ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

2(51) выпуск 24

Вестник Сыктывкарского университета	Серия 1:	12+
Основан в 1995 году	*Математика* *Механика* *Информатика*	ISSN 1992-2752
Выходит 4 раза в год		Выпуск 2 (51) 2024

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2024. — 2 (51). 2024. — 90 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по направлению «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

Журнал также публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)».

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is in the list of peer-reviewed scientific journals which publish the main scientific results of dissertations for the scientific degree of Candidate of Sciences, for the scientific degree of Doctor of Sciences, in the direction «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)»

The journal also publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)»

Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.

Адрес редакции

167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55

Тел. (8212)390-308.

Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Содержание

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 531
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_4

СВЯЗАННАЯ ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ОТВЕРЖДЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗДЕЛИЯ

Надежда Александровна Беляева[1],
Илья Олегович Машин[2]
[1]Сыктывкарский государственный
университет имени Питирима Сорокина, nabel24@yandex.ru
[2]Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Аннотация. В работе рассматривается формирование полого цилиндрического изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости. Исследование является продолжением работ по «несвязанной» задаче и включает в себя рассмотрение влияния на процесс формирования изделия аддитивного вязкоупругого слагаемого в уравнении теплопроводности. Построена и исследована математическая модель. Для численного анализа использован метод прогонки. Представлены графические результаты исследований, отражающих распределение температуры, глубины полимеризации и напряженно-деформированного состояния формируемого изделия.

Ключевые слова: связанная задача, термовязкоупругость, метод прогонки, численный анализ

Для цитирования: Беляева Н. А., Машин И. О. Связанная вязкоупругая модель отверждения цилиндрического изделия // *Вестник*

Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2 (51). С. 4−13. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_4

Article

A coupled model of viscoelastic curing of a cylindrical product

Nadezhda A. Belyaeva[1], Ilya O. Mashin[2]
[1]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,
[2]Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS

Abstract. This work considers the formation of a hollow cylindrical product under the conditions of the coupled theory of thermoviscoelasticity. The study is a continuation of work on an "uncoupled" problem and includes consideration of the influence of an additive viscoelastic term in the thermal conductivity equation on the process of product formation. A mathematical model is constructed and investigated. The finite difference method is used for numerical analysis. Graphical results of studies reflecting the distribution of temperature, polymerization depth and stress-strain state of the formed product are presented.

Keywords: coupled problem, thermoviscoelasticity, finite difference method, numerical analysis

For citation: Belyaeva N. A., Mashin I. O. A coupled model of viscoelastic curing of a cylindrical product. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 4−13. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_4

Введение

Производство композитных деталей различных форм – широко распространенный технологический процесс в современной промышленности, медицине и других областях деятельности. С физической точки зрения композиты являются вязкоупругими материалами. Изучению характеристик и получению новых свойств таких материалов посвящено множество научных работ [1–4], одной из категорий которых является так называемая «связанная» задача [5–8] — когда между температурой и возникающими в материале напряжениями учитывается прямая зависимость. В этом случае в уравнение теплопроводности непосредственно входит вязкоупругое слагаемое. Рассмотрение подобного рода задач необходимо для более уточненного анализа поведения и получения композитных материалов.

Материалы и методы

Рассматривается задача формирования полого цилиндрического изделия $0 < R_1 \leq r \leq R$ в процессе полимеризации под действием неоднородного температурного поля. Изменение температуры в материале описывается уравнением теплопроводности [9] в виде:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\Delta T + \sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + Q_{\text{п}}\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{1}$$

начальные условия процесса

$$t = 0 : T\,|_{R_1 \leq r < R} = T^0, \tag{2}$$

граничные – условия конвективного теплообмена с окружающей средой

$$\frac{\partial T}{\partial r} - h_0(T - T^0)\,|_{R_1} = 0; \frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T^0)\,|_{R} = 0. \tag{3}$$

Для описания полимеризации (отверждения) [5] используется уравнение автокаталитической реакции:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = k_0 \exp\left[-U/R_u T\right](1-\alpha)(\epsilon_1 + \alpha) \tag{4}$$

с начальным условием

$$t = 0 : \alpha = 0. \tag{5}$$

В формулах (1)–(5) c — теплоемкость, ρ — плотность, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, σ'_{ik} — вязкоупругий тензор напряжений; $Q_{\text{п}}$ — дополнительный источник тепла, возникающий в результате реакции полимеризации; R_1 — внутренний радиус цилиндра, R — внешний радиус; h_0, h — коэффициенты теплообмена с окружающей средой на внутренней и внешней границах соответственно; k_0 — константа скорости полимеризации; U — энергия активации процесса полимеризации; R_u — универсальная газовая постоянная; T^0 — начальная температура мономера; ε_1 — критерий автокаталитичности процесса полимеризации. Предполагается, что материал несжимаем, а распределение температуры и полимеризации зависит от одной пространственной координаты r. Для описания поведения композитного материала [10] используется стандартная вязкоупругая модель (рис. 1).

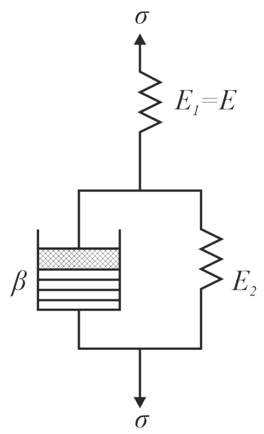

Рис. 1. Стандартная модель

Для такой модели радиальная и окружная компоненты напряжений [7; 10] находятся по следующим формулам:

$$\sigma_{rr}(r,t) = \frac{\Phi}{r}, \sigma_{\phi\phi}(r,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{6}$$

где $\Phi(r,t)$ – вспомогательная функция напряжений, удовлетворяющая уравнению равновесия, выведенная из уравнения совместности деформаций:

$$\Phi(r,t) = J(r,t) - \int_0^t (\lambda - \mu)\exp\left[-\lambda(t-\tau)\right] J(r,t)d\tau. \tag{7}$$

В формуле (7) $\lambda = (E_1 + E_2)/\beta$, $\mu = E_2/\beta$; $E_1 = E = const$ – модуль упругости стандартной механической модели, зависящий от температуры; β – вязкость, вообще говоря, являющаяся функцией температуры и полимеризации. Функция $J(r,t)$ [7] определяется по формуле

$$J(r,t) = -\frac{1}{r}\int_r^R F(r,t)rdr + \frac{1}{2r}F(R_1,t)(R^2 - r^2), \tag{8}$$

где, в свою очередь, функция $F(r,t)$ определяется на основе решения уравнений (1)–(5) и имеет вид:

$$F(r,t) = -E\left(\Omega_\varphi(r,t) + \int_{R_1}^{r} \frac{\Omega_r(r,t) - \Omega_\varphi(r,t)}{r} dr\right). \tag{9}$$

В последнем уравнении $\Omega_\varphi(r,t)$ и $\Omega_r(r,t)$ — окружная и радиальная компоненты деформации, определяемые как сумма химической и температурной усадки. Подстановкой выражения для функции $\Phi(r,t)$ (7) в (6) выводятся уравнения для компонент напряжения:

$$\begin{gathered}
[l]\sigma_{rr}(r,t) = \frac{1}{r}\left\{J(r,t) - \int_0^t (\lambda-\mu)\exp\left[-\lambda(t-\tau)\right] J(r,t) d\tau\right\}, \\
\sigma_{\varphi\varphi}(r,t) = \frac{\partial J(r,t)}{\partial r} - \int_0^t (\lambda-\mu)\exp\left[-\lambda(t-\tau)\right] \frac{\partial J(r,t)}{\partial r} \partial\tau.
\end{gathered} \tag{10}$$

Зададим начальные условия для системы (10):

$$t = 0 : \sigma_{rr}(r,t) = 0; \sigma_{\varphi\varphi}(r,t) = 0, \tag{11}$$

и граничные условия закрепления формируемого цилиндрического изделия:

$$\begin{gathered}
[l]\ \left(\sigma_{rr}(r,t) + \sigma_{\phi\phi}(r,t)\right)\big|_{(R_1,t)} = 0, \\
\sigma_{rr}(r,t)\big|_{(R,t)} = 0;\ \sigma_{\varphi\varphi}(r,t)\big|_{(R,t)} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Для проведения численного анализа системы (1)–(5), (10)–(12) указанные уравнения приводятся к безразмерному виду. Далее обезразмеренная система решается численным методом прогонки.

Результаты

Численный анализ задачи проводился при варьировании числа точек разбиения пространственной оси (n), количества временных слоев (m) и безразмерных физических параметров δ, β, ω. Линиями с точками разной формы показаны распределения температуры (рис. 2), полимеризации (рис. 3) и напряжений (рис. 4) в разные моменты безразмерного времени.

Обсуждение

Построенная механическая модель в условиях связанной задачи термовязкоупругости позволяет учитывать влияние напряжений и дефор-

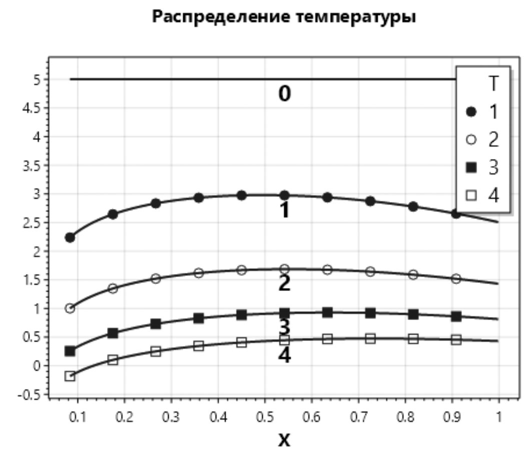

Рис. 2. Распределение температуры; $T0 = 5$, $k1 = 0.35$, $a0 = 0.02$, $E = 0.88$, $\lambda = 0.57$, $\mu = 0.37$, $h0 = 0.96$, $h1 = 0.7$, $k_n = 0.8$;1 – 0.25, 2 – 0.5, 3 – 0.75, 4 – 1

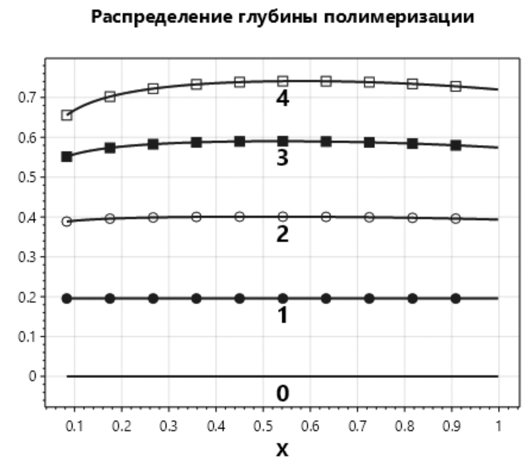

Рис. 3. Распределение глубины полимеризации; условия на рис. 2.

маций на распределение температуры формируемого образца и, наоборот, влияние температуры на распределение механических характеристик изделия. Представленное решение термовязкоупругой задачи в условиях связанной теории формирования изделия может быть использовано при выборе модели, алгоритмов и методов для анализа процессов формирования подобных изделий.

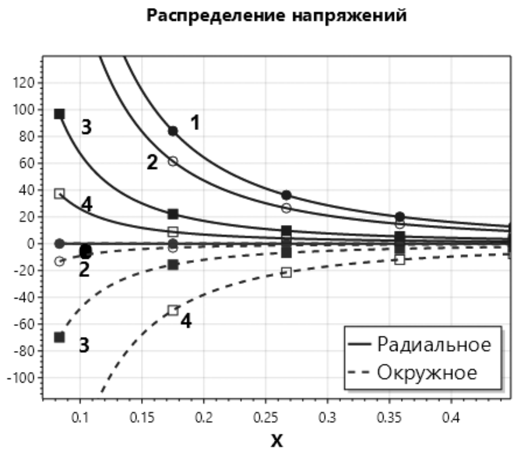

Рис. 4. Распределение напряжений; условия на рис. 2.

Список источников

1. **Демидов А. В.** Математические модели для прогнозирования деформации полимерных материалов на основе интегральных соотношений Больцмана – Вольтерра // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки.* 2006. № 4 (136). С. 35–37.

2. **Карташов Э. М., Нагаева И. А., Беневоленский С. Б.** Обобщенная модель термовязкоупругости в теории теплового удара // *Вестник МИТХТ им. М. В. Ломоносова.* 2014. Т. 9. № 3. С. 105–111.

3. **Орлов В. П.** Исследование математической модели термовязкоупругости // *Доклады Академии наук.* 1995. Т. 343. № 3. С. 320–322.

4. **Ошмян В. Г., Патлажан С. А., Remond Y.** Принципы структурно-механического моделирования полимеров и композитов // *Высокомолекулярные соединения. Серия А.* 2006. Т. 48. № 9. С. 1691–1702.

5. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование отверждения изделия в условиях связанной теории термовязкоупругости // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник* / Белорусский национальный технический университет; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). Минск: БНТУ, 2020. Вып. 35. С. 139–145.

6. **Веселовский В. Б., Сясев А. В.** Математическое моделирование и решение связанных задач термовязкоупругости для двухфазных тел // *Теоретическая и прикладная механика.* 2002. № 35. С. 93–100.

7. **Беляева Н. А., Клычников Л. В.** Метод интегрального уравнения в задаче объемного отверждения // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 1996. № 2. С. 125–134.

8. **Лычев С. А.** Связанная динамическая задача термовязкоупругости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* 2008. № 5. С. 95–113.

9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика : учебное пособие : в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.

10. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

References

1. **Demidov A. V.** Mathematical models for predicting the deformation of polymer materials based on the integral Boltzmann – Volterra relations. *Izvestiya vyshikh uchebnih zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki* [News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Technical sciences]. 2006. No 4 (136). Pp. 35–37. (In Russ.)

2. **Kartashov E. M., Nagaeva I. A., Benevolenskiy S. B.** Generalized model of thermoviscoelasticity in the theory of heat stroke. *Vestnik MITHT im. M.V. Lomonosova* [Moscow State University of Fine Chemical Technologies named after M. V. Lomonosov]. 2014. Vol. 9. No 3. Pp. 105–111. (In Russ.)

3. **Orlov V. P.** Investigation of the mathematical model of thermoviscoelasticity. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. 1995. Vol. 343. No 3. Pp. 320–322. (In Russ.)

4. **Oshmyan V. G., Patlazhan S. A., Remond Y.** Principles of structural and mechanical modeling of polymers and composites. *Vysokomolekulyarnie soedineniya. Seriya A* [High molecular weight compounds. Series A]. 2006. Vol. 48. No 9. Pp. 1691–1702. (In Russ.)

5. **Belyaeva N. A.** Mathematical modeling of product curing under the conditions of the related theory of thermoviscoelasticity. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezdhunarodnyi nauchno-thenicheskii sbornik* [Theoretical and Applied Mechanics: an international scientific and technical collection]. Minsk: The Belarusian National Technical University, 2020. No 35. Pp. 139–145. (In Russ.)

6. **Veselovskiy V. B., Syasev A. V.** Mathematical modeling and solution of related problems of thermoviscoelasticity for two-phase bodies. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. 2002. No 35. Pp. 93–100. (In Russ.)

7. **Belyaeva N. A., Klychnikov L. V.** The method of the integral equation in the problem of volumetric curing. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 1996. No 2. Pp. 125–134. (In Russ.)

8. **Lychev S. A.** The related dynamic problem of thermoviscoelasticity. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics]. 2008. No 5. Pp. 95–113. (In Russ.)

9. **Landau L. D., Lifshitz E. M.** *Teoreticheskaya fizika : Uchebnoye posobiye : v 10 t. T. VI. Gidrodinamika* [Theoretical physics : a textbook : in 10 vols. Vol. VI. Hydrodynamics]. 3rd ed., reprint. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (In Russ.)

10. **Rabotnov Yu. N.** *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tvordykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Беляева Надежда Александровна / Nadezhda A. Belyaeva
д.ф.-м.н., доцент, профессор кафеды прикладной математики и компьютерных наук / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Машин Илья Олегович / Ilya O. Mashin
аспирант / postgraduate
Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS
167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 4, Oplesnin str., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 17.05.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 24.05.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 27.05.2024

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_14

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ СРЕДСТВАМИ PYTHON

Анатолий Альбертович Дуркин,
Андрей Васильевич Ермоленко,
Надежда Олеговна Котелина,
Оксана Игоревна Туркова
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, ea74@list.ru

Аннотация.

Простота синтаксиса и большое количество библиотек языка Python делают его незаменимым инструментом при проведении лабораторных работ по ряду предметов, упрощая рутинные действия при визуализации численных расчетов.

В статье авторы показывают примеры использования библиотек Python для построения поверхностей и интерполяционных кривых, анимации численных методов.

Ключевые слова: Python, визуализация, численный эксперимент, анимация

Для цитирования: Дуркин А. А., Ермоленко А. В., Котелина Н. О., Туркова О. И. Визуализация численных расчетов средствами Python // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 14–26. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_14

Article

Visualization of Numerical Calculations with Python

Anatolij A. Durkin, Andrey. V. Yermolenko,
Nadezhda O. Kotelina, Oksana. I. Turkova
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

Abstract. The simplicity of the syntax and the large number of Python libraries make it an indispensable tool for conducting laboratory work on a number of subjects, simplifying routine operations when visualizing numerical calculations.

In the article, the authors show examples of using Python libraries for plotting surfaces and interpolation curves, animating numerical methods.

Keywords: Python, visualization, numerical experiment, animation

For citation: Durkin A. A., Yermolenko A. V., Kotelina N. O., Turkova O. I. Visualization of Numerical Calculations with Python. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 14–26. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_14

1. Введение

Под визуализацией данных понимают их графическое представление для более эффективной работы. Визуализация широко используется при проведении научных и статистических исследований. Это обусловлено, например, тем, что визуальная информация является основной для человека. Так, исследования показывают, что 90 % информации человек воспринимает через зрение [1]. Кроме того, визуализация данных в значительной степени способствует выявлению скрытых в них закономерностей.

В статье [2] отмечается, что основополагающим фактором развития визуализации в представлении результатов расчетов является интенсивное развитие высокопроизводительных и параллельных вычислений. Также авторы статьи утверждают, что «основополагающую роль для исследования, обработки, трактовки и верификации численных результатов будет играть визуализация данных».

