda A. Belyaeva<sup>1</sup>, Ilya O. Mashin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,

<sup>2</sup>Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS

**Abstract.** This work considers the formation of a hollow cylindrical product under the conditions of the coupled theory of thermoviscoelasticity. The study is a continuation of work on an “uncoupled” problem and includes consideration of the influence of an additive viscoelastic term in the thermal conductivity equation on the process of product formation. A mathematical model is constructed and investigated. The finite difference method is used for numerical analysis. Graphical results of studies reflecting the distribution of temperature, polymerization depth and stress-strain state of the formed product are presented.

**Keywords:** coupled problem, thermoviscoelasticity, finite difference method, numerical analysis

**For citation:** Belyaeva N. A., Mashin I. O. A coupled model of viscoelastic curing of a cylindrical product. *Vestnik Syktyvkarского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 4–13. (In Russ.) [https://doi.org/10.34130/1992-2752\\_2024\\_2\\_4](https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_4)

### Введение

Производство композитных деталей различных форм – широко распространенный технологический процесс в современной промышленности, медицине и других областях деятельности. С физической точки зрения композиты являются вязкоупругими материалами. Изучению характеристик и получению новых свойств таких материалов посвящено множество научных работ [1–4], одной из категорий которых является так называемая «связанная» задача [5–8] — когда между температурой и возникающими в материале напряжениями учитывается прямая

зависимость. В этом случае в уравнение теплопроводности непосредственно входит вязкоупругое слагаемое. Рассмотрение подобного рода задач необходимо для более уточненного анализа поведения и получения композитных материалов.

### Материалы и методы

Рассматривается задача формирования полого цилиндрического изделия  $0 < R_1 \leq r \leq R$  в процессе полимеризации под действием неоднородного температурного поля. Изменение температуры в материале описывается уравнением теплопроводности [9] в виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + Q_{\text{п}} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (1)$$

начальные условия процесса

$$t = 0 : T|_{R_1 \leq r < R} = T^0, \quad (2)$$

граничные – условия конвективного теплообмена с окружающей средой

$$\frac{\partial T}{\partial r} - h_0(T - T^0)|_{R_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T^0)|_R = 0. \quad (3)$$

Для описания полимеризации (отверждения) [5] используется уравнение автокаталитической реакции:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_0 \exp[-U/R_u T](1 - \alpha)(\epsilon_1 + \alpha) \quad (4)$$

с начальным условием

$$t = 0 : \alpha = 0. \quad (5)$$

В формулах (1)–(5)  $c$  – теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $\sigma'_{ik}$  – вязкоупругий тензор напряжений;  $Q_{\text{п}}$  – дополнительный источник тепла, возникающий в результате реакции полимеризации;  $R_1$  – внутренний радиус цилиндра,  $R$  – внешний радиус;  $h_0, h$  – коэффициенты теплообмена с окружающей средой на внутренней и внешней границах соответственно;  $k_0$  – константа скорости полимеризации;  $U$  – энергия активации процесса полимеризации;  $R_u$  – универсальная газовая постоянная;  $T^0$  – начальная температура мономера;  $\epsilon_1$  – критерий автокаталитичности процесса полимеризации. Предполагается, что материал несжимаем, а распределение темпера-

туры и полимеризации зависит от одной пространственной координаты  $r$ . Для описания поведения композитного материала [10] используется стандартная вязкоупругая модель (рис. 1).

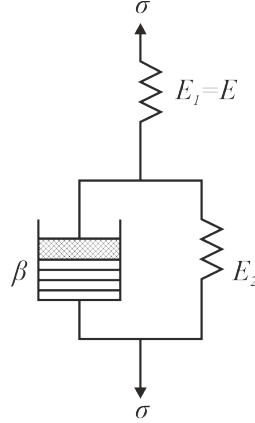


Рис. 1. Стандартная модель

Для такой модели радиальная и окружная компоненты напряжений [7; 10] находятся по следующим формулам:

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{\Phi}{r}, \sigma_{\phi\phi}(r, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (6)$$

где  $\Phi(r, t)$  – вспомогательная функция напряжений, удовлетворяющая уравнению равновесия, выведенная из уравнения совместности деформаций:

$$\Phi(r, t) = J(r, t) - \int_0^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] J(r, t) d\tau. \quad (7)$$

В формуле (7)  $\lambda = (E_1 + E_2)/\beta$ ,  $\mu = E_2/\beta$ ;  $E_1 = E = const$  – модуль упругости стандартной механической модели, зависящий от температуры;  $\beta$  – вязкость, вообще говоря, являющаяся функцией температуры и полимеризации. Функция  $J(r, t)$  [7] определяется по формуле

$$J(r, t) = -\frac{1}{r} \int_r^R F(r, t) r dr + \frac{1}{2r} F(R_1, t) (R^2 - r^2), \quad (8)$$