Кроме высокопроизводительных вычислений в настоящее время большой упор делается на развитие интерфейсов; создать график, диаграмму, анимацию, чарт–бар — это нередко дело нескольких кликов. При этом создаются специальные языки, например, R, F# [1; 3; 4], ориентированные на визуализацию статистической информации. Данные языки удобны для манипуляции с большими данными, но они являются достаточно узкоспециализированными и обладают достаточно высоким порогом вхождения.

В последнее время широкую популярность получил язык программирования Python [5], который достаточно прост в изучении, но является мощным в реализации визуализации как анализа данных, так и проведения численных расчетов.

Цель данной статьи — обосновать выбор языка программирования Python в качестве первого при обучении студентов кафедры прикладной математики и компьютерных наук основам программирования, поскольку одним из важнейших навыков студентов-математиков является умение графически представить результаты вычислений. Авторы приводят примеры программ, которые показывают соответствующие возможности языка Python.

2. Материалы и методы

Данное исследование построено на базе теоретического анализа научно-технической литературы, посвященной современным инструментам визуализации численных расчетов, возможностям визуализации библиотек языка Python, а также методической литературы по вопросам применения средств визуализации в процессе преподавания математики. Авторами разработаны задания для лабораторных работ, которые апробированы в процессе преподавания дисциплин «Численные методы», «Технологии программирования», «Алгоритмы и алгоритмические языки», «Визуализация численных расчетов», «Анализ данных», «Компьютерная геометрия» студентам направлений подготовки «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки».

3. Результаты и обсуждение

3.1. Визуализация в численных методах

Интерес к языку Python на кафедре прикладной математики и компьютерных наук появился при необходимости визуализации численных расчетов. Так до использования языка Python на первом занятии по численным методам разбирали эффективный вывод графика средствами языка C или Pascal, а уже потом переходили непосредственно к изучению предмета. Еще одним способом визуализации было использование системы компьютерной математики Maple [6] путем загрузки готовых расчетов через файл, что замедляло проведение численного эксперимента.

Python же предлагает мощные интегрированные инструменты для визуализации данных, такие как Matplotlib, Seaborn и Plotly. Эти библиотеки позволяют студентам легко создавать различные виды графиков и диаграмм, которые помогают лучше понять и проанализировать полученные результаты. Достаточно определить списки x, y, содержащие значения узлов, а затем ввести код, показанный на листинге 1, чтобы построить график.

Листинг 1

Вывод графика функции по узлам

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Реализуем численный метод

plt.plot(x, y)
plt.grid()
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.show()
```

Также легко обучающиеся могут построить графики функций, поверхности решений дифференциальных уравнений, а также визуализировать динамику систем. В листинге 2 показан способ рисования поверхности в Python с использованием библиотеки Matplotlib.

Листинг 2

Построение поверхностей

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Окончание листинга 2

```
# Реализуем численный метод
...

# Создаем данные для поверхности
X, Y = np.meshgrid(x, y)  # x, y - списки значений по осям x
                          # и y
u = np.array(u)  # u - двумерный массив, результат расчетов

# Создаем фигуру и оси
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, projection="3d")

# Рисуем поверхность
surf = ax.plot_surface(X, Y, u, cmap="viridis")

# Показываем график
plt.show()
```

В рамках проведения занятий по дисциплине «Технологии программирования» используется анимация графиков библиотеки Matplotlib языка программирования Python. Студентам демонстрируется готовый график, объясняется, как вычислить точки графика при помощи цикла, наглядно показывается построение полученных точек на плоскости при помощи анимации. Существует несколько методов реализации анимации в библиотеке Matplotlib. Рассмотрим примеры построения спирали Архимеда.

Полная перерисовка графика

В этом случае необходимо включить интерактивный режим plt.ion(), чтобы программа могла перерисовывать график, не закрывая окно. Внутри цикла for для получения точек x и y нам необходимо сначала очищать данные графика plt.clf(), чтобы добавлялись данные каждого последующего шага. Для вывода на экран полученных точек используется функция рисования plt.draw() и функция обработки данных каждого шага plt.gcf().canvas.flush_events(). Для того чтобы график отображался на плоскости в динамике, необходима задержка по времени, которую можно установить функцией time.sleep() из библиотеки time.

После этого мы выходим из цикла for. Теперь нам нужно закрыть интерактивный режим и вывести на экран получившийся анимированный график. Стоит отметить, что, если не определить интервалы координатных осей, то до тех пор, пока график не будет построен, оси самостоятельно будут подстраиваться под график на каждом шаге (рис. 1).

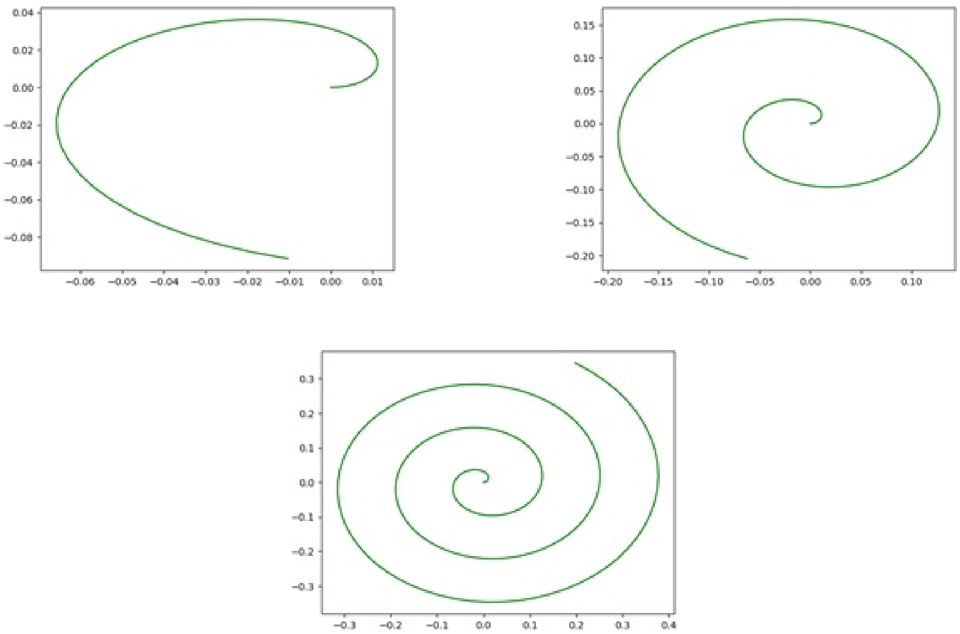

Рис. 1. Спираль Архимеда в разные моменты времени

Данный способ достаточно медленно обрабатывает данные, поэтому чаще графики анимируют при помощи специального класса FuncAnimation.

Анимация графика с помощью вызова класса FuncAnimation библиотеки Matplotlib

Здесь используется функция обновления данных графика, которая передается в класс. Первое, что необходимо сделать, — определить дорисовывающую график функцию, которая зависит от количества обновляемых кадров:

```
def spiral(i):
    # архимедова спираль
    th = i * 0.1
```

```
    r = k * th  # формула спирали в полярных координатах
    x = r * math.cos(th)  # перевод в декартовы координаты - x
    y = r * math.sin(th)  # перевод в декартовы координаты - y

    plt.plot(x, y, "o", color="green")  # рисуем новую точку
```

Далее необходимо определить отображаемую фигуру fig = plt.figure() и вызывать класс анимации из библиотеки, где fig — это фигура, которую строим, spiral — функция обновления данных, frames — изменяющийся параметр от кадра к кадру, interval — интервал, с которым обновляется кадр, repeat — повторение анимации после прорисовки:

```
anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=360,
                               interval=10, repeat=False)    ,
```

и показываем получившееся на экран с помощью вызова plt.show(). Также в этом классе можно сохранять полученные анимированные графики в файл функцией anim.save("sp_py10.gif").

В численных методах класс FuncAnimation также оказывается полезен для анимирования расчетов, например, уравнения колебаний струны (см. листинг 3).

Листинг 3

Реализация анимации при помощи модуля animation

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

# Реализуем численный метод
...

# Функция для создания анимации
def animate(i):
    plt.cla()  # Очищаем график перед каждым обновлением
    plt.ylim(-1, 1)
    plt.grid()
    plt.plot(u[i])  # Рисуем часть графика
```

Окончание листинга 3

```
# Данные для графика
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)

# Запуск анимации
anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=len(u), \
    interval=100)
plt.show()
```

3.2. Решение задач интерполяции при помощи библиотек Python

Во многих практических задачах требуется построить гладкую кривую линию, проходящую через заданные точки [7]. В рамках курсов численных методов и компьютерной геометрии студентам направления «Прикладная математика и информатика» обычно предлагают решать задачу интерполяции и строить графики интерполяционных полиномов Лагранжа, Ньютона («глобальная интерполяция»), или сплайны («локальная интерполяция») [8]. Для проверки корректности построенных кривых можно использовать библиотеку SciPy и модуль scipy.interpolate.

Приведем пример построения кубического сплайна Эрмита, проходящего через заданную последовательность точек и имеющего в этих точках заданные производные. Пусть радиус-векторы этих точек равны p_i, векторы производных радиус-вектора кривой в этих точках равны q_i, а значения параметра в этих точках равны t_i, где $i = 0, 1, 2, ..., n$ — номера точек. На участке между точками p_i и p_{i+1} составной сплайн Эрмита является полиномом третьей степени местного параметра w:

$$r_i(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3,$$

где $w \in [0, 1]$.

Векторы $a_j, j = 0, 1, 2, 3$ на каждом участке найдем из следующих условий на границе участка кривой:

$$r_i(0) = p_i, r_i(1) = p_{i+1},$$

$$r_i'(0) = q_i, r_i'(1) = q_{i+1}.$$

После решения последней системы уравнений получим радиус-вектор сплайна Эрмита в виде

$$r(t) = p_i(1-3w^2+2w^3)+p_{i+1}(3w^2-2w^3)+q_i(w-2w^2+w^3)+q_{i+1}(-w^2+w^3),$$

где p_i, p_{i+1} — радиус-векторы граничных точек, q_i, q_{i+1} — векторы производных радиус-вектора кривой в этих точках.

За построение сплайна Эрмита в модуле scipy.interpolate отвечает функция CubicHermiteSpline. Пример ее использования приведен в листинге 4.

Листинг 4

Построение интерполяционного сплайна Эрмита

```
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicHermiteSpline
import matplotlib.pyplot as plt

def f(p0, p1, q0, q1, t):
    return p0*(2*t**3 - 3*t**2 + 1 ) + p1*(-2*t**3 + 3*t**2) +\
       q0*(t**3 - 2*t**2 + t) + q1*(t**3-t**2)
def x():
    temp = []
    for i in range(n):
        temp = temp + [f(px[i], px[(i+1) % n],\
            qx[i], qx[(i+1) % n], j/10) for j in range(0, 11)]
    return temp
def y():
    temp = []
    for i in range(n):
        temp = temp + [f(py[i], py[(i+1) % n],\
            qy[i], qy[(i+1) % n], j/10) for j in range(0, 11)]
    return temp
n = 6
p = np.array([[0, 0],[0, 60], [50, 60], [50, 40], [20, 40], \
             [20, 0], [0, 0]], dtype = float)
fig, ax = plt.subplots()

t = np.arange(0, n + 1, 1)
```

Окончание листинга 4

```
q = np.array([(p[(i + 1) % n] - p[(i - 1 + n) % n])/2 \
for i in range(0, n + 1))])

px = [el[0] for el in p]
py = [el[1] for el in p]
qx = [el[0] for el in q]
qy = [el[1] for el in q]

poly = CubicHermiteSpline(t, p, q)
ax.set_aspect("equal")
xx = np.linspace(0, n, 150)
ax.plot(poly(xx)[:,0], poly(xx)[:,1], "b-", lw=1, alpha=0.7, \
        label="Функция SciPy")
ax.scatter(x(), y(),  label="Формула")
ax.axis("off")
legend = ax.legend(loc="lower right",  fontsize="medium")
plt.show()
```

В листинге 4 приведены два способа построения интерполяционного сплайна Эрмита, студенты могут непосредственно реализовать построение сплайна по формулам и использовать готовую функцию для проверки правильности формул. Результат работы показан на рис. 2.

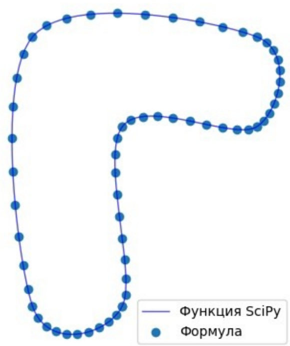

Рис. 2. Пример построения сплайна Эрмита

4. Заключение

Python является отличным выбором для визуализации результатов численных расчетов на занятиях, связанных с численными методами, благодаря своей универсальности и доступности специализированных библиотек, что позволяет студентам легко создавать профессиональные графики и диаграммы, делая процесс обучения более наглядным и интересным.

Представленная работа поможет исследователям, использующим математическое моделирование, обоснованно выбирать средства визуализации численных расчетов.

Список источников

1. **Бакунова О. М., Буркин А. В., Протько Д. Э. и др.** Визуализация данных на .NET F# // *Web of Scholar.* 2018. Т. 1. № 4 (22). С. 19–22.

2. **Бондарев А., Галактионов В.** Современные направления развития визуализации данных в вычислительной механике жидкости и газа // *Научная визуализация.* 2013. Т. 5. № 4. С. 18–30.

3. **Акберова Н. И., Козлова О. С.** Основы анализа данных и программирования в R : учебно-методическое пособие. Казань: Альянс, 2017. 33 с.

4. **Егошин В. Л., Иванов С. В., Саввина Н. В. и др.** Визуализация биомедицинских данных с использованием программной среды R // *Экология человека.* 2018. № 8. С. 52–64.

5. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

6. **Дьяконов В. П.** Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2006. 720 с.

7. **Голованов Н. Н.** Геометрическое моделирование. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. 472 с.

8. **Piegl L., Tiller, W.** The NURBS Book. Monographs in Visual Communications. New York: Springer, 1995. 646 p.

References

1. **Bakunova O. M., Burkin A. V., Protko D. E. at al.** Data visualisation with .NET F#. *Web of Scholar*. 2018. Vol. 1. No 4 (22). Pp. 19–22. (In Russ.)

2. **Bondarev A., Galaktionov V.** Modern development directions of data visualization in computational mechanics of fluid and gase. *Nauchnaya vizualizatsiya* [Science visualisation]. 2013. Vol. 5. No 4. Pp. 18–30. (In Russ.)

3. **Akberova N. I., Kozlova O. S.** *Osnovy analiza dannyh i programmirovaniya v R : uchebno-metodicheskoe posobie* [Fundamentals of data analysis and programming in R : a textbook]. Kazan': Al'yans, 2017. 33 p. (In Russ.)

4. **Egoshin V. L., Ivanov S. V., Savvina N. V. at al.** Visualization of biomedical data using the R software environment. *Ekologiya cheloveka* [Human ecology]. 2018. No 8. Pp. 52–64. (In Russ.)

5. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2019. No 4 (33). Pp. 86–95. (In Russ.)

6. **D'yakonov, V. P.** *Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii* [Maple 9.5/10 in mathematics, physics and education]. Moscow: SOLON-PRESS, 2006. 720 p. (In Russ.)

7. **Golovanov N. N.** *Geomyetricheskoe modelirovaniye* [Geometry modeling]. Moscow: *Izdatyelstvo Phisiko-matematicheskoy lityeratury* [Publishing House of physical and mathematical literature], 2002. 472 p. (In Russ.)

8. **Piegl L., Tiller W.** *The NURBS Book. Monographs in Visual Communications.* New York: Springer, 1995. 646 p.

Сведения об авторах / Information about authors
Дуркин Анатолий Альбертович / Anatolij A. Durkin
аспирант / aspirant
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Ермоленко Андрей Васильевич / Andrei V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Котелина Надежда Олеговна / Nadezhda O. Kotelina
к.ф.-м.н., доцент кафеды прикладной математики и компьютерных наук / Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Туркова Оксана Игоревна / Oksana I. Turkova
аспирант / aspirant
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.09.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 12.09.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 18.09.2024

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

MATHEMATICS EDUCATION

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 378.016, 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_27

ЧТО ТАКОЕ ПОЛУМОДУЛЬ[1]

Евгений Михайлович Вечтомов
Вятский государственный университет, vecht@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются начала теории полумодулей над полукольцом. Определены начальные понятия. Сформулированы некоторые структурные теоремы о полумодулях. Материал носит математико-методический характер, включает систему упражнений учебной направленности.

Ключевые слова: полумодуль над полукольцом, изучение теории полуколец и полумодулей

Для цитирования: Вечтомов Е. М. Что такое полумодуль // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 27–43. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_27

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117

Article

What is a semimodule

Evgeny M. Vechtomov
Vyatka State University, vecht@mail.ru

Abstract. The article deals with the beginnings of the theory of semimodules over a semiring. It considers initial properties and formulates some structure theorems about semimodules. The material is of a mathematical and methodological nature and includes a system of educational exercises.

Keywords: a semimodule over a semiring, study of the theory of semirings and semimodules

For citation: Vechtomov E. M. What is a semimodule. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 27–43. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_27

Введение

Теория полуколец и полумодулей есть развитие и расширение теории колец и модулей, которая, в свою очередь, представляет собой обобщение классической теории векторных пространств под полем.

Статья является элементарным введением в теорию полуколец и полумодулей, служит продолжением нашей вводной работы о полукольцах [1], информацией из которой будем свободно пользоваться. Материал предназначен студентам естественно-математических направлений подготовки. Исходные понятия и результаты о полукольцах и полумодулях можно найти в брошюре [2], книгах [3; 4], а также в статьях [5; 6]. Информацию об упорядоченных множествах можно найти в учебном пособии [7].

Полумодули над полукольцами требуют дальнейшего изучения. Так, в Заключении книги [8] поставлена проблема исследования полумодулей над мультипликативно идемпотентными полукольцами.

1. Начальные понятия

Введем исходные понятия о полумодулях над полукольцами.

Определение 1. *Полукольцом* (с нулем и единицей) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ и выделенными элементами *нуль* 0 и *единица* 1, удовлетворяющими следующим условиям:

1) $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид;

2) $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид;

3) 0 — мультипликативный нуль, т. е. тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$;

4) умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, т. е. в S справедливы тождества $(x+y)z = xz+yz$ и $x(y+z) = xy+xz$.

Полукольцо S называется *полукольцом с делением*, если его ненулевые элементы образуют группу по полукольцевому умножению, т. е. $\langle S \setminus \{0\}, \cdot, 1\rangle$ — группа. Если полукольцо с делением S является кольцом, то оно называется *телом*; если же S не является кольцом, то S называется *полутелом*. Полутела удовлетворяют аддитивному квазитождеству $x+y = 0 \Rightarrow x = 0$ (почему?). Тела и полутела с коммутативным умножением называются, соответственно, *полями* и *полуполями*.

Определение 2. *Полумодулем* (унитарным левым S-полумодулем) над полукольцом S называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0\rangle$ вместе с отображением $S \times A \to A, (s, a) \to sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$):

(1) $(s+t)a = sa + ta$;

(2) $s(a+b) = sa + sb$;

(3) $(st)a = s(ta)$;

(4) $0 \cdot a = 0 = s \cdot 0$;

(5) $1 \cdot a = a$.

Замечание 1. В общей теории полуколец в определении полукольца не требуется существование 0 и 1. Однако в теории полумодулей над полукольцами, находящейся в русле развития теории колец и модулей над ними, обычно принимаются приведенные выше определения полукольца и полумодуля.

Замечание 2. Мы одинаково обозначаем — как 0 — нулевые элементы полукольца S и S-полумодуля A, что не должно вызывать недоразумений.

Отметим, что любое полукольцо S является S-полумодулем.

Можно считать, что $1 \neq 0$ в полукольце S, так как в случае $1 = 0$ полукольцо S и все S-полумодули одноэлементны (почему?).

Будем рассматривать полумодули над фиксированным полукольцом S.

Непустое подмножество B S-полумодуля A называется *подполумодулем* в A, если $x + y, sx \in B$ для любых $x, y \in B$ и $s \in S$. Всегда $0 \in B$.

Гомоморфизмом (S-гомоморфизмом) полумодуля A в полумодуль B называется произвольное отображение $f : A \to B$, для которого $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(sx) = sf(x)$ при всех $x, y \in A$ и $s \in S$. Ясно, что $f(0) = 0$. S-полумодули A и B *изоморфны*, если существует *изоморфизм* $A \to B$, т. е. биекция, являющаяся S-гомоморфизмом; тогда обратное отображение $B \to A$ также будет S-гомоморфизмом, значит, изоморфизмом. Отметим, что изоморфные S-полумодули имеют совершенно одинаковые алгебраические свойства, т. е. свойства, выражаемые на языке S-полумодулей.

Отношение эквивалентности ρ на S-полумодуле A называется *конгруэнцией* на A, если $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ и $(sa)\rho(sb)$ при любых $a, b, c, d \in A$ и $s \in S$ (можно считать, что $c = d$).

Класс элемента $a \in A$ конгруэнции ρ на полумодуле A обозначим $a/\rho = \{x \in A : x\rho a\}$. Множество $A/\rho = \{a/\rho : a \in A\}$ всех классов относительно операций $a/\rho + b/\rho = (a+b)/\rho$ и $s(a/\rho) = (sa)/\rho$, где $a, b \in A$ и $s \in S$, образует S-полумодуль, называемый *фактор-полумодулем* полумодуля A по конгруэнции ρ. При этом каноническое отображение $\pi : A \to A/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ для всех $a \in A$ является S-гомоморфизмом полумодуля A на фактор-полумодуль A/ρ.

Упражнение 1. Проверьте справедливость утверждений предыдущего абзаца.

Пусть S — полукольцо.

Для S-полумодуля A обозначим через $\operatorname{End} A$ множество всевозможных гомоморфизмов полумодуля A в себя. Введем на множестве $\operatorname{End} A$ операции сложения (поточечное) и умножения (композиция):

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \text{ и } (f \cdot g)(a) = g(f(a))$$

для любых $f, g \in \operatorname{End} A, a \in A$.

Упражнение 2. Покажите, что алгебраическая структура $\langle \operatorname{End} A, +, \cdot \rangle$ является полукольцом с нулевым гомоморфизмом $A \to \{0\}$ в качестве нуля и тождественным отображением $A \to A$ в роли единицы. Полученное полукольцо называется *полукольцом эндоморфизмов* полумодуля A.

S-полумодуль A называется:

нулевым, если $A = \{0\}$;

модулем, если моноид $\langle A, +, 0\rangle$ является группой;

антимодулем, если A удовлетворяет квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$;

сократимым, если A удовлетворяет квазитождеству $x+z = y+z \Rightarrow x = y$;

идемпотентным, если A удовлетворяет тождеству $x + x = x$;

зероидным, если $\forall a \in S\, \exists b \in S\; a + b = b$;

циклическим, когда $A = Sa = \{sa : s \in S\}$ для некоторого элемента $a \in A$, называемого *образующим* полумодуля A;

простым, когда на A существуют ровно две конгруэнции — отношение равенства и одноклассовая.

Подполумодуль B S-полумодуля A называется:

собственным, если $B \subset A$;

строгим, если $x + y \in B$ влечет $x \in B$ для любых $x, y \in A$;

полустрогим, если $x + y \in B$ и $x \in B$ влекут $y \in B$ для любых $x, y \in A$.

Упражнение 3. Убедитесь, что класс $0/\rho$ всякой конгруэнции ρ на любом S-полумодуле A будет полустрогим подполумодулем полумодуля A.

По любому подполумодулю B S-полумодуля A определяется, как и в случае полукольца, *конгруэнция Бёрна* $\rho(B)$ на полумодуле A:

$$x\rho(B)y \Leftrightarrow \exists\, a, b \in B\; x + a = y + b\, (\forall x, y \in A).$$

Упражнение 4. Проверьте, что $\rho(B)$ есть конгруэнция на полумодуле A, класс $0/\rho(B)$ нуля которой содержит подполумодуль B.

Упражнение 5. Для подполумодуля B S-полумодуля A докажите эквивалентность следующих утверждений:

1) $B = 0/\rho(B)$;

2) $B = 0/\rho$ для некоторой конгруэнции ρ на A;

3) подполумодуль B полустрогий.

Для S-полумодуля A положим $m(A) = \{x \in A : \exists y \in A\; x + y = 0\}$ — множество всех элементов из A, имеющих противоположный элемент. Нетрудно показать, что $m(A)$ есть строгий подполумодуль в A, являющийся модулем над S. Подполумодуль $m(A)$ можно назвать *модульной* *частью* полумодуля A. Отметим, что $m(S)$ обозначается нами $r(S)$ — кольцевая часть полукольца S.

Упражнение 6. Докажите последнее утверждение.

Определим *зероидную часть* S-полумодуля A как $z(A) = \{x \in A : \exists y \in A\, x + y = y\}$. Получаем полустрогий подполумодуль $z(A)$ полумодуля A.

Упражнение 7. Опишите — с точностью до изоморфизма — все конечные S-полумодули над двухэлементным полукольцом S; над трехэлементной цепью $S = \{0 < s < 1\}$.

2. Пропедевтика

Приведем два основания для рассмотрения и изучения полумодулей над полукольцами.

Векторные пространства. Откуда это пошло? Истоком служат конечномерные векторные пространства $V = {}_{\mathbb{R}}V$ над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и их наглядные геометрические интерпретации в случае размерности $\dim V \leqslant 3$.

Векторным (*линейным*) *пространством* $V = {}_PV$ *над телом* P называется коммутативная группа $\langle V, +\rangle$, аддитивно записанная, на пару с внешним умножением $P \times V \to V, (s, a) \to sa \in V$, связанным со сложением равенствами (1)–(5) из определения полумодуля.

Пусть дано векторное пространство V над телом P. Напомним некоторые основные понятия теории векторных пространств.

Элементы из V называют *векторами*, а элементы из P — *скалярами.* Сумма вида $p_1v_1 + \ldots + p_nv_n \in V$ ($n \in \mathbb{N}$) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$ с коэффициентами $p_1, \ldots, p_n \in P$.

Пусть B — непустое подмножество в V. Множество (B) всевозможных линейных комбинаций векторов из B образует *подпространство* векторного пространства V, называемое *линейной оболочкой* B: это по определению означает, что линейная оболочка (B) замкнута относительно сложения векторов и умножения вектора на произвольный скаляр. Ясно, что (B), как и всякое подпространство в V, вместе с конечным числом своих векторов содержит и любую их линейную комбинацию.

Множество векторов B называется:

линейно зависимым, если в B существуют такие различные векторы $v_1, \ldots, v_n$, что $p_1v_1 + \ldots + p_nv_n = 0$ для некоторых ненулевых скаляров $p_1, \ldots, p_n \in P$;

линейно независимым, если для любых векторов $v_1, \ldots, v_n \in B$ равенство $p_1v_1 + \ldots + p_nv_n = 0$ влечет $p_1 = \ldots = p_n = 0$;

множеством образующих (в V), если $(B) = V$;

базисом векторного пространства V, если любой ненулевой вектор $v \in V$ однозначно представим, с точностью до порядка слагаемых, как линейная комбинация $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$ некоторых векторов $v_1, \ldots, v_n \in B$ с ненулевыми скалярами $p_1, \ldots, p_n \in P$.

Мы видим, что любое непустое множество векторов векторного пространства либо линейно зависимо, либо линейно независимо.

Замечание 3. В теории векторных пространств обычно говорят не о множестве векторов B, а о системе (семействе) векторов, когда векторы могут повторяться. Тогда всякая система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

Ясно, что линейная зависимость одноэлементного множества $\{v\}$ векторного пространства равносильна тому, что $v = 0$. Легко видеть, что множество B векторного пространства, содержащее не менее двух векторов, линейно зависимо тогда и только тогда, когда в B найдется вектор, являющийся линейной комбинацией некоторых других векторов из B. Отсюда следует, что множество B, содержащее линейно зависимое множество, также линейно зависимо. Значит, любое непустое подмножество линейно независимого множества векторов само линейно независимо.

Справедливо следующее очевидное утверждение:

Лемма 1. *Множество векторов произвольного векторного пространства линейно независимо тогда и только тогда, когда линейно независимо любое его непустое конечное подмножество.*

По законам логики (контрапозиции и отрицания всеобщности) лемма 1 равносильна утверждению: *множество векторов векторного пространства линейно зависимо тогда и только тогда, когда линейно зависимо некоторое его конечное подмножество.*

В определении базиса B однозначность представления $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$ означает, что каждое равенство $v = q_1w_1 + \ldots + q_mw_m$, где $w_1, \ldots, w_m \in B$ и $q_1, \ldots, q_m \in P \setminus \{0\}$ влечет $m = n$ и, после соответствующей перестановки слагаемых, $w_1 = v_1, \ldots, w_n = v_n$ и $q_1 = p_1, \ldots, q_n = p_n$.

Векторное пространство V называется *конечномерным* (*n-мерным*), если V имеет конечный базис (n-элементный базис при $n \in \mathbb{N}$). Известно, что любые базисы конечномерного векторного пространства V над полем P имеют одно и то же число векторов (инвариант V), называемое *размерностью* V. См., например, [9, теоремы 1.5 и 3.4]. Верно ли это для некоммутативных тел P?

Замечание 4. Пусть P — некоторое тело и $Z = \{p \in P : \forall x \in P\ px = xp\}$ — его центр. Легко видеть, что Z является полем, т. е. коммутативным подтелом тела P. Ясно также, что P будет векторным пространством над полем Z. Предположим, что P конечномерно над Z и имеет размерность n. Рассмотрим произвольное конечномерное векторное пространство V над телом P с каким-то базисом из m векторов. Тогда V будет конечномерным векторным пространством над полем Z размерности mn. Например, если P есть тело кватернионов, то $Z = \mathbb{R}$ и V, как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, будет иметь размерность $4m$.

Замечание 5. Если V есть n-мерное векторное пространство над телом P с базисом $\{v_1, \ldots, v_n\}$, то любой вектор $v \in V$ представим в виде $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$ с однозначно определенными коэффициентами $p_1, \ldots, p_n \in P$, среди которых могут быть нули. В частности, $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$ и $0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$.

Пример 1. *Арифметическое n-мерное векторное пространство над телом P* ($n \in \mathbb{N}$) есть множество $P^n = \{(p_1, \ldots, p_n) : p_i \in P\}$ всех упорядоченных n-ок элементов тела P с покоординатными операциями сложения n-ок и умножения слева элементов из $s \in P$ на n-ки: $(p_1, \ldots, p_n) + (q_1, \ldots, q_n) = (p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n)$ и $s(p_1, \ldots, p_n) = (sp_1, \ldots, sp_n)$. В результате получаем n-мерное векторное пространство P^n с каноническим базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Имеем $(p_1, \ldots, p_n) = p_1e_1 + \ldots + p_ne_n$.

Пример 2. Множество $\oplus_{\mathbb{N}}P$ всевозможных последовательностей (p_n) элементов из тела P, в которых почти все координаты $p_i = 0$ (другими словами, все их координаты $p_i = 0$, начиная с некоторого номера) образует векторное пространство над P относительно покоординатных операций (как в примере 1). Очевидно, оно обладает счетным базисом $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ при векторе-последовательности e_n, все координаты которой равны 0, кроме n-й координаты, равной 1.

Пример 3. Множество V всех сходящихся последовательностей действительных чисел с поточечно определенными операциями сложения последовательностей и умножение числа на последовательности образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Подпространством векторного пространства V служит векторное пространство V_0 всех последовательностей, сходящихся к 0. Фактор-пространство V/V_0 изоморфно одномерному векторному пространству $\mathbb{R}$.

Упражнение 8. Что представляют собой фактор-пространства $V/\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ и $V_0/\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ для векторного пространства V из примера 3?

Предложение 1. *Любое n-мерное векторное пространство V над телом P изоморфно арифметическому векторному пространству P^n.*

Доказательство. Действительно, если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис V над телом P, то, как легко видеть, отображение $v \to (p_1, \ldots, p_n)$, где $v = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$, осуществляет изоморфизм V на P^n.

Предложение 2. *Каждое линейно независимое множество любого векторного пространства V над телом P содержится в некотором базисе этого пространства.*

Доказательство. Пусть B — произвольное линейно независимое множество векторного пространства V. Обозначим через X множество всевозможных линейно независимых множеств в V, содержащих B. Относительно отношения включения $\subseteq$ множеств X является упорядоченным множеством, удовлетворяющим следующему условию: любая цепь множеств в X ограничена сверху. Действительно, пусть $\{B_i : i \in I\}$ — цепь в упорядоченном множестве $\langle X, \subseteq\rangle$, т. е. для любых индексов $i, j \in I$ имеем $B_i \subseteq B_j$ или $B_j \subseteq B_i$. Рассмотрим объединение $U = \cup\{B_i : i \in I\} \supseteq B$. Всякое непустое конечное множество векторов из U содержится в некотором линейно независимом множестве B_i, поэтому оно линейно независимо. По лемме 1 само множество U линейно независимо и, стало быть, принадлежит X. Значит, произвольная цепь $\{B_i : i \in I\}$ упорядоченного множества X имеет в X верхнюю грань U, являющуюся точной верхней гранью множества $\{B_i : i \in I\} \subseteq X$. Тем самым мы доказали, что наше упорядоченное множество $\langle X, \subseteq\rangle$ удовлетворяет необходимому условию леммы Цорна, эквивалентной аксиоме выбора, которая в современной теоретико-множественной математике принимается именно в качестве аксиомы (без доказательства).

Лемма Цорна. *Если любая цепь произвольного упорядоченного множества $\langle Y, \leqslant \rangle$ ограничена сверху в Y, то в Y существует хотя бы один максимальный элемент $m : \forall y \in Y (m \leqslant y \Rightarrow y = m)$.*

Поскольку для упорядоченного множества $\langle X, \subseteq \rangle$ выполнено условие леммы Цорна, то, следовательно, выполнено и ее заключение, т. е. в X существует максимальный элемент M. Ясно, что M представляет собой максимальное линейно независимое множество векторов векторного пространства V, содержащее исходное линейно независимое множество B. Остается показать, что M является базисом в V. Пусть вектор $v \in V \setminus (M)$, т. е. $v \in V$ не является линейной комбинацией векторов из M. Отсюда легко выводится линейная независимость множества $M \cup \{v\}$, что противоречит максимальности M. Поэтому M служит множеством образующих векторного пространства V. Предположим от противного, что некоторый вектор из V имеет два разных представления в виде линейных комбинаций векторов из M. Тогда разность этих линейных комбинаций есть нулевой вектор, представленный как линейная комбинация векторов из M, не все коэффициенты которой равны 0, что означает линейную зависимость множества M. Полученное противоречие показывает, что M — базис векторного пространства V.

Упражнение 9. Подробно изложите заключительную часть доказательства предложения 2.

Следствием предложения 2 является

Предложение 3. *Любое ненулевое векторное пространство над телом P обладает базисом.*

Упражнение 10. Докажите, что векторное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех числовых последовательностей имеет несчетный базис.

Упражнение 11. Являются ли векторные пространства V и V_0 из примера 3 счетномерными?

Предложение 4. *Для любого непустого множества B векторного пространства V над телом P эквивалентны следующие утверждения:*

1) B — *базис* V;
2) B — *линейно независимое множество образующих* V;
3) B — *максимальное линейно независимое множество в* V;
4) B — *минимальное множество образующих* V.

Доказательство нетрудно провести по циклу $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$. Можно воспользоваться рассуждениями из доказательства предложения 2.

Упражнение 12. Докажите, что любые два базиса любого векторного пространства V над полем P равномощны.

Мощность некоторого (любого) базиса векторного пространства V над полем P (предложение 3 и упражнение 12) называется *размерностью* векторного пространства V, в обозначениях $\dim_P V$.

Упражнение 13. Покажите, что $\dim_P W \leqslant \dim_P V$ для всякого подпространства W любого векторного пространства V над полем P.

Упражнение 14. Докажите, что любое подпространство W произвольного векторного пространства V над телом выделяется *прямым слагаемым* в пространстве V, т. е. существует такое подпространство U пространства V, что любой вектор $v \in V$ представим как сумма $v = w + u$ для однозначно определенных векторов $w \in W$ и $u \in U$, в записи $V = W \oplus U$ — *прямая сумма* подпространств W и U. Отметим, что $V = W \oplus U \Leftrightarrow V = W + U = \{w + u : w \in W, u \in U\}$ и $W \cap U = \{0\}$.