где, в свою очередь, функция  $F(r, t)$  определяется на основе решения уравнений (1)–(5) и имеет вид:

$$F(r, t) = -E \left( \Omega_\varphi(r, t) + \int_{R_1}^r \frac{\Omega_r(r, t) - \Omega_\varphi(r, t)}{r} dr \right). \quad (9)$$

В последнем уравнении  $\Omega_\varphi(r, t)$  и  $\Omega_r(r, t)$  — окружная и радиальная компоненты деформации, определяемые как сумма химической и температурной усадки. Подстановкой выражения для функции  $\Phi(r, t)$  (7) в (6) выводятся уравнения для компонент напряжения:

$$\begin{aligned} [l]\sigma_{rr}(r, t) &= \frac{1}{r} \left\{ J(r, t) - \int_0^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] J(r, t) d\tau \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) &= \frac{\partial J(r, t)}{\partial r} - \int_0^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] \frac{\partial J(r, t)}{\partial r} d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Зададим начальные условия для системы (10):

$$t = 0 : \sigma_{rr}(r, t) = 0; \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) = 0, \quad (11)$$

и граничные условия закрепления формируемого цилиндрического изделия:

$$\begin{aligned} [l] (\sigma_{rr}(r, t) + \sigma_{\phi\phi}(r, t))|_{(R_1, t)} &= 0, \\ \sigma_{rr}(r, t)|_{(R, t)} &= 0; \sigma_{\varphi\varphi}(r, t)|_{(R, t)} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для проведения численного анализа системы (1)–(5), (10)–(12) указанные уравнения приводятся к безразмерному виду. Далее безразмерная система решается численным методом прогонки.

### Результаты

Численный анализ задачи проводился при варьировании числа точек разбиения пространственной оси ( $n$ ), количества временных слоев ( $m$ ) и безразмерных физических параметров  $\delta, \beta, \omega$ . Линиями с точками разной формы показаны распределения температуры (рис. 2), полимеризации (рис. 3) и напряжений (рис. 4) в разные моменты безразмерного времени.

### Обсуждение

Построенная механическая модель в условиях связанной задачи термовязкоупругости позволяет учитывать влияние напряжений и дефор-

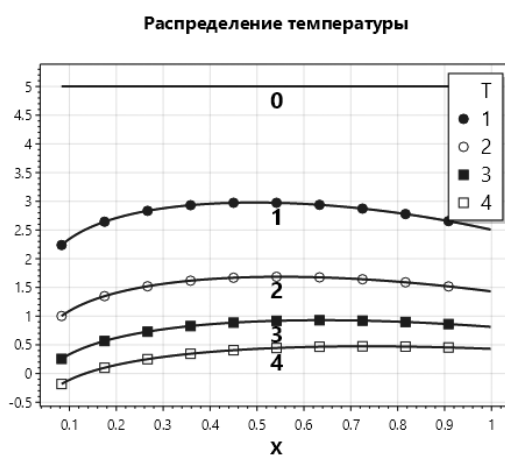


Рис. 2. Распределение температуры;  $T_0 = 5$ ,  $k_1 = 0.35$ ,  $a_0 = 0.02$ ,  $E = 0.88$ ,  $\lambda = 0.57$ ,  $\mu = 0.37$ ,  $h_0 = 0.96$ ,  $h_1 = 0.7$ ,  $k_n = 0.8$ ; 1 – 0.25, 2 – 0.5, 3 – 0.75, 4 – 1

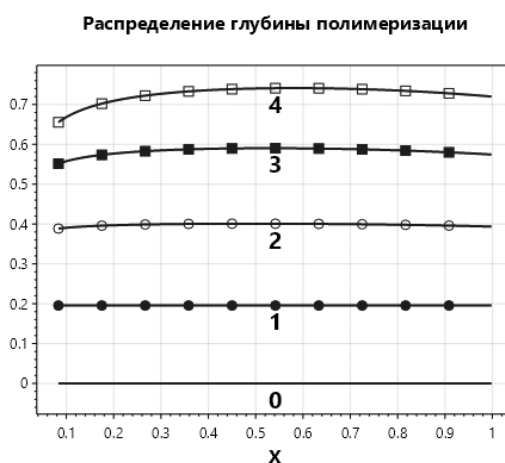


Рис. 3. Распределение глубины полимеризации; условия на рис. 2.

маций на распределение температуры формируемого образца и, наоборот, влияние температуры на распределение механических характеристик изделия. Представленное решение термовязкоупругой задачи в условиях связанной теории формирования изделия может быть использовано при выборе модели, алгоритмов и методов для анализа процессов формирования подобных изделий.