Пример 4. Множество $\mathbb{R}$ образует полумодуль (модуль) над полуполем $\mathbb{R}^+$ всех неотрицательных действительных чисел. Подполумодули в $\mathbb{R}$ исчерпываются: нулевым модулем $\{0\}$, модулем $\mathbb{R}$, аддитивно сократимыми циклическими полумодулем $\mathbb{R}^+$ и полумодулем $\mathbb{R}^-$ всех неположительных действительных чисел. Единственным собственным полустрогим полумодулем является нулевой модуль. Поэтому $\{0\}$ будет классом 0 неодноклассовых конгруэнций на $\mathbb{R}^+$-модуле $\mathbb{R}$. Легко заметить, что единственной нетривиальной конгруэнцией на $\mathbb{R}^+$-модуле $\mathbb{R}$ будет трехклассовая конгруэнция, индуцированная разбиением $\{\mathbb{R}^- \setminus \{0\}, \{0\}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$. Минимальными множествами образующих $\mathbb{R}^+$-полумодуля $\mathbb{R}$ служат в точности двухэлементные множества $\{r, s\}$, где $r < 0, s > 0$. Любое такое множество $\{r, s\}$ линейно зависимо в смысле векторных пространств, так как $sr + (-r)s = 0$. И мы видим, что теория полумодулей над полуполем $\mathbb{R}^+$ кардинально отличается от теории векторных пространств над полем $\mathbb{R}$.

Упражнение 15. Найдите все линейно независимые множества $\mathbb{R}^+$-модуля $\mathbb{R}$. Какие из них максимально линейно независимые?

Представление полукольца эндоморфизмами полумодулей. Рассмотрим произвольный полумодуль A над фиксированным полукольцом S. Для произвольного элемента $t \in S$ зададим отображение $\alpha(t) : A \to A$ формулой: $\alpha(t)(a) = ta$ для всех $a \in A$.

Множество A^A всевозможных отображений $A \to A$ относительно поточечной операции сложения отображений: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ для любого $a \in A$, будет коммутативным моноидом с нулевым отображением $0 : A \to \{0\}$ в качестве нейтрального элемента.

Получаем гомоморфизм коммутативных моноидов $\alpha = \alpha_A : \langle S, +, 0\rangle \to \left\langle A^A, +, 0\right\rangle$, $t \to \alpha(t)$ для каждого $t \in S$ в силу условия (1) определения полумодуля. В самом деле, для любых $s, t \in S$ имеем $\alpha(s + t) = \alpha(s) + \alpha(t)$, поскольку для каждого $a \in A$

$$\alpha(s + t)(a) = (s + t)a = sa + ta = \alpha(s)(a) + \alpha(t)(a) = (\alpha(s) + \alpha(t))(a).$$

Возникает вопрос: когда α отображает полукольцо S в $\operatorname{End} A$, т. е. когда $\alpha(t)(sa) = s(\alpha(t)(a))$ для любых $s, t \in S$ и $a \in A$? Последнее равенство равносильно равенству $(ts)a = (st)a$ в силу условия (3) определения полумодуля.

Если полукольцо S коммутативно, то α отображает S в полукольцо $\operatorname{End} A$ эндоморфизмов при любом S-полумодуле A, причем $\alpha : S \to \operatorname{End} A$ будет полукольцевым гомоморфизмом. Действительно, выше доказано, что отображение α аддитивно. Поскольку также

$$\begin{gathered}\alpha(st)(a) = (st)a = (ts)a = t(sa) = t(\alpha(s)(a)) = \\ = \alpha(t)(\alpha(s)(a)) = (\alpha(s) \cdot \alpha(t))(a),\end{gathered}$$

т. е. $\alpha(st) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$, то α есть гомоморфизм полукольца S в полукольцо $\operatorname{End} A$, сохраняющий единицу: α переводит $1 \in S$ в единицу полукольца $\operatorname{End} A$, являющуюся тождественным отображением 1_A полумодуля A в силу условия (5) определения 2.

Если $A = S$ как S-полумодуль, то при $a = 1$ равенство $(ts)a = (st)a$ влечет $ts = st$ — коммутативность полукольца S.

Тем самым доказано следующее

Предложение 5. *Для произвольного полукольца S отображение $\alpha A : S \to \operatorname{End} A$ является полукольцевым гомоморфизмом для всех S-полумодулей A тогда и только тогда, когда полукольцо S коммутативно.*

Имеет место и следующее утверждение:

Предложение 6. *Любое полукольцо S изоморфно полукольцу* $\operatorname{End} S$ *всех эндоморфизмов S-полумодуля S.*

Доказательство. Определим теперь отображение $\gamma : S \to \operatorname{End} S$, отличающееся от отображения α_S умножением на элементы t справа (а не слева). Именно для каждого $t \in S$ положим $\gamma(t) : S \to S$, где $\gamma(t)(a) = at$ для всех $a \in S$. Покажем, что γ является искомым изоморфизмом полукольца S на полукольцо $\operatorname{End} S$.

Легко видеть, $\gamma(t) \in \operatorname{End} S$, а само отображение γ, $t \to \gamma(t)$ для всех $t \in S$, осуществляет гомоморфизм полукольца S в полукольцо $\operatorname{End} S$. Так как равенство $\gamma(s) = \gamma(t)$ при $s, t \in S$ влечет $s = 1_S = \gamma(s)(1) = \gamma(t)(1) = t$, то γ инъективно. Возьмем $\varphi \in \operatorname{End} S$ и положим $t = \varphi(1)$. Тогда для любого $a \in S$ имеем $\varphi(a) = \varphi(a1) = a\varphi(1) = at = \gamma(t)(a)$, т. е. $\varphi = \gamma(t)$. Значит, мономорфизм γ сюръективен. Следовательно, γ — изоморфизм.

Наряду с процессом естественного обобщения векторных пространств, введение понятия полумодуля над полукольцом мотивируют и проясняют предложения 5 и 6.

3. Некоторые первоначальные структурные результаты

Будем рассматривать полумодули над фиксированным полукольцом S.

Зачастую в терминах класса (категории) всех S-полумодулей выражаются, характеризуются свойства самого полукольца S. Такие свойства полуколец принято называть гомологическими. Приведем простейшие связи гомологического характера.

Предложение 7. *Для любого полукольца S верны следующие утверждения:*

1) *S — кольцо $\Leftrightarrow$ все S-полумодули суть модули;*

2) *S аддитивно идемпотентно $\Leftrightarrow$ все S-полумодули идемпотентны;*

3) *S — зероидное $\Leftrightarrow$ все S-полумодули зероидные.*

Упражнение 16. Докажите предложение 7.

Для полумодулей и их гомоморфизмов (S-гомоморфизмов) имеют место общеалгебраические теоремы о гомоморфизмах и подпрямом представлении, аналогичные теоремам 4.1–4.3 [1] для полуколец.

Упражнение 17. Сформулируйте аналоги этих теорем для полумодулей.

Полумодуль A является *расширением* полумодуля B при помощи полумодуля C, если на A существует такая конгруэнция ρ, что подполумодуль $0/\rho$ полумодуля A изоморфен B и фактор-полумодуль A/ρ изоморфен C.

Справедлив аналог теоремы 4.4 [1] о расширении:

Предложение 8. *Любой полумодуль A над полукольцом S является расширением модуля $m(A)$ при помощи антимодуля $A/\rho(m(A))$.*

Классом нуля конгруэнции Бёрна $\rho(m(A))$ по подполумодулю $m(A)$ служит $m(A)$, а фактор-полумодуль $A/\rho(m(A))$ является антимодулем. Предложение 8 впервые появилось в статье [5].

Упражнение 18. Самостоятельно докажите предложение 8.

Полумодульным аналогом теоремы 4.5 [1] является

Предложение 9. *Пусть полукольцо S таково, что его кольцевая часть $r(S)$ имеет единицу. Тогда модульная часть $m(A)$ любого S-полумодуля A выделяется прямым слагаемым в A.*

Упражнение 19. Дайте подробное доказательство предложения 9.

Для зероидной части полумодулей имеет место результат, подобный предложению 8.

Предложение 10 [6]**.** *Любой полумодуль A над полукольцом S является расширением своей зероидной части $z(A)$ при помощи полумодуля $A/\rho(z(A))$ с нулевой зероидной частью.*

Упражнение 20. Самостоятельно докажите предложение 10.

Далее возьмем полутело S и рассмотрим S-полумодуль A. Элемент $a \in A$ назовем *сократимым*, если $a + x = a + y$ влечет $x = y$ при любых $x, y \in A$. Множество $c(A)$ всех сократимых элементов образует сократимый строгий подполумодуль полумодуля A, который был назван *сократимой частью* полумодуля A. На полумодуле A вводится конгруэнция τ такая, что $a\tau b$ означает, что $a + x = a + y$ равносильно $b + x = b + y$ для любых $x, y \in A$.

Упражнение 21. Покажите, что бинарное отношение τ действительно будет конгруэнцией на полумодуле A, класс нуля которой равен $c(A)$, а фактор-полумодуль A/τ идемпотентен.

Верно следующее

Предложение 11 [6]. *Любой полумодуль A над полутелом S является расширением сократимого полумодуля при помощи идемпотентного полумодуля.*

Следствием предложения 11 является хорошо известное утверждение:

Предложение 12. *Всякий простой полумодуль над полутелом либо сократим, либо идемпотентен.*

Упражнение 22. Выведите предложение 12 из предложения 11.

Список источников

1. **Вечтомов Е. М.** Что такое полукольцо // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 21–42. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

2. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000. 44 с.

3. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е.Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец : монография. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.

4. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

5. **Вечтомов Е. М.** Две общие структурные теоремы о полумодулях // *Абелевы группы и модули.* 2000. Вып. 15. С. 17–23.

6. **Вечтомов Е. М.** О трех радикалах для полумодулей // *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета.* 2005. № 13. С. 148–151

7. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Упорядоченные множества и решетки : учебное пособие. СПб: Лань, 2024. 248 с.

8. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением : учебное пособие. СПб.: Лань, 2022. 180 с.

9. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е.Н.** Линейная алгебра : учебное пособие для вузов. 2-е изд. М.: Юрайт, 2019. 150 с.

References

1. **Vechtomov E. M.** What is a semiring. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024. No 1 (50). Pp. 21–42. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M.** *Vvedeniye v polukol'tsa* [Introduction to Semirings]. Kirov: Izd-vo vyatsk. gos. ped. un-ta. 2000. 44 p. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnykh V. V.** *Elementy teorii polukolets : monografiya* [Elements of the theory of semirings : monograph]. Kirov: Izdatelstvo OOO «Raduga-PRESS». 2012. 228 p. (In Russ.)

4. **Golan J. S.** *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

5. **Vechtomov E. M.** Two general structure theorems about semimodules. *Abelevy gruppy i moduli* [Abelian groups and modules]. 2000. Vol. 15. Pp. 17–23. (In Russ.)

6. **Vechtomov E. M.** On three radicals for semimodules. *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* [Bulletin of Vyatka State University of Humanities]. 2005. No 13. Pp. 148–151. (In Russ.)

7. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki : uchebnoye posobiye* [Ordered sets and lattices : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan'. 2024. 248 p. (In Russ.)

8. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Funktsionalnaya algebra i polukoltsa. Polukoltsa s idempotentnym umnozheniyem : uchebnoye posobiye* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan'. 2022. 180 p. (In Russ.)

9. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N.** *Lineynaya algebra : uchebnoye posobiye dlya vuzov. 2-e izd.* [Linear algebra : a study guide for universities. 2nd ed.]. Moscow: Urait. 2019. 150 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeny M. Vechtomov
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Россия, Киров, ул. Московская, д. 36 / 36, Moskovskaya St., Kirov, 610000, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 04.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.02.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_44

ОДИН ПРИМЕР ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДОВ АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

Ольга Александровна Сотникова,
Василий Владимирович Чермных
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, sotnikovaoa@syktsu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются приемы, позволяющие выделить методы абстрактной алгебры при изучении некоторых тем алгебраического курса. На примере тем «Подстановки», «Комплексные числа», «Матрицы» и «Многочлены» иллюстрируется выделение связей между понятиями, рассматриваемыми в этих теориях. Выделенные связи позволяют характеризовать предметность элементов рассматриваемых множеств, процедурность трактовки алгебраических действий, также формализованный характер свойств алгебраических действий. По мнению авторов, указанные обстоятельства можно использовать для иллюстрации методов абстрактной алгебры.

Ключевые слова: курс алгебры, подготовка учителя математики, абстрактная алгебра, содержательные связи, формализация

Для цитирования: Сотникова О. А., Чермных В. В. Один пример изучения методов абстрактной алгебры в математическом высшем образовании // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 44–56. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_44

Article

One example of studying abstract algebra methods in mathematic degree programs

Olga A. Sotnikova, Vasilij V. Chermnykh
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, sotnikovaoa@syktsu.ru

Abstract. The article addresses some techniques which are instrumental for outlining abstract algebra methods when exploring some subject matters within the algebra course. As exemplified in such chapters as *Substitution*, *Complex Numbers*, *Matrices* and *Polynomials*, the phenomena considered in these theories are shown to detect connections which offer the possibility to characterize the objectivity of the elements of the sets under consideration, the procedural nature of the interpretation of algebraic operations, and also the formalized nature of the properties of algebraic operations. According to the authors, the conditions mentioned can be used to illustrate the methods of abstract algebra.

Keywords: algebra course, math teacher training, abstract algebra, conceptual connections, formalization

For citation: Sotnikova O. A., Chermnykh V. V. One example of studying abstract algebra methods in mathematic degree programs. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 44–56. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_44

Современная ситуация в нашей стране ставит задачу подготовки выпускников вузов, готовых к созданию прорывных технологий. Эта готовность применительно к математической подготовке означает, в частности, формирование определенного уровня математического мышления.

В настоящее время успешная научно-исследовательская работа невозможна без углубленного понимания той или иной узкой дисциплины. Для высокого уровня математического мышления недостаточно владения фактологическим материалом, важно познать метод, развивающийся в этом материале. В последнее время при изучении алгебраического материала все чаще подчеркивается важность систематизации содержания (например, [1]) Одними из наиболее важных математических методов являются методы абстрактной алгебры: «возрастающее день от дня значение абстрактной алгебры основано не на полученных результатах, а на развитых в этой области математики *методах*» [2, с. 9].

Авторы уже обращались к приемам привлечения студентов к изучению абстрактной алгебры во внеаудиторной работе [3]. В данной статье рассматривается один из примеров приобщения студентов к раскрытию методов абстрактной алгебры при изучении некоторых вопросов алгебраического курса.

Одним из основных методов содержания, рассматриваемого в вузовском курсе алгебры, является метод аксиоматизации. Традиционно содержание материала выдержано в рамках двух основных блоков: интуитивных теорий (матрицы и определители, комплексные числа и др.) и аксиоматических теорий (группы, кольца, поля, векторные пространства). Рассмотрим внедрение аксиоматизации на примере интуитивных теорий.

Выделим общность множеств, рассматриваемых в интуитивных теориях. Элементами множеств таких теорий являются арифметические векторы, подстановки, матрицы, комплексные числа, многочлены одной и нескольких переменных и др. В курсе алгебры они обычно определяются следующим образом.

Арифметический вектор — это упорядоченный набор элементов некоторого множества, поэтому его можно представить в виде

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где a_i принадлежат некоторому (фиксированному) множеству.

Под подстановкой степени n понимают биективное отображение n-элементного множества на себя. Поскольку опорное множество конечно, то подстановку можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Матрицей является таблица элементов, содержащая m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Комплексное число трактуется как число вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Оно допускает *геометрическое представление* в виде вектора декартовой плоскости с координатами (a, b) (или точкой с указанными координатами).

Многочленом от одной переменной (одного аргумента) является выражение *вида*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Итак, указанные объекты (элементы множеств интуитивных теорий) обладают тем свойством, что имеют представление в виде наглядного образа (т. е. их можно «записать», «представить», они имеют некоторый «внешний» вид и т. п.).

Второе общее свойство элементов множеств интуитивных теорий состоит в том, что они связаны непосредственно с «житейскими» представлениями, практической деятельностью людей. Например, матрица помогает зафиксировать данные производства продукции различного вида разными предприятиями, подстановка — смену «очередности» объектов, арифметический вектор — «координаты» местоположения и т. п. Другими словами, данные объекты имеют «реальную» природу, или по крайней мере ее можно «придать» объектам.

Оба свойства элементов множеств интуитивных теорий (наглядность и связь с практикой) схожи со свойствами реальных явлений («вещей»), поэтому их можно характеризовать одним свойством — *предметности.*

С элементами множеств интуитивных теорий выполняются алгебраические действия. В процессе изучения курса алгебры алгебраические действия над упомянутыми выше элементами множеств определяют следующим образом:

✓ Умножение подстановок задается правилом композиции отображений:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

✓ Сложение комплексных чисел — покомпонентное сложение действительной и мнимой частей соответственно:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

✓ Умножение матриц определяется формулами для вычисления элементов матрицы:

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj},$$

где $A = (\alpha_{ij})_{m,n}$, $B = (\beta_{ij})_{n,s}$, $C = AB = (\gamma_{ij})_{m,s}$.

✓ Действия сложения и умножения многочленов определяются вычислением соответствующих коэффициентов по известным формулам.

Таким образом, алгебраические действия с указанными объектами задаются *вполне определенными* правилами. Эти правила в основном имеют вид формул, которые позволяют однозначно определить результат операции применительно к каким-либо элементам рассматриваемых множеств. Чтобы найти результат алгебраического действия применительно к конкретным элементам, необходимо выполнить определенные вычисления, задаваемые указанными правилами. Например, чтобы перемножить две подстановки f и g, нужно на каждый элемент множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ сначала «подействовать» подстановкой g (найти образ относительно этой подстановки), затем на полученный результат «подействовать» подстановкой f. Иначе говоря, необходимо выполнить последовательно вычислительные операции, заданные формулой (правилом) алгебраического действия. Коли эти операции выполняются последовательно и вполне определены формулой, то в их выполнении имеется алгоритмичность.

Между элементами множеств интуитивных теорий имеются отношения, например отношение равенства. В каждом множестве отношения по своему содержанию различны. Например, равенство подстановок — это равенство отображений. Поэтому «внешность» двух равных подстановок может быть различной. Так, подстановки $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ по своему «внешнему виду» различны, но они равные, так как $f(1) = g(1) = 2$, $f(2) = g(2) = 3$, $f(3) = g(3) = 1$. Чтобы установить, находятся ли две подстановки в отношении равенства, т. е. равны ли они, необходимо выполнить процедуру, адекватную специфике равенства отображений конечных множеств: для каждого элемента множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ необходимо найти образ, определяемый данными двумя постановками, а затем установить их совпадение (или несовпадение). Эта процедура может быть алгоритмизирована каким-либо образом. Например, следующим образом:

1. Переставить столбцы в таблицах подстановок так, чтобы верхние строки совпадали.

2. Определить совпадение полученных таблиц подстановок. Если они совпадают, то подстановки равны, в противном случае — нет.

Равенство матриц, арифметических векторов, многочленов сводится к равенству их соответствующих компонент. То есть опять же сводится к алгоритмическим предписаниям выполнения вполне определенных действий (операций) по установлению равенства рассматриваемых элементов. Иначе говоря, алгебраические действия и отношения между элементами множеств интуитивных теорий «процедурны».

Следовательно, одна сторона понятий интуитивных теорий состоит:

а) в *предметности* элементов рассматриваемых множеств, т. е. что они означают (как наглядно представляются, истолковываются, из каких реальных явлений они возникли и т. п.);

б) *процедурной* трактовке алгебраических действий и отношений, рассматриваемых на их множествах, т. е. характеризует то, как выполняются алгебраические операции (по каким правилам, формулам).

В понятиях интуитивных теорий имеется и другая сторона *формализованного характера.* Элементы множеств интуитивных теорий, как бы они ни были представлены наглядно и что бы они ни отражали из реальной действительности, т. е. какова бы ни была их предметность, они — элементы множеств, т. е. части той совокупности, которая «мыслится как единое целое». Они обозначаются символами или комбинациями букв и знаков.

Как бы ни было задано равенство элементов интуитивных множеств, оно обладает рядом свойств (рефлексивность, симметричность, транзитивность, подстановочность) *формализованной* сущности.

Элементы множеств можно группировать в подмножества. Например, среди комплексных чисел можно выделить чисто мнимые числа, гауссовы числа и т. д., среди подстановок — циклы, среди матриц — невырожденные и т. п. Ясно, что состав выделяемых подмножеств будет различным, но сущность процесса «выделения» по своей форме (синтаксическому выражению) одинакова: определяется характеристическое свойство элементов выделяемого подмножества, понятно его отношение ко всему множеству (отношение включения) и отношения между другими подмножествами этого же множества и т. д. Результативность «выделения» подмножеств также имеет формализованную общность. Она связана с новыми «объектами» в интуитивных теориях — подмножествами. Подмножества могут находиться в отношении включения. Вне зависимости от того, на подмножествах какого множества интуитивной теории оно рассматривается, включение обладает такими формализованными свойствами, как транзитивность, рефлексивность и антисимметричность (т. е. является отношением порядка). Равенство множеств определяется в соответствии с принципом объемности: два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов, или: два множества равны тогда и только тогда, когда каждое является подмножеством второго. В символическом виде:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)).$$

Иначе говоря, равенство множеств сводится к отношению «быть элементом множества», т. е. «равенство множеств (подмножеств)» связано с понятием «равенство элементов» в формализованном плане.

Такого же рода связи имеются и между алгебраическими действиями и отношениями на множествах интуитивных теорий. Так, конкретная алгебраическая операция на рассматриваемом множестве по сути задает отображение его декартовой степени в себя со всеми существенными свойствами понятия отображения. Имеются связи между свойствами алгебраических операций на различных множествах, которые формальны по существу. Например, умножение матриц, сложение комплексных чисел, умножение подстановок и другие обладают свойством ассоциативности, которое может быть записано своей формой в известном виде:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

При этом символы a, b, c означают элементы конкретного множества, а $\circ$ — рассматриваемую бинарную операцию. Естественно, доказательства этого свойства в конкретных множествах имеют отличия, обусловленные «природой» алгебраической операции, той операционной компонентой, которая задает алгебраическое действие.

Прокомментируем сказанное двумя примерами.

Пример 1. Рассмотрим множество матриц с числовыми компонентами. Пусть имеются три матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,k}$, $C = (c_{ij})_{kt}$. Обозначим: $AB = (u_{ij})_{m,k}$, $BC = (v_{ij})_{n,t}$, $A(BC) = (x_{ij})_{m,t}$, $(AB)C = (y_{ij})_{m,t}$. По определению произведения матриц:

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}v_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \sum_{l=1}^{k} b_{sl}c_{lj} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj} = \\ = \sum_{l=1}^{k} \left(\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sl} \right) c_{lj} \right) = \sum_{l=1}^{k} u_{il}c_{lj} = y_{ij}.$$

Итак, $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(\forall j \in \{1, 2, \ldots, t\})(x_{ij} = y_{ij})$. Следовательно, $\underline{A(BC) = (AB)C}$.

Пример 2. Рассмотрим множество S_n подстановок степени n. Пусть f, g, h — некоторые подстановки из S_n. Выберем произвольно $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда по определению произведения подстановок:

$$(f(gh))(x) = f((gh)(x)) = f(g(h(x))) = (fg)(h(x)) = ((fg)h)(x).$$

Итак, $(\forall x \in \{1, 2, \ldots, n\})((f(gh))(x) = ((fg)h)(x))$. Следовательно, $\underline{f(gh) = (fg)h}$.

Сравним выводы примера 1 и примера 2 (они подчеркнуты). По языковому выражению они одинаковы, но по содержанию — нет. В первом случае речь идет о равенстве матриц, во втором — о равенстве отображений. Поэтому доказательства основываются на специфике элементов множеств и правил алгебраических действий на них. То есть по содержанию доказательства различны, но идея доказательства сходна. Используются:

— определения равных элементов, которые в каждом конкретном случае имеют содержательные отличия, но общие формальные особенности, указанные выше;

— правила алгебраических действий, введенных на данных множествах, которые имеют содержательные особенности, но общие связи формализованного направления.

Обратимся к строению интуитивных теорий (рис.). Первые два блока в схеме на рисунке означают задание множества и алгебраических операций на нем, что неизбежно присутствует в любой интуитивной теории. Понятия «множество» и «алгебраическая операция» для интуитивной теории означает три компонента характеристики основных понятий интуитивной теории (следующий блок схемы): природа элементов, характеристические свойства элементов, способ задания алгебраического действия.

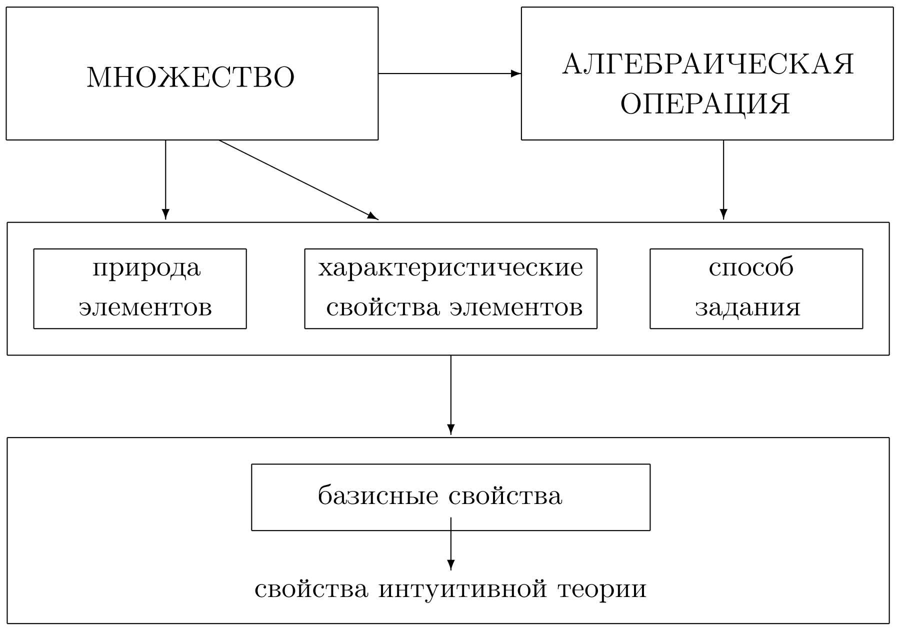

Рис. Строение интуитивной теории

Из характеристик основных понятий алгебраической структуры логически вытекают свойства интуитивной теории. Среди них можно выделить базисные. Существенное отличие базисных свойств от «небазисных» состоит в том, что они служат основанием к получению других свойств. Иначе говоря, базисные свойства доказываются на основе «предметности» и «процедурности», а небазисные — на основе формальных характеристик объектов.

Прокомментируем сказанное на примере темы, посвященной интуитивной теории подстановок. Определением понятия подстановки и действия умножения подстановок задается интуитивная теория. Доказательство свойств ассоциативности, наличие тождественной подстановки и обратной каждой, использует координатизационные связи. Некоторые дальнейшие свойства могут рассматриваться без привлечения указанных фактов.

Например, пусть требуется доказать свойство подстановок, состоящее в том, что для любых подстановок f, g степени n выполняется равенство
$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}.$$

Проведем сначала один из вариантов доказательства данного свойства, основанного на специфике подстановок.

Выберем произвольно $x \in \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим $y = g^{-1}(f^{-1}(x))$. Тогда:
$$g(y) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(g(y)) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow f(g(y)) = x \Rightarrow \\ (fg)(y) = x \Rightarrow y = (fg)^{-1}(x).$$

Следовательно, $(\forall x \in \{1, 2, \dots, n\})(g^{-1}(f^{-1}(x)) = (fg)^{-1}(x))$. Отсюда по определению равных подстановок: $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Разберем обоснования доказательства (табл.). Из таблицы видно, что аргументами в приведенном доказательстве в основном являются «предметность» и «процедурность» умножения подстановок, т. е. используются координатизационные связи интуитивной теории.

Возможно и другое доказательство названного свойства. Приведем его. Найдем произведение подстановок:

1) $(g^{-1}f^{-1})(fg) = g^{-1}(f^{-1}f)g = g^{-1}\varepsilon g = g^{-1}g = \varepsilon$;

2) $(fg)(g^{-1}f^{-1}) = f(gg^{-1})f^{-1} = f\varepsilon f^{-1} = ff^{-1} = \varepsilon$.

Из п. 1) и 2) по определению обратной подстановки получаем равенство: $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Заметим, что данное доказательство полностью совпадает с доказательством указанного свойства в теории групп.

Таким образом, совокупность свойств алгебраической операции интуитивных теорий порождает вид связей, которые дают «выход» в алгебраическую структуру. Поэтому данные связи можно охарактеризовать как *структурно-абстрактные*. Более подробное описание видов содержательных связей в алгебраическом материале, используемого при подготовке учителя математики, представлено в монографии [4].

Приведенные фрагменты содержания интуитивных теорий, рассматриваемые на этапах систематизации, позволяют выделить основные принципы, приводящие к понятию алгебраической структуры, дающие выход к рассмотрению абстрактной алгебры.

Таблица 1

Обоснование доказательства

Шаг доказательства	**Обоснование**
$y = g^{-1}(f^{-1}(x))$	Определение подстановки
$y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \Rightarrow g(y) = f^{-1}(x)$	Определение подстановки
$g(y) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(g(y)) = f(f^{-1}(x))$	Определение подстановки
$f(g(y)) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow f(g(y)) = x$	Свойство тождественной подстановки
$f(g(y)) = x \Rightarrow (fg)(y) = x$	Определение умножения подстановок
$(fg)(y) = x \Rightarrow y = (fg)^{-1}(x)$	Свойство обратной подстановки
$f(g(y)) = x \Rightarrow (fg)(y) = x$	Определение умножения подстановок
$y = (fg)^{-1}(x) \wedge y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \Rightarrow$ $(fg)^{-1}(x) = g^{-1}f^{-1}(x)$	Свойство равенства
$(fg)^{-1}(x) = g^{-1}f^{-1}(x) \Rightarrow (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$	Определение равных подстановок

Список источников

1. **Яшина Е. Ю.** Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 69–82.

2. **Фрид Э.** Элементарное введение в абстрактную алгебру / пер. с венгер. Ю. А. Данилова. М.: Мир, 1979. 260 с.

3. **Сотникова О. А., Чермных В. В.** О привлечении студентов к изучению абстрактной алгебры (на примере одной задачи теории групп и ее приложениях) // *Психология образования в поликультурном пространстве.* 2024. № 2 (66). С. 138–147.

4. **Сотникова О. А.** Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания : монография. Архангельск: Поморский университет, 2004. 356 с.

References

1. **Yashina E. Yu.** Dokazatel'stvo teoremy Frobeniusa kak zavershenie kursa algebry i chislovyk sistem v pedagogicheskom universitete. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2023. No 2 (47). Pp. 69–82. (In Russ.)

2. **Fried E.** *Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru* [An Elementary Introduction to Abstract Algebra]. Perevod s vengerskogo Yu. A. Danilova. Moscow: Mir, 1979. 260 p. (In Russ.)

3. **Sotnikova O. A., Chermnykh V. V.** On attracting students to study abstract algebra (using the example of one problem in group theory and its applications). *Psihologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve* [Psychology of education in a multicultural space]. 2024. No 2 (66). Pp. 138–147. (In Russ.)

4. **Sotnikova O. A.** *Tselostnost' vuzovskogo kursa algebry kak metodologicheskaya osnova ego ponimaniya : monografiya* [The integrity of a university algebra course as a methodological basis for its understanding : monograph]. Arhangel'sk: Pomorskiy universitet, 2004. 356 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Сотникова Ольга Александровна / Olga A. Sotnikova
д.пед.н., доцент, ректор СГУ им. Питирима Сорокина /
Doctor of Sciences in Pedagogical , Associate Professor, Rector of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Чермных Василий Владимирович / Vasilij V. Chermnykh
д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, chief researcher
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.09.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 12.09.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 18.09.2024

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

METHODICAL MATERIALS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_57

О РАБОТАХ ТРЁХ МАТЕМАТИКОВ, ВЫПУСКНИКОВ КАЗАНСКОГО И ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТОВ, ПОГИБШИХ В ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЕ

Владимир Петрович Одинец
W.P.Odyniec@mail.ru

Аннотация. В статье описаны работы двух погибших выпускников Казанского университета Марачкова (Морочкова) Василия Петровича (1914–1942) и Шишканова Василия Степановича (1914–1941), а также выпускника Императорского Санкт-Петербургского университета Цинзерлинга Дмитрия Петровича (1864–1941), умершего от голода в блокадном Ленинграде.

Ключевые слова: почти периодическая функция, характеристическое число, устойчивость интегралов, устойчивость системы дифференциальных уравнений, изгиб призматического стержня, решение плоской задачи теории упругости, элементарная алгебра, геометрия древних египтян, арифметика древних египтян

Для цитирования: Одинец В. П. О работах трёх математиков, выпускников Казанского и Петербургского университетов, погибших в Великой Отечественной войне // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 57–72. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_57

Article

About the works of three mathematicians graduates of Kazan and St. Petersburg universities who died in the Great Patriotic War

Vladimir P. Odyniec
W.P.Odyniec@mail.ru

Abstract. The article describes the works of two deceased graduates of Kazan University Marachkov (Morochkov) Vasyly Petrovich (1914–1942), Shishkanov Vasily Stepanovich (1914–1941) as well as graduate of the Imperial St. Petersburg University Zinserling Dmitry Petrovich (1864–1941) who died of starvation in besieged Leningrad.

Keywords: almost periodic function, characteristic number, stability of integrals, stability of the system of differential equations, prismatic rod bending, solving of plane problem of elasticity theory, elementary algebra, geometry of the ancient Egyptians, arithmetic of the ancient Egyptians

For citation: Odyniec V. P. About the works of three mathematicians graduates of Kazan and St. Petersburg universities who died in the Great Patriotic War. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 57−72. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_57

1. Марачков (Морочков) Василий Петрович родился 19 апреля 1914 года в д. Большое Аккозино Покровской волости Чебоксарского уезда Казанской губернии в крестьянской семье. В 1930 году окончил эльбарусовскую школу крестьянской молодёжи (Чувашской АССР), а затем годичные курсы по подготовке учителей школ 1-й ступени. Два года работал учителем начальной школы, а также секретарём-счетоводом сельскохозяйственной артели. Одновременно учился на курсах по подготовке в вузы при Мариинско-Посадском технологическом техникуме города Мариинский Посад.

В 1933 году В. П. Марачков поступил на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета (КГУ).

В 1938 году, окончив университет с отличием, был принят в аспирантуру КГУ. Его научным руководителем стал профессор Константин Петрович Персидский (1903–1970), в будущем академик Казахской ССР.

В 1939 году в КГУ была образована кафедра дифференциальных уравнений. Её первым заведующим стал К. П. Персидский (одновременно он занял должность декана физ.-мат. факультета КГУ). С 1939 года В. П. Марачков начинает работать ассистентом этой новой кафедры, оставаясь в аспирантуре. В 1941 году В.П. Марачков защищает диссертацию «Об устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами» на степень кандидата ф.-м. наук.

В 1945 году в издательстве Казанского физико-математического общества вышла статья В. П. Марачкова [1], посланная им ещё в 1941 году, под тем же названием, как и диссертация. Статья состоит из введения и двух параграфов. Во введении, которое начинается словами о работах А. М. Ляпунова (1857–1918) об устойчивости интегральных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, даётся определение почти периодичности.

Почти периодичность понимается в смысле Харольда Бора (1887–1951)[1], развившего теорию почти периодических функций (1923). Функция $f(t)$, непрерывная в интервале $-\infty < t < +\infty$, называется **почти периодической**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая длина $L = L(\varepsilon)$, чтобы каждый интервал $a < t < a + L$ этой длины содержал, по крайней мере, одно смещение $\tau = \tau(\varepsilon)$ функции $f(t)$, т. е. для всех t $|f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon$. Пример такой функции: $f(t) = \sin\lambda_1 t + \sin\lambda_2 t$, где отличные от нуля числа λ_1 и λ_2 между собой несоизмеримы.

От функции $f(t)$ ещё требуется, чтобы каждый интервал $a < t < a + L$ длины L содержал, по крайней мере, одно смещение $\tau(\varepsilon)$ функции $f(t)$. Непрерывные в интервале $-\infty < t < +\infty$ функции, обладающие таким смещением, называются почти периодическими, а их смещение будем называть **почти периодом**.

Предельно периодической называется функция $f(t)$, определённая на интервале $-\infty < t < +\infty$, которая может быть равномерно аппроксимирована чисто периодическими функциями $p(t)$ для всех t.

В качестве основной теоремы теории Х. Бора о почти периодических функциях выделим следующую: **каждая почти периодическая функция может быть аппроксимирована конечными тригоно-**

[1] Брата известного датского физика Нильса Бора (1885–1962).