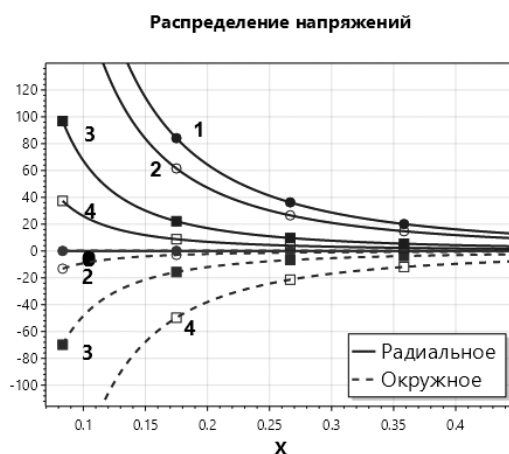


Рис. 4. Распределение напряжений; условия на рис. 2.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Демидов А. В.** Математические модели для прогнозирования деформации полимерных материалов на основе интегральных соотношений Больцмана – Вольтерра // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки.* 2006. № 4 (136). С. 35–37.
2. **Карташов Э. М., Нагаева И. А., Беневоленский С. Б.** Обобщенная модель термовязкоупругости в теории теплового удара // *Вестник МИТХТ им. М. В. Ломоносова.* 2014. Т. 9. № 3. С. 105–111.
3. **Орлов В. П.** Исследование математической модели термовязкоупругости // *Доклады Академии наук.* 1995. Т. 343. № 3. С. 320–322.
4. **Ошмян В. Г., Патлажан С. А., Remond Y.** Принципы структурно-механического моделирования полимеров и композитов // *Высокомолекулярные соединения. Серия А.* 2006. Т. 48. № 9. С. 1691–1702.
5. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование отверждения изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник* / Белорусский национальный технический университет; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). Минск: БНТУ, 2020. Вып. 35. С. 139–145.

6. **Веселовский В. Б., Сяев А. В.** Математическое моделирование и решение связанных задач термовязкоупругости для двухфазных тел // *Теоретическая и прикладная механика*. 2002. № 35. С. 93–100.
7. **Беляева Н. А., Клычников Л. В.** Метод интегрального уравнения в задаче объемного отверждения // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика*. 1996. № 2. С. 125–134.
8. **Лычев С. А.** Связанная динамическая задача термовязкоупругости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2008. № 5. С. 95–113.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика : учебное пособие : в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.
10. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

## References

1. **Demidov A. V.** Mathematical models for predicting the deformation of polymer materials based on the integral Boltzmann – Volterra relations. *Izvestiya vyshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki* [News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Technical sciences]. 2006. No 4 (136). Pp. 35–37. (In Russ.)
2. **Kartashov E. M., Nagaeva I. A., Benevolenskiy S. B.** Generalized model of thermoviscoelasticity in the theory of heat stroke. *Vestnik MITHT im. M.V. Lomonosova* [Moscow State University of Fine Chemical Technologies named after M. V. Lomonosov]. 2014. Vol. 9. No 3. Pp. 105–111. (In Russ.)
3. **Orlov V. P.** Investigation of the mathematical model of thermoviscoelasticity. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. 1995. Vol. 343. No 3. Pp. 320–322. (In Russ.)



4. **Oshmyan V. G., Patlazhan S. A., Remond Y.** Principles of structural and mechanical modeling of polymers and composites. *Vysokomolekulyarnie soedineniya. Seriya A* [High molecular weight compounds. Series A]. 2006. Vol. 48. No 9. Pp. 1691–1702. (In Russ.)
5. **Belyaeva N. A.** Mathematical modeling of product curing under the conditions of the related theory of thermoviscoelasticity. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunarodnyi nauchno-thenicheskii sbornik* [Theoretical and Applied Mechanics: an international scientific and technical collection]. Minsk: The Belarusian National Technical University, 2020. No 35. Pp. 139–145. (In Russ.)
6. **Veselovskiy V. B., Syasev A. V.** Mathematical modeling and solution of related problems of thermoviscoelasticity for two-phase bodies. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. 2002. No 35. Pp. 93–100. (In Russ.)
7. **Belyaeva N. A., Klychnikov L. V.** The method of the integral equation in the problem of volumetric curing. *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 1996. No 2. Pp. 125–134. (In Russ.)
8. **Lychev S. A.** The related dynamic problem of thermoviscoelasticity. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics]. 2008. No 5. Pp. 95–113. (In Russ.)
9. **Landau L. D., Lifshitz E. M.** *Teoreticheskaya fizika : Uchebnoye posobiye : v 10 t. T. VI. Gidrodinamika* [Theoretical physics : a textbook : in 10 vols. Vol. VI. Hydrodynamics]. 3rd ed., reprint. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (In Russ.)
10. **Rabotnov Yu. N.** *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tvordykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Беляева Надежда Александровна / Nadezhda A. Belyaeva

д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерных наук / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Машин Илья Олегович / Иуа О. Mashin

аспирант / postgraduate

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS

167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 4, Oplesnin str., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 17.05.2024

Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 24.05.2024

Принято к публикации / Accepted for publication 27.05.2024