метрическими суммами

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} a_{\lambda_n} e^{-i\lambda_n t}$$

равномерно для всех t в интервале $-\infty < t < +\infty$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая сумма $s(t)$, что $|f(t) - s(t)| \leq \varepsilon$ для всех t. При этом в аппроксимирующую сумму $s(t)$ должны войти все члены ряда Фурье функции $f(t)$, у которых $|a(\lambda_n)| > \varepsilon$.

Отметим, что сумма $s(t)$, как правило, будет непериодической функцией.

Продолжателем работ Х. Бора был Жан Фавар (Jean Favard: 1902–1965). Введение заканчивается перечислением результатов Ж. Фавара (три теоремы), на которые опираются результаты, полученные В. П. Марачковым.

В §1 статьи даётся понятие «характеристического числа», инициированное работами А. Пуанкаре (1854–1912).

Пусть имеем функции x вещественного переменного t, получающие определенные значения для всякого $t \geq t_0$. Для этих функций будем предполагать, что в любом отрезке $[t_0, T]$, где T – любое число, большее t_0, существует $\sup |x(t)|$.

Функцию $x(t)$ будем называть *ограниченной*, если модули её при $t \geq t_0$ остаются всегда меньше некоторого предела, в противном случае — *неограниченной*. Функцию $x(t)$ назовём *исчезающей*, если $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Заметим, что если $x(t)$ есть ограниченная функция, то $x(t)e^{-\lambda t}$ при всяком положительном постоянном λ есть функция исчезающая. Если функция $x(t)$ — неисчезающая, то $x(t)e^{\lambda t}$ при всяком положительном постоянном λ есть функция неограниченная.

Рассмотрим функцию $L(t) = x(t)e^{\lambda t}$ в предположении, что она при $\lambda = \lambda_1$ есть исчезающая, а при $\lambda = \lambda_2$ – неограниченная. Тогда можно найти такое вещественное число λ_0, что функция $L(t)$ при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ будет неограниченной для всякого положительного постоянного ε и исчезающей для всякого отрицательного постоянного ε. Это число λ_0 и будем называть **характеристическим числом** функции $x(t)$. Добавим только, что характеристическое число функции $x(t)$ есть $+\infty$ или $-\infty$, смотря по тому, будет ли функция $L(t)$ исчезающей или неограниченной.

Отметим далее, что всякое решение системы дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

где $p_{s\sigma}$ суть непрерывные ограниченные вещественные функции от t для всех $t \geq t_0$, отличное от тривиального решения $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, имеет конечное характеристическое число.

Рассмотрим функцию

$$e^{-\int \sum_1^n p_{ss} dt}.$$

Обозначим её характеристическое число через μ. Заметим, что сумма характеристических чисел независимых решений системы (1) никогда не превосходит μ. Когда имеет место равенство $S = -\mu$, то система линейных дифференциальных уравнений (1) называется *правильной*, в противном случае – неправильной.

В следующем, основном параграфе 2 формулируются основные результаты исследования В. П. Марачкова и даются подробные доказательства.

Рассмотрим теперь систему

$$dx_s/dt = f_{s1}x_1 + \cdots + f_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

в предположении, что все коэффициенты f_{sk} – непрерывные предельно периодические функции от t с одним и тем же вещественным периодом τ_m. А теперь рассмотрим систему

$$dx_s/dt = p_{s1}^{(m)}x_1 + p_{s2}^{(m)}x_2 + \cdots + p_{sn}^{(m)}x_n \quad (m \text{ – это индекс}), \tag{3}$$

где все коэффициенты суть непрерывные периодические функции с тем же вещественным периодом τ_m, построенные по специальному правилу, данному в статье. Далее, в этом параграфе доказывается, что в случае, когда система дифференциальных уравнений (3) с периодическими коэффициентами допускает n групп решений, характеристические числа системы (2) с предельно периодическими коэффициентами достаточно мало отличаются от характеристических чисел системы (3). Профессор К. П. Персидский предложил называть характеристические числа системы дифференциальных уравнений с предельно периодическими коэффициентами **устойчивыми**, если соответствующая ей система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами имеет n групп решений.

Переходим теперь к формулировке основных результатов.

Теорема 1. Характеристические числа системы дифференциальных уравнений с предельно периодическими коэффициентами всегда устойчивы.

Теорема 2. Характеристические числа системы дифференциальных уравнений (2) с предельно периодическими коэффициентами являются пределом характеристических чисел системы (3) с периодическими коэффициентами, когда $m \to \infty$.

Теорема 3. Характеристические числа линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами равны пределу характеристических чисел линейной системы дифференциальных уравнений, отвечающей ей, с периодическими коэффициентами с периодом τ_m, когда $\tau_m \to \infty$.

Теорема 4. Система линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами – правильная.

Терема 5. Характеристические числа системы дифференциальных уравнений треугольного вида

$$dx_s/dt = f_{s1}(t)x_1 + \cdots + f_{ss}(t)x_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{4}$$

где все $f_{sk}(t)$ суть почти периодические функции, равны средним значениям функций $f_{11}(t)$, $f_{22}(t)$, $\cdots$, $f_{nn}(t)$ с обратным знаком.

Вернёмся теперь в 1941-й год. В июле 1941 года в связи с началом Великой отечественной войны Василий Петрович Марачков (в военных документах стоит В. П. Морочков) был мобилизован в РККА. Место службы — 857-й артиллерийский полк 316-й стрелковой дивизии. Звание — младший лейтенант. 5 февраля 1942 года при движении из места формирования к линии фронта В. П. Марачков (по военным документам Морочков) погиб во время авианалёта [2].

2. Шишканов Василий Степанович родился 22 марта 1914 года в деревне Петровка Мензелинского уезда Уфимской губернии в крестьянской семье. В 1922–1926 годах учился в начальной школе, а позже с 1927 по 1931 год — в школе 2-й ступени в городе Мензелинске Татарской АССР. Одновременно в 1929–1931 годах работал учителем школы 1-й ступени [2].

В 1933 г. В. С. Шишканов поступил на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета (КГУ). Во время учебы был старостой группы. Одновременно, начиная с 1934 года, он временно работал на кафедре геометрии, вначале лаборантом, позже и. о. старшего лаборанта. В 1939 году окончил учебу в университете с дипломом 1-й степени и был принят в аспирантуру на кафедру математического анализа. Его научным руководителем стал профессор Николай Николаевич Парфентьев (1877–1943), который в это время заведовал кафедрой механики, но свою основную диссертацию защищал (1904) по математическому анализу. С ним В. С. Шишканов познакомился ещё студентом, слушая его лекции по теоретической механике.

Кроме учебы в аспирантуре, В. С. Шишканов работает ассистентом на кафедре анализа и, кроме того, выполняет обязанности секретаря ученого совета физико-математического факультета. В аспирантуре темой диссертации Василия Степановича стала задача нелинейной теории упругости, связанная с изгибом призматического стержня. Вчерне работа над диссертацией была завершена к лету 1941 года В. С. Шишканов успел отослать статью [3] для «Ученых записок университета», в которой кратко изложен материал диссертации. К сожалению, болезнь Н. Н. Парфентьева и его смерть в январе 1943 года, привели к тому, что статья В. С. Шишканова была опубликована только в 1949 году.

В статье есть введение и четыре параграфа. Во введении сказано, что в работе даётся решение ряда новых задач, связанных с деформацией упругих стержней с помощью метода малого параметра. С помощью этого метода осуществляется сведение нелинейной проблемы к одной или нескольким линейным. Опирается исследование Василия Степановича существенно на статью [4][2] (1939) Николая Вячеславовича Зволинского (1906–1995) и Петра Михайловича Риза (1906–1990), когда они оба ещё не были даже кандидатами наук.

В § 1 формулируется задача изгиба призматического стержня парами, приложенными к его торцам. Подробнее, пусть стержень из однородного и изотропного материала с закреплённым одним из торцов подвержен действию усилия, приложенного к другому из торцов, эквивалентного паре с отличным от нуля моментом, относительно оси, ортогональной центральной оси стержня. Конкретно, пусть закреплён

[2]Эта статья не попала в книгу [5].

левый конец стержня, а правый подвержен действию изгибающей пары. Выберем прямоугольную правую систему координат. Начало координат поместим в центре тяжести закреплённого торца, ось z направим по оси стержня, оси x, y — по главным осям инерции сечения. Допустим, что изгиб стержня происходит в плоскости (x, z) и момент пары равен M_y . Далее формулируется математическая проблема в виде ряда уравнений в 14 пунктах, при этом внутри деформированного стержня компоненты тензора напряжения $\sigma_{i\alpha}$ удовлетворяют условию равновесия в виде уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \partial\sigma_{i\alpha}/\partial x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3).$$

Что касается боковой поверхности стержня, а также торцов, то условия, накладываемые на них, следуют работе [4].

В § 2 с помощью преобразований проделаны операции с уравнениями боковой поверхности. Тем самым в этом параграфе заканчиваются все предварительные преобразования.

В § 3 решается проблема, отнесённая целиком к состоянию, предшествующему деформации. В итоге пришли к решению плоской задачи.

В § 4 плоская задача решается для конкретного случая эллиптического сечения. Окончательные выводы таковы:

1. Центральная ось стержня ($a_1 = 0$, $a_2 = 0$) испытывает изгиб плоскости (a_1, a_3), определяющийся полностью классическим решением; при этом кривизна её классического решения определяется точно. Ось испытывает растяжение: все точки её, кроме начальной и конечной, смещаются влево. Касательные напряжения в точках оси, как и в классическом решении, равны нулю, тогда как нормальные составляющие не равны нулю даже и в начале координат.

2. Горизонтальная плоскость $a_1 = 0$ по классическому решению, испытывает изгиб, не испытывает растяжения. В данном случае изгиб остаётся тем же самым; и в то же время данное сечение оказывается растянутым как в поперечном (параллельный сдвиг), так и в продольном направлениях. Все составляющие напряжения, кроме скалывающих, не равны нулю.

3. Плоское до деформации сечение $a_2 = 0$ и после деформации остаётся плоским; смещения по a_1 и по a_3 существенным образом определяются длиной стержня.

4. Торцы стержня, как и в классическом решении, остаются плоскими и параллельными друг другу.

24 июня 1941 года Василий Степанович Шишканов был призван в ряды РККА. Местом службы стала 20-я запасная строительная бригада. Официально он выбыл из рядов РККА как погибший красноармеец 8 августа 1941 года.

3. Цинзерлинг (до 1914 года **фон Цинзерлинг**) **Дмитрий Петрович** родился 2 июня 1864 года в Тамбове в семье потомственных дворян, выходцев из немецкой части Швейцарии [6]. В 1887 году по окончании физико-математического факультета Петербургского университета он стал служить в департаменте народного просвещения Министерства народного просвещения Российской империи.

Необходимость в привлечении математика к работе в департаменте народного просвещения связана с тем, что с сентября 1831 года в этом департаменте была сосредоточена статистическая работа, а фон Цизерлинг писал дипломную работу по вопросам математической статистики. Одновременно он начинает преподавательскую деятельность, читая математические курсы и начертательную геометрию в частной гимназии и реальном училище Якова Григорьевича Гуревича (1841–1906). Позже Дмитрий Петрович преподавал математику в Женском училище Терезии Ольденбургской (1815–1871), которое по указу Александра III в 1891 году было преобразовано в Институт.

Позже после 1908 г. Дмитрий Петрович преподаёт в Петербургской земской учительской школе, переехавшей в 1907 году на территорию Чугунно-литейного завода Ф. К. Сан-Галле на Петровском острове. Эта школа была предназначена для получения крестьянскими детьми среднего педагогического образования. В девятисотых годах Д. П. фон Цинзерлинг является инспектором и преподаёт в гимназии Л. С. Таганцевой [6].

В 1897 году в связи с 10-летней безупречной службой Д. П. фон Цинзерлинг был награждён орденом Св. Анны 2-й степени. В 1913 году в связи с 25-летием самоотверженной педагогической службы Дмитрий Петрович фон Цинзерлинг получает титул действительного статского советника. С началом Первой мировой войны (1914–1918) Д. П. Цинзерлинг преподаёт на курсах Петроградского учебного округа для подготовки преподавателей средних учебных заведений.

До 1917 года Д. П. Цинзерлинг издал две книги: «Практическое руководство статистики» [7], в которой использовал свой многолетний опыт по обработке статистических материалов, а также совместно с Н. Вульфом книгу «Элементарная алебра» [8]. Последняя книга издавалась до 1917 года дважды: в 1912 [8] и 1916 годах. Во втором издании (1916) в книгу внесены исправления и дополнения, сделанные Дмитрием Петровичем.

После революции 1917 года и до 1919 года Дмитрий Петрович перебивался случайными заработками. На постоянную работу он устроился учителем математики в школу с сентября 1919 года.

В 1923 году он переиздает в серии: учебники и учебные пособия для трудовой школы (выпуск 90), книгу «Элементарная алгебра» объёмом 365 страниц, в которой изложен по существу основной материал по алгебре, преподававшийся в гимназиях и реальных училищах до 1917 года. На рубеже 1924–1925 годов он переиздаёт и руководство по статистике объёмом 167 страниц, убрав только некоторые примеры. В школе он работает до 1931 года, когда появилась потребность в преподавателях математики в открывшихся техникумах.

В 1925 году вышла статья Дмитрия Петровича «Геометрия у древних египтян» [9], сделавшая его имя известным не только в Советском Союзе, но и за рубежом. Статья опирается на доклад Дмитрия Петровича, представленный академиком Б. А. Тураевым (1868–1920) 16 апреля 1919 года на заседании Отделения Исторических наук и филологии Российской академии наук. Основывается эта статья главным образом на два папируса: папирус Ринда (Rhind Alexander Henry: 1833–1963), хранящийся в Британском музее[3], и папирус Владимира Семёновича Голенищева (1856–1947), хранящийся в Москве в Музее изящных искусств. «Московский» папирус относится к периоду 1849–1801 годов до н. э. Папирус «Британский» относится формально к периоду 1788–1580 годов до н. э. Однако фактически этот папирус является переписанным с папируса того же периода, что и «Московский». Оба папируса написаны так называемым гиератическим шрифтом, т. е. самым старым из древнеегипетских шрифтов.

Ещё один папирус был найден феллахами в 1885 году в Верхнем Египте, в Ахмиме, написанный на греческом языке в VII-VIII веках н. э. Ничего нового этот папирус не даёт. Далее, в числе фрагментов папируса, найденных в Кахуне (1889) и хранящихся в Берлине, есть один геометрического содержания.

[3]Фрагменты средней части папируса хранятся в Нью-Йорке.

Из 18 геометрических задач «Британского» папируса шесть задач даны на вычисление емкостей житниц, из этих шести задач три задачи — на вычисление ёмкости амбара, имеющего форму усечённого конуса, одна на вычисление емкости, имеющей форму усеченной пирамиды, две последние задачи на вычисление размеров амбара по данной его ёмкости. Ещё пять задач относятся к определению площадей. Из них одна — на определение площади четырёхугольника, одна — на определение площади круга, одна — на определение частного вида треугольника и две — на определение частного вида трапеции. Наконец, пять задач — на вычисление пирамид, причем не вычисление объёма пирамиды, а её формы и обратно по форме определение её размеров. При этом пирамида предполагается правильной с квадратным основанием.

Все три задачи Ахминского папируса относятся к вычислению объёмов, первая – усечённого конуса, вторая и третья – объёмов прямоугольных параллелепипедов.

В трёх из четырёх задач, переведённых В. С. Голенищевым, требовалось найти площади прямоугольника и прямоугольного треугольника, а в четвёртой требовалось вычислить объём усечённой пирамиды. В единственной задаче «Берлинского» фрагмента речь идёт либо о вычислении объёма полушара, либо объёма усечённого конуса. Далее в статье опровергаются утверждения египтолога Августа Эйзенлора (1832–1902)[4] и математика Георга Кантора (1845–1918) о неправильности вычисления площади треугольника древними египтянами. Ошибка произошла из-за чертежа — прямоугольный треугольник был принят за равнобедренный.

О том, что треугольник на чертеже прямоугольный, ясно написал Виктор Викторович Бобынин (1849–1919). Формулы площади трапеции и объёма пирамид у египтян правильные. При вычислении площади круга, объёмов конуса и шара египтяне использовали вместо π число 3,16049.

Наконец, в конце статьи приведены переводы шести разных задач вместе с оригинальным текстом папирусов.

---

[4]Математический папирус А. Ринда впервые переведён, комментирован и издан в 1877 году на немецком языке под заголовком «Математический справочник древнего Египта» проф. А. Эйзенлорем. Папирус В. С Голенищева был переведен (не до конца) проф. Б. А. Тураевым к 1917 году. После его смерти в 1920 году его ученик проф. В. В. Струве издал вместе с комментарием в 1930 году на немецком языке в Берлине под заголовком «Математический папирус Государственного музея изящных искусств в Москве».

После 1931 года Дмитрий Петрович Цинзерлинг будучи преподавателем техникумов приравнивается к научным работникам и попадает в соответствующие справочники.

Так, в справочнике [10, с. 381] за 1934 год он уже фигурирует как преподаватель по статистике (общей и математической) Планового техникума и техникума пищевой промышленности, а также Промышленно-экономических курсов.

В 1939 году Д. П. Цинзерлинг публикует в журнале «Математика в школе» в разделе «Научный отдел» статью «Математика в Древнем Египте» [11; 12]. Статья имеет введение и две основные части: ч. 1. Арифметика; ч. 2. Геометрия. Первая часть [7] опубликована в № 2 журнала, вторая часть – в № 3 [9]. В папирусе А. Ринда содержалось 64 арифметические задачи, в папирусе В. С. Голенищева содержалось 18 арифметических задач. Начнём с рассмотрения арифметических задач папируса А. Ринда.

Прежде всего, отметим, что в древнем Египте пользовались десятичной системой счисления. Далее, единица каждого порядка целого числа повторялась столько раз, сколько единиц этого разряда имелось в данном числе. Египтяне читали и писали справа налево и, значит, знаки шли по старшинству порядков. Что касается дробей, то египтяне пользовались лишь дробями, числитель которых равен 1 (исключением была дробь $2/3$, которая обозначалась специальным знаком). Это давало возможность использовать любые дроби, так как всякую дробь можно представить в виде суммы дробей вида $1/m + 2/(2n+1)$, где m и n – целые числа. Так как дробь $2/(2n+1)$ можно представить в виде $1/(2n+1) + 1/(2n+1)$, то всякую дробь можно представить как сумму дробей с 1 в числителе. Сложение дробей сводилось к приведению дробей к общему знаменателю. При этом чаще брался наибольший из знаменателей. Вычитание египтяне рассматривали как действие, обратное сложению. Умножение на целое число производилось путём последовательного удвоения (иногда умножения на 10), а затем сложения частных произведений. Умножение одной суммы нескольких слагаемых на другую сумму нескольких слагаемых производилось по правилам умножения многочлена на многочлен. Деление египтяне считали действием, обратным умножению. В практических задачах основной мерой длины был локоть, который делился на 7 ладоней, ладонь делилась на 4 пальца. Единицей меры площади был сетат $=$ 10000 кв. локтей.

Из 64 задач папируса А. Ринда шесть задач были посвящены разделению между 10 лицами поровну 1, 2, 6, 7,8 и 9 караваев хлева. Следующие 17 задач можно разбить на две подгруппы. В первой нужно произвести умножение одной дроби на другую, например 9/4 умножить на 11/6. Во второй подгруппе даны задачи на вычитание дробей и чисел. Ещё группа из 15 задач требует нахождения неизвестной величины по её части. Ещё есть отдельные задачи, например, на арифметическую прогрессию: «Даны 100 караваев хлеба на 5 лиц; одна седьмая доля первых трёх лиц равна доле двух последних. Какова разность долей?» Ещё 24 задачи относятся к смешанному типу. Наконец, 10 задач связаны с обменом караваев хлеба разной величины на пиво разной крепости. Для этого караваи хлеба разной величины и пива разной крепости выражаются в количестве муки, идущей на их изготовление. В числе этих 10 задач есть и задачи на пропорциональное деление.

В «Московском» папирусе были представлены 18 арифметических задач, но ни к одной задаче нет процесса вычислений. Однако в этом папирусе интересны задачи по содержанию. Пример: «Из 16 мер верхнеегипетского зерна надо приготовить караваи хлеба (всего 100) такой величины, что из одной меры выходит 20 караваев хлеба и некоторое количество пива трёх сортов с крепостью 2, 4, 6, если бы пиво было изготовлено из обыкновенного ячменя, но пиво было изготовлено с крепостью, соответствующей крепости пива, изготовленного из особого сорта пшеницы и фиников, т. е. с крепостью вдвое большею. Определить, сколько выйдет кувшинов пива». Ко всем арифметическим задачам древних египтян Д. П. Цинзерлинг даёт решение.

Переходим теперь ко второй части статьи – «Математика в Древнем Египте» [12].

В ней кратко, но доступным языком пересказано содержание статьи [9]. При этом были отброшены все дискуссионные вопросы.

С началом Великой Отечественной войны Д. П. Цинзерлингг оставался в Ленинграде. Он умер от голода в декабре 1941 года. Проживал он тогда на Советском (ныне Суворовском) пр., д. 38, кв. 19 ([13], с. 179). Ни точная дата смерти, ни место захоронения неизвестны.

У Д. П. Цинзерлинга было четверо детей: три сына и дочь. Старший сын Борис (1890–1961), архитектор и сценограф, был артиллеристом в армии у «белых». С 1922 года жил в Варшаве, сохранив приставку фон при фамилии. Средний сын Всеволод (1891–1960) – ученый паталогоморфолог, чл. корр. Академии мед. наук (1946). Младший сын

Юрий (1894–1939) — геоботаник, доктор биологических наук; в 1938 году, будучи директором Ботанического института АН СССР, был арестован и погиб в 1939 году. Реабилитирован в 1957 году. Дочь умерла ещё до революции [6].

Список источников

1. **Марачков В. П.** Об устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // *Изв. Физ.-мат. об-ва.* Казань, 1945. (3) 13. С. 3–50.

2. Книга памяти Казанского университета. Казань: Из-во Казанского ун-та, 2010. 124 с.

3. **Шишканов В. С.** Изгиб призматического стержня парами // Учен. записки у-та. Казань, 1949. 109:3. С. 39–61.

4. **Зволинский Н. В., Риз П. М.** О некоторых задачах нелинейной теории упругости // *Прикл. мат. мех.* 1939. Т. II. Вып. 4. С. 417–428.

5. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957. Т. 2. Биобиблиография. М.: Физ.-мат. лит, 1959. 819 с.

6. **Цинзерлинг В. А.** Цинзерлинги. М.: Практическая медицина, 2023. 120 с.

7. **Цинзерлинг Д. П.** Практическое руководство статистики. Л.: Госиздат, 1924 (обл. 1925). 167 с.

8. **Вульф Н., Цинзерлинг Д.** Элементарная алгебра. СПб.: Тип. А. С. Суворина, 1912. 344 с. (Переиздания в 1916 и 1923 гг.)

9. **Цинзерлинг Д. П.** Геометрия у древних египтян // *Известия Российской академии наук. VI серия.* Л.: Из-во АН, 1925. Т. 19. Вып. 12.С. 541–568.

10. Научные работники Ленинграда. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 721 с.

11. **Цинзерлинг Д. П.** Математика у древних египтян // *Математика в школе.* 1939. № 2. С. 5–20.

12. **Цинзерлинг Д. П.** Математика у древних египтян // *Математика в школе.* 1939. № 3. С. 3–15.

13. Книга памяти. Ленинград 1941–1945. Т. 33. СПб: Правительство Санкт-Петербурга, 2006. 712 с.

References

1. **Marachkov V. P.** Stability of integrals of a system of differential equations with almost periodic coefficients. *Izv. Phiz.-mat. o-va* [Izv. Phys.-math. society]. Kazan, 1945. (3), 13. Pp. 3–50. (In Russ.)

2. *Kniga pamyati Kazanskogo universiteta* [Kazan University Memorial Book]. Kazan: Kazan University Publishing House, 2010. 124 p. (In Russ.)

3. **Shishkanov V. S.** Bending a Prizmatic Rod in Pairs. *Uchenye zap. universiteta* [University Sci. Notes]. Kazan, 1949. 109:3. Pp. 39–61. (In Russ.)

4. **Zvolinsky N. V., Riz P. M.** On Some Problems of the Nonlinear Theory of Elastcity. *Prikl. mat. mechan.* [Appl. Math. Mech.]. 1939. Vol. II. Issue 4. Pp. 417–428. (In Russ.)

5. *Matematika v SSSR za sorok let 1917–1957. T. 2. Biobibliografiya* [Mathematics in the USSR for forty years 1917–1957. Vol. 2. Biobibliography]. Moscow: Phizmatlit, 1959. 819 p. (In Russ.)

6. **Zinserling V. A.** *Zinzerlings* [Zinserlings]. Moscow: Prakticheskaya medicina, 2023. 120 p. (In Russ.)

7. **Zinserling D. P.** *Prakticheskoye rukovodstvo statistiki* [A Practical Guide to Statistics]. Leningrad: Gosizdat, 1924 (cover 1925). 167 p. (In Russ.)

8. **Vulf N., Zinserling D.** *Elementarnaya algebra* [Elementary Algebra]. St. Petersburg: Tip. A. S. Suvorina, 1912. 344 P. (Reprints in 1916 and 1923). (In Russ.)

9. **Zinserling D. P.** Geometry in the Ancient Egyptians. *Izvestiya Rossiiskoi academii nauk. VI ser.* [News of the Russian Academy of

Sciences. VI series]. Leningrad: Izd-vo AN, 1925. Vol. 19. Issue 12. Pp. 541–568. (In Russ.)

10. *Nauchnyye rabotniki Leningrada* [Scientists of Leningrad]. Leningrad: Izd-vo AN USSR, 1934. 721 p. (In Russ.)
11. **Zinserling D. P.** Mathematics in the Ancient Egyptians. *Matematika v shkole* [Mathematics at school]. 1939. No 2. Pp. 5–20. (In Russ.)
12. **Zinserling D. P.** Mathematics in the Ancient Egyptians. *Matematika v shkole* [Mathematics at school]. 1939. No 3. Pp. 3–15. (In Russ.)
13. *Kniga pamyati. Leningrad 1941–1945* [Memorial Book. Leningrad 1941–1945]. St. Petersburg: Pravitelstvo St. Peterburga, 2006. Bd.33. 712 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Одинец Владимир Петрович / Vladimir P. Odinets
д.ф.-м.н., профессор / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 30.03.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 05.05.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 07.05.2024

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 2 (51)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 2 (51)

Научная статья

УДК 004.021,630.431
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_73

МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА. БИБЛИОТЕКА PYTHON SCIKIT-OPT

Надежда Николаевна Бабикова, Михаил Михайлович Глухой, Евгения Николаевна Старцева, Никита Адрианович Чернян
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, valmasha@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются метаэвристические методы решения задачи коммивояжера. Представлены результаты тестирования алгоритма муравьиной колонии и генетического алгоритма библиотеки Python Scikit-opt на двух наборах данных (бенчмарках) популярной и широко используемой библиотеки TSPLIB. Тестирование показало возможность применения библиотеки на практике и в учебном процессе: за приемлемое время получены решения, близкие к оптимальным.

Ключевые слова: Python, Scikit-opt, TSPLIB, генетический алгоритм, алгоритм муравьиной колонии

Для цитирования: Бабикова Н. Н., Глухой М. М., Старцева Е. Н., Чернян Н. А. Метаэвристические алгоритмы решения задачи коммивояжера. Библиотека Python Scikit-opt // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 2 (51). С. 73–88. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_73

Article

Metaheuristic algorithms for the traveling salesman problem. Python library Scikit-opt

Nadezhda N. Babikova, Mikhail M. Glukhoy, Evgenija N. Startseva, Nikita A. Chernyan
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, valmasha@mail.ru

Abstract. The article discusses metaheuristic methods for solving the traveling salesman problem. The results of testing the ant colony algorithm and the genetic algorithm of the Python Scikit-opt library on two data sets (benchmarks) of the popular and widely used TSPLIB library are presented. Testing showed the possibility of using the library in practice and in the educational process: solutions close to optimal were obtained in an acceptable time.

Keywords: Python, Scikit-opt, TSPLIB, genetic algorithm, ant colony algorithm

For citation: Babikova N. N., Glukhoy M. M., Startseva E. N., Chernyan N. A. Metaheuristic algorithms for the traveling salesman problem. Python library Scikit-opt. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 2 (51), pp. 73–88. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_2_73

1. Введение

Задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) – известная и популярная задача комбинаторной оптимизации: требуется найти самый короткий (выгодный) замкнутый маршрут, который позволит коммивояжеру посетить каждый город из заданного списка ровно один раз. Эквивалентная формулировка с точки зрения теории графов: дан полный взвешенный граф (где вершины представляют собой города, ребра – дороги, а веса – стоимость или протяженность этих дорог), требуется найти гамильтонов цикл с наименьшим весом.

Задача коммивояжера (ЗК) относится к числу трансвычислительных. Трансвычислительной называют задачу, для решения которой требуется обработать более 10^{93} бит информации. Если представить гипотетический компьютер, масса которого равна массе Земли, работающий с максимально возможной вычислительной скоростью (предел Бремерманна), то он обработает 10^{93} бит за 4.54 миллиарда лет (время существования Земли) [1]. Точное решение задачи коммивояжера методом полного перебора требует проверки $(n-1)!/2$ вариантов. При числе городов, большем 66 (поскольку $66! \approx 5.443449391 \times 10^{92}$, а $67! \approx 3.647111092 \times 10^{94}$), для точного решения ЗК потребуются миллиарды лет [2].

Для задачи коммивояжера разработано большое число приближенных методов решения, в том числе метаэвристических. Метаэвристические алгоритмы реализуют прямой стохастический поиск решений, оптимальных или близких к оптимальным, пока не будет достигнуто заданное число итераций или выполнено некоторое условие [3]. Метаэвристические алгоритмы не гарантируют обнаружения точного решения задачи, но позволяют найти достаточно хорошее решение за приемлемое время [4]. Метаэвристические методы можно разделить на четыре группы: мультистартовые; методы, имитирующие физические процессы; методы «роевого» интеллекта, в том числе алгоритм муравьиной колонии; эволюционные, в том числе генетический алгоритм [5]. Генетический и муравьиный алгоритмы являются наиболее популярными метаэвристическими алгоритмами для решения ЗК.

Для оценки эффективности реализации приближенных алгоритмов можно использовать бенчмарки — эталонные наборы данных, для которых известны точные решения. Популярной и широко используемой библиотекой наборов данных для задачи коммивояжера является библиотека TSPLIB [6].

Среди более чем 100000 библиотек языка Python есть и библиотеки метаэвристических алгоритмов, например, библиотеки Aco_routing [7], ACO [8] реализуют алгоритм муравьиной колонии, библиотеки Pygad [9], DEAP [10] — генетический алгоритм. В библиотеке Scikit-opt [11] реализованы алгоритм роя частиц, алгоритм имитации отжига, алгоритм искусственной иммунной системы, алгоритм искусственной стаи рыб, *генетический алгоритм* и *алгоритм муравьиной колонии*.

Не удалось обнаружить публикаций, связанных с библиотекой Python Scikit-opt (запрос «Scikit-opt» в библиотеке Elibrary, поиск в полном тексте публикаций, в ключевых словах, в названии, в аннотации). Поэтому для оценки возможности использования алгоритма колонии муравьев и генетического алгоритма библиотеки Scikit-opt на практике и в учебном процессе было проведено тестирование этих алгоритмов на двух наборах данных библиотеки TSPLIB для симметричной задачи коммивояжера.

2. Материалы и методы

TSPLIB — это библиотека бенчмарков для задачи коммивояжера и связанных с ней проблем, впервые опубликованная Gerhard Reinelt (Гейдельберский университет) в 1991 году [12]. Файлы с наборами данных доступны на сайте Гейдельберского университета [13] в специальном формате «.tsp». Файлы можно открыть обычным текстовым редактором Блокнот (рис. 1) или обработать с помощью Python библиотеки tsplib95 (листинг 1) [14]. Каждый файл содержит спецификацию набора и сам набор данных.

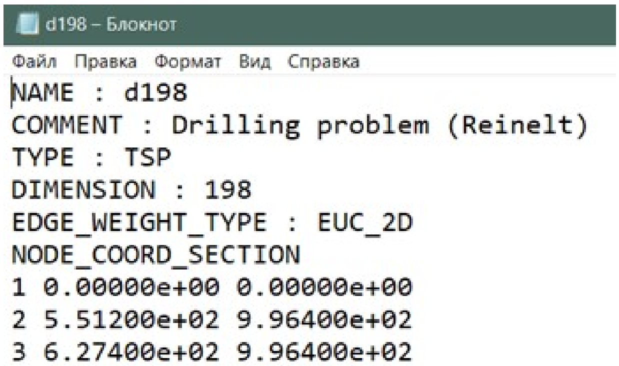

Рис. 1. Фрагмент набора данных d198

Листинг 1

Пример применения библиотеки tsplib95 для чтения набора данных библиотеки TSPLIB

```
import pandas as pd
import tsplib95
from scipy.spatial.distance import pdist, squareform
#считывание файла с расширением .tsp
with open("d198.tsp") as f:
    text = f.read()
#получение датасета из строки
problem = tsplib95.parse(text)
#извлечение координат
arr = []
for _, value in problem.node_coords.items():
    arr.append(value)
```

Окончание листинга 1

```
#расчет матрицы расстояний
dist_matrix = squareform(pdist(arr, "euclidean"))
#запись в excel файл
df1 = pd.DataFrame(dist_matrix)
df1.to_excel("d198.xlsx", header=False, index=False)
```

Тестирование проводилось на двух наборах данных:

- d198.tsp — AMD Ryzen 5 5600 6-Core Processor 3.50 GHz, G.Skill RIPJAWS V 16 ГБ 3600 МГц DDR4 Memory, среда PyCharm;
- bays29.tsp — Intel Core i5-5200U (ноутбук), 4GB DDR3 L Memory, среда IDLE.

Файл d198.tsp содержит координаты 198 вершин графа для задачи бурения, расстояние между вершинами — евклидово на плоскости. В файле bays29.tsp имеется полная матрица расстояний для 29 городов Баварии, расстояние между городами — расстояние городских кварталов.

Алгоритм муравьиных колоний имитирует механизм поведения муравьев в природе, основанный на непрямой передаче информации посредством особого пахучего вещества — феромона. Муравьи оставляют на земле следы феромонов, а другие муравьи могут почувствовать их интенсивность. Когда тропа какое-то время не используется, след феромона медленно исчезает. Чем сильнее концентрация феромонов на тропе, тем более привлекательна она для муравьев. Чем короче тропа, тем быстрее муравьи ее могут пройти и оставить новые феромоновые следы, а значит, на коротких тропах концентрация феромона будет выше. Таким образом муравьи находят короткие маршруты.

Работа алгоритма начинается с того, что некоторое количество «муравьев» помещается в вершины графа. Каждый «муравей» выбирает следующую вершину для перемещения случайным образом: если «муравей» находится в i вершине, то вероятность перемещения в j вершину вычисляется по формуле

$$p_{ij} = \frac{(\tau_{ij})^\alpha (1/d_{ij})^\beta}{\sum\limits_{k \in N} (\tau_{ik})^\alpha (1/d_{ik})^\beta},$$

где τ_{ij} — количество феромона на ребре (i, j);
d_{ij} — длина ребра (i, j);
α, β — регулируемые параметры, определяющие относительное влияние феромона и длины ребра на привлекательность ребра (i, j);
N — множество вершин, которые «муравей» еще не посетил.

При $\alpha = 0$ алгоритм превращается в классический жадный алгоритм, а при $\beta = 0$ длина ребра не влияет на выбор следующей вершины. Формула определяет вероятности для каждой непосещенной вершины, но выбор вершины «муравьем» происходит по принципу «колеса рулетки»: каждая вершина имеет свой сектор с площадью, пропорциональной вероятности. Для выбора вершины нужно «бросить шарик» — сгенерировать случайное число от 0 до 1 и определить сектор, т. е. номер вершины (рис. 2).

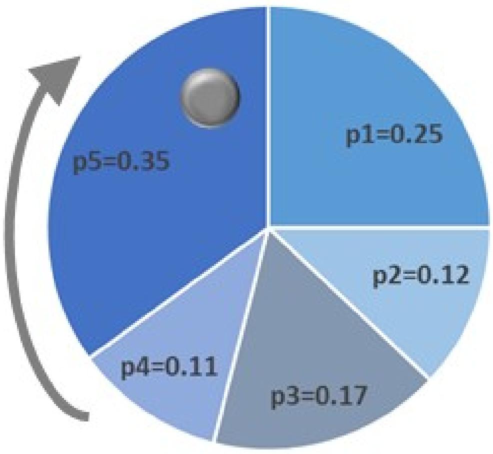

Рис. 2. Колесо рулетки

После того как все «муравьи» построят свои маршруты, определяется и сохраняется лучший маршрут. Количество феромона для каждого ребра обновляется: количество увеличивается на ребрах лучшего маршрута, некоторое количество феромона испаряется со всех ребер. «Муравьи» снова распределяются по вершинам, и алгоритм продолжает работу до тех пор, пока не выполнится условие окончания — будет достигнуто максимальное количество итераций или в течение нескольких итераций решение не будет меняться (с заданной точностью).

Метод муравьиной колонии *ACA_ TCP* библиотеки Scikit-opt (листинг 2) имеет следующие параметры:

func — целевая функция, длина маршрута,
n_dim — количество городов,
size_pop — размер популяции, количество муравьев,
max_iter — максимальное количество итераций,
distance_matrix — матрица расстояний,
alpha — значимость феромона,
beta — значимость расстояния,
rho — коэффициент испарения феромона.

Листинг 2

Пример применения метода ACA_TCP

```
#билиотека Scikit-opt требует импорта numpy
import numpy as np
from sko.ACA import ACA_TCP
#функция расчета длины маршрута
def path_length(path):
    n_points = path.shape[0]
    return sum([dist_matrix[path[i % n_points],
path[(i + 1) % n_points]] for i in range(n_points)])
# используем dist_matrix (листинг 1)
n_points = len(dist_matrix)
ants = ACA_TSP(func=path_length, n_dim=n_points,
              size_pop=100, max_iter=200,
              distance_matrix=dist_matrix)
best_points, best_distance = ants.run()
```

Генетические алгоритмы основаны на принципах биологической эволюции, имитируют процессы естественного отбора, механизмы наследственности и изменчивости. В генетическом алгоритме начальная популяция хромосом (возможных решений) эволюционирует: на каждой итерации к текущей популяции применяются операторы отбора (селекции), скрещивания, мутации. Хромосомы каждого поколения оцениваются с помощью функции приспособленности (целевой функции задачи). Итерационный процесс продолжается до выполнения одного или нескольких условий останова (стабилизация популяции, максимальное количество итераций, время выполнения и др.).

В ЗК хромосома кодируется последовательностью вершин графа и представляет некоторый маршрут, функция приспособленности задает длину (стоимость) маршрута.

Операторы отбора, скрещивания и мутации носят вероятностный характер. Например, один из методов отбора — знакомое по муравьиному алгоритму «колесо рулетки». Хромосомы отбираются в качестве «родителей» следующего поколения с вероятностью, пропорциональной их приспособленности. Мутация (случайное точечное изменение хромосомы) происходит не в обязательном порядке, а с некоторой вероятностью.

Метод *GA_ TCP*, реализующий генетический алгоритм для ЗК, библиотеки Scikit-opt (листинг 3) имеет следующие параметры:
func — целевая функция, длина маршрута,
n_dim – количество городов,
size_pop — размер популяции, количество хромосом,
max_iter — максимальное количество итераций,
prob_mut — вероятность мутации.

Листинг 3

Пример применения метода GA_TSP

```
import numpy as np
import sko
#функция расчета длины маршрута
def path_length(path):
    n_points = path.shape[0]
    return sum([dist_matrix[path[i % n_points],
path[(i + 1) % n_points]] for i in range(n_points)])
n_points = len(dist_matrix)
chrom = sko.GA.GA_TSP(func=path_length,
    n_dim=n_points, size_pop=200, max_iter=4000, prob_mut=0.3)
best_points, best_distance = chrom.run()
print(best_points, best_distance)
```

3. Результаты и обсуждение

Набор данных bays29.tsp

Длина оптимального маршрута для набора данных bays29.tsp равна 2020. Была проведена серия запусков алгоритма муравьиной колонии при различных сочетаниях параметров. Длина лучшего из найденных маршрутов составила 2030 при значениях параметров: количество муравьев — 29 (число вершин), максимальное число итераций — 150, значимость феромона — 1, значимость расстояния — 5, коэффициент испарения феромона — 0.05. Затем проведена серия запусков алгоритма при этих значениях параметров. Некоторые полученные маршруты приведены в табл. 1. Отклонение всех полученных решений от оптимального находится в пределах 3 %. Время выполнения программы около 10 секунд. Дальнейшее увеличение количества муравьев и итераций не приводит к улучшению: разброс получаемых маршрутов остается приблизительно таким же.

Таблица 1

Результаты серии запусков алгоритма муравьиной колонии на наборе данных bays29.tsp

	Маршрут	**Длина**
	0 27 5 11 8 4 25 28 2 1 19 9 3 14 17 16 13 21 10 18 24 6 22 26 7 23 15 12 20	2020
1	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 20 12 9 19 3 14 17 13 16 21 10 18 24 6 22 26 15 23 7	2030
2	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 20 19 9 3 14 17 16 13 21 10 18 12 15 24 6 22 26 7 23	2035
3	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 20 19 9 3 14 17 16 13 21 10 18 24 6 22 26 7 23 15 12	2039
4	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 20 19 9 3 14 17 13 16 21 10 18 24 6 22 26 7 23 15 12	2041
5	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 20 19 9 3 14 17 16 13 21 10 18 24 6 22 26 23 12 15 7	2053
6	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 20 19 9 3 14 13 17 16 21 10 18 24 6 22 26 7 23 15 12	2063
7	**0 27 5 11 8 4 25 28 2 1** 19 9 3 14 17 13 21 16 **10 18 24 6 22 26 7 23 15 12 20**	2069
	n_dim=29, size_pop=29, max_iter=150, alpha=1, beta=5, rho=0.05	

Далее была проведена серия запусков генетического алгоритма. Маршруты, длина которых отличается от оптимальной не более чем на 5 %, были получены при количестве хромосом 200, максимальном числе итераций — 2000, вероятности мутации — 0.3. Время работы программы около 1 минуты. Некоторые полученные маршруты приведены в табл. 2. За всю серию запусков программы два раза алгоритм нашел оптимальный маршрут.

Таблица 2

Результаты серии запусков генетического алгоритма на наборе данных bays29.tsp

	Маршрут	**Длина**
	0 27 5 11 8 4 25 28 2 1 19 9 3 14 17 16 13 21 10 18 24 6 22 26 7 23 15 12 20	2020
1	9 3 14 17 16 13 21 10 18 24 6 22 26 7 23 15 12 20 0 27 5 11 8 4 25 28 2 1 19	2020
2	25 4 8 11 5 27 0 20 12 15 23 7 26 22 6 24 18 10 21 13 16 17 14 3 9 19 1 2 28	2020
3	18 10 21 13 16 17 14 3 9 19 20 1 2 28 25 4 8 11 5 27 0 7 23 12 15 26 22 6 24	2026
4	15 18 12 20 0 27 5 11 8 4 25 28 2 1 19 9 3 14 17 16 13 21 10 24 6 22 26 7 23	2045
5	17 14 18 3 9 19 12 20 1 2 28 25 4 8 11 5 27 0 23 15 26 7 22 6 24 10 21 13 16	2072
6	9 3 17 16 13 21 10 14 18 15 24 6 22 26 7 23 12 0 27 5 11 8 4 25 28 2 1 20 19	2097
7	2 1 20 0 12 19 9 3 14 17 16 13 21 10 24 6 18 15 23 26 22 7 27 5 11 8 4 25 28	2116
	n_dim=29, size_pop=200, max_iter=2000, prob_mut=0.3	

Если сравнить результаты работы алгоритма муравьиных колоний и генетического алгоритма, то можно заметить, что маршруты, найденные алгоритмом муравьиных колоний, начинаются с одной и той же последовательности городов — 0 27 5 11 8 4 25 28 2 1...; а маршруты, построенные генетическим алгоритмом, все разные.

Набор данных d198.tsp

Длина оптимального маршрута для набора данных d198.tsp равна 15780. Была проведена серия запусков алгоритма муравьиной колонии при различных сочетаниях параметров, параметры подбирались так, чтобы время выполнения программы составляло около 5 минут. Установлено, что если количество муравьев находится в пределах от 100 до 120, количество итераций в пределах от 200 до 220, значимость феромона равна 1, значимость расстояния — 2, коэффициент испарения феромона — 0.1, то алгоритм находит маршруты, длина которых отклоняется от оптимальной в пределах 15 %. Результаты одной серии испытаний представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты серии запусков алгоритма муравьиной колонии на наборе данных d198.tsp

Количество итераций	Длина маршрута	Время выполнения, сек	Отклонение, %
100	18852	147.87	19.47
120	18671	179.27	18.32
140	18384	214.00	16.50
160	17872	240.13	13.26
180	17621	268.30	11.67
200	17489	290.20	10.83
220	17444	320.32	10.55
n_dim=198, size_pop=100, alpha=1, beta=2, rho=0.1			

Далее была проведена серия запусков генетического алгоритма при различных сочетаниях параметров, параметры подбирались так, чтобы время выполнения программы составляло около 5 минут. Длина лучшего найденного маршрута равна 16611, отклонение от оптимального маршрута составляет 5.3 %. Если размер популяции уменьшается от 700 до 100, количество итераций соответственно увеличивается от 1124 до 7624, вероятность мутации — 0.3, то алгоритм находит маршруты, длина которых отклоняется от оптимальной в пределах 10 % (табл. 4).

Таблица 4

Результаты серии запусков генетического алгоритма на наборе данных d198.tsp

Размер популяции	Количество итераций	Длина маршрута	Время, сек	Отклонение, %
1000	785	17784	292.18	12.70
900	883	17917	297.40	13.54
800	995	17363	295.43	10.00
700	1124	17139	293.13	8.60
600	1293	16846	288.47	6.75
500	1583	16797	295.69	6.44
400	1971	16867	293.66	6.88
300	2682	16895	299.95	7.00
200	3915	16611	290.76	5.26
100	7624	16688	285.05	5.75
n_dim=198, prob_mut=0.3				

Итак, на небольшом наборе данных bays29 генетический и муравьиный алгоритмы показали сравнимые результаты. На большем наборе данных d198 при ограничении на время работы программы в 5 минут генетический алгоритм показал более точные результаты (табл. 5).

Таблица 5

Сравнение лучших маршрутов, полученных при помощи генетического алгоритма и алгоритма муравьиной колонии на наборе данных d198.tsp

Алгоритм	Время работы, сек	Длина маршрута	Отклонение, %
Муравьиный	290.20	17488.67	10.83
Генетический	290.76	16611.00	5.26

Для набора данных bays29.tsp в работе [15] приводятся результаты тестирования генетического алгоритма решения ЗК, программа разработана авторами. К сожалению, авторы не указали, на каком языке написана программа. При размере популяции 100 хромосом, вероятности скрещивания, равной 1, вероятности мутации, равной 1, точное решение задачи было получено на итерации 18907, время оптимизации около 39 секунд. В серии 50 запусков программы были получены маршруты длиной от 2020 до 2056. Результаты сопоставимы с результатами, полученными нами для библиотеки Scikit-opt.

4. Заключение

Студенты направления «Прикладная информатика» СГУ им. Питирима Сорокина изучают генетический и муравьиный алгоритмы в рамках дисциплины «Математические методы в экономике». Студенты направления «Прикладная математика и информатика» реализуют эти алгоритмы в рамках самостоятельной работы при изучении дисциплины «Исследование операций», а также при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ. Тестирование муравьиного и генетического алгоритмов библиотеки Scikit-opt показало по точности и времени работы результаты, позволяющие использовать библиотеку Scikit-opt на лабораторных занятиях, при выполнении курсовых работ. На лабораторных занятиях студенты самостоятельно реализуют алгоритмы на языке Python и могут сравнить временную эффективность своих программ с эффективностью реализации алгоритмов в библиотеке Scikit-opt.

Список источников

1. **Запорожец Д. Ю.** Комбинированный алгоритм решения трансвычислительных задач // *Информатика, вычислительная техника и инженерное образование*. 2018. № 1 (32). С. 10–20.

2. **Кобак В. Г., Поркшеян В. М., Жуковский А. Г., Пешкевич А. А.** Решение задачи коммивояжёра гибридной генетической моделью при использовании путевого подхода // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки*. 2017. № 2 (194). С. 5–9. DOI: 10.17213/0321-2653-2017-2-5-9.

3. **Щербина О. А.** Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор) // *ТВИМ*. 2014. № 1 (24). С. 56–72.

4. **Яшин С. Н., Яшина Н. И., Кошелев Е. В., Иванов А. А.** Метаэвристические алгоритмы в управлении инновациями : монография. Н. Новгород: ООО «Печатная мастерская "РАДОНЕЖ"», 2023. 200 с.

5. **Пантелеев А. В., Скавинская Д. В., Алешина Е. А.** Метаэвристические алгоритмы поиска оптимального программного управления : учебник. М.: Инфра-М, 2020. 396 с.

6. Using the Bees Algorithm to solve combinatorial optimisation problems for TSPLIB // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering.* May 2020 847:012027 DOI: 10.1088/1757-899X/847/1/012027 URL: https://www.researchgate.net/publication/341711573_Using_the_Bees_Algorithm_to_solve_combinatorial_optimisation_problems_for_TSPLIB (дата обращения: 27.05.2024).

7. Aco-routing documentation. URL: https://pypi.org/project/aco-routing/ (дата обращения: 21.04.2024).

8. ACO documentation. URL: https://pypi.org/project/aco/ (дата обращения: 21.04.2024).

9. Pygad documentation. URL: https://pypi.org/project/pygad/ (дата обращения: 21.04.2024).

10. DEAP documentation. URL: https://pypi.org/project/deap/ (дата обращения: 21.04.2024).

11. Scikit-opt documentation. URL: https://scikit-opt.github.io/scikit-opt//en/README (дата обращения: 21.04.2024).

12. **Reinelt G.** TSPLIB95. URL: http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/tsp95.pdf (дата обращения: 21.04.2024).

13. Discrete and Combinatorial Optimization. URL: http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/tsp/ (дата обращения: 21.04.2024).

14. TSPLIB95 documentation. URL: https://tsplib95.readthedocs.io/en/stable/pages/usage.html (дата обращения: 21.04.2024).

15. **Андреев А. М., Штуца И. М.** Исследование вычислительной (временной) сложности генетического алгоритма на примере решения задачи коммивояжера // *Вестник Ижевского государственного технического университета.* 2008. № 4 (40). С. 144–146.

References

1. **Zaporozhets D. Yu.** Combined algorithm for solving transcomputational problems. *Informatika, vychislitel'naya tekhnika i inzhenernoye obrazovaniye* [Informatics, computing and engineering education]. 2018. No 1 (32). Pp. 10–20. (In Russ.)

2. **Kobak V. G., Porksheyan V. M., Zhukovsky A. G., Peshkevich A. A.** Solving the traveling salesman problem with a hybrid genetic model using the path approach. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Tekhnicheskiye nauki* [News of universities. North Caucasus region. Series: Technical Sciences]. 2017. No 2 (194). Pp. 5–9. DOI: 10.17213/0321-2653-2017-2-5-9. (In Russ.)

3. **Shcherbina O. A.** Metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems (review). *TVIM* [TWIM]. 2014. No 1 (24). Pp. 56–72. (In Russ.)

4. **Yashin S. N., Yashina N. I., Koshelev E. V., Ivanov A. A.** *Metaevristicheskiye algoritmy v upravlenii innovatsiyami : monografiya* [Metaheuristic algorithms in innovation management : monograph]. Nizhniy Novgorod: LLC "Printing Workshop RADONEZH 2023. 200 p. (In Russ.)

5. **Panteleev A. V., Skavinskaya D. V., Aleshina E. A.** *Metaevristicheskiye algoritmy poiska optimal'nogo programmnogo upravleniya : uchebnik* [Metaheuristic algorithms for searching for optimal program control : textbook]. Moscow: Infra-M, 2020. 396 c. (In Russ.)

6. Using the Bees Algorithm to solve combinatorial optimisation problems for TSPLIB. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering.* May 2020 847:012027 DOI:10.1088/1757-899X/847/1/012027 Available at: https://www.researchgate.net/publication/341711573_Using_the_Bees_Algorithm_to_solve_combinatorial_optimisation_problems_for_TSPLIB (accessed: 27.05.2024).

7. *Aco-routing documentation.* Available at: https://pypi.org/project/aco-routing/ (accessed: 21.04.2024).

8. *ACO documentation.* Available at: https://pypi.org/project/aco/ (accessed: 21.04.2024).

9. *Pygad documentation.* Available at: https://pypi.org/project/pygad/ (accessed: 21.04.2024).

10. *DEAP documentation.* Available at: https://pypi.org/project/deap/ (accessed: 21.04.2024).

11. *Scikit-opt documentation.* Available at: https://scikit-opt.github.io/scikit-opt//en/README (accessed: 21.04.2024).

12. **Reinelt G.** *TSPLIB95.* Available at: http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/tsp95.pdf (accessed: 21.04.2024).

13. *Discrete and Combinatorial Optimization.* Available at: http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/tsp/ (accessed: 21.04.2024).

14. *TSPLIB95 documentation.* Available at: https://tsplib95.readthedocs.io/en/stable/pages/usage.html (accessed: 21.04.2024).

15. **Andreev A. M., Shtutsa I. M.** Study of the computational (time) complexity of a genetic algorithm using the example of solving the traveling salesman problem. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Izhevsk State Technical University]. 2008. No 4 (40). Pp. 144–146. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Бабикова Надежда Николаевна / Nadezhda N. Babikova
к.пед.н., доцент, доцент кафедры прикладной информатики / Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Applied Informatics Department
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Глухой Михаил Михайлович / Mikhail M. Glukhoy
обучающийся бакалавриата / undergraduate student
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Старцева Евгения Николаевна / Evgenija N. Startseva
старший преподаватель кафедры прикладной математики и компьютерных наук / senior lecturer Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Чернян Никита Адрианович / Nikita A. Chernyan
обучающийся бакалавриата / undergraduate student
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 55, Oktyabrsky Ave., Syktyvkar, 167001, Russia

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 03.06.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 10.06.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 17.06.2024

Contents

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 2 (51) 2024

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет Е. Н. Старцевой
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 03.10.2024. Дата выхода в свет 18.10.2024.
Формат $70 \times 108\frac{1}{16}$.
Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 11.1
Тираж 30 экз. Заказ № 71.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru