Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)

Научная статья

УДК 378
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

ОБ ОДНОЙ ИЗ АКСИОМАТИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Елена Николаевна Шустова
Сыктывкарский государственный
университет имени Питирима Сорокина, shustovaen@yandex.ru

Аннотация. В статье представлены основные теоретические положения методики обучения в вузе будущих учителей математики определению тригонометрических функций с помощью одной из аксиоматик. Приведена последовательность исследования свойств функций и аксиом предложенной системы, а также краткая характеристика результатов применения описанного подхода в процессе обучения студентов педагогических направлений подготовки вуза.

Ключевые слова: аксиоматический метод, тригонометрические функции, обучение в вузе будущих учителей математики

Для цитирования: Шустова Е. Н. Об одной из аксиоматик для определения тригонометрических функций при обучении будущих учителей математики // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 43–54. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

Article

About one of the axiomatics for determining trigonometric functions when training future mathematics teachers

Elena N. Shustova
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, shustovaen@yandex.ru

Abstract. The article outlines the main theoretical principles of the methodology for teaching future mathematics teachers at a university the definition of trigonometric functions using one of the axiomatics. The sequence of studying the properties of functions and axioms of the proposed system is given, as well as a brief description of the results of applying the described approach in the process of training students in pedagogical areas of university training.

Keywords: axiomatic method, trigonometric functions, university training for future mathematics teachers

For citation: Shustova E. N. About one of the axiomatics for determining trigonometric functions when training future mathematics teachers. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 43–54. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

Введение

Математика — достаточно формализованная наука, изучающая количественные и пространственные характеристики предметов и явлений окружающего мира посредством абстрагирования и обобщения. Поэтому одним из значимых методов построения математических теорий можно считать аксиоматизацию – способ, при котором «некоторая совокупность утверждений указанной области науки принимается без доказательства, а остальные её закономерности и положения выводятся из исходных посредством определённых логических законов» [1].

По мнению современных исследователей в области педагогики, аксиоматический подход при обучении будет эффективнее не на этапе усвоения новых теорий, а на этапе повторения и закрепления. В этом случае применение аксиоматических методов способствует систематизации знаний учащихся, выявлению логической структуры математической теории, выделению наиболее значимого содержания, устранению противоречий [2].

Следует отметить, что при обучении в вузе студентов педагогических направлений подготовки (профиль «Математика») использование аксиоматических методов изложения некоторых разделов математики также служит эвристическим средством познания [3], что развивает исследовательские навыки будущих педагогов, и, несомненно, способствует эффективному формированию методической компетентности учителей математики.

1. Материалы и методы

В процессе исследования использованы методы анализа, систематизации и обобщения результатов ученых по теме работы. На основе предложенной авторами аксиоматики разработана методика обучения будущих учителей математики аксиоматическому подходу к определению тригонометрических функций. В ходе опытно-экспериментальной работы вышеуказанная методика внедрена в учебный процесс вуза, проведён анализ результатов исследований статистическими методами, который позволил сделать вывод об эффективности предложенного подхода для формирования компонентов методической компетентности обучающихся, повышения уровня их предметных знаний и умений.

2. Результаты

2.1. Обзор некоторых аксиоматик для введения тригонометрических функций

Аксиоматический метод изложения математических теорий, кроме вышеуказанных положительных аспектов, тем не менее имеет некоторые ограничения, связанные, во-первых, с нестрогостью введения исходных понятий, во-вторых, с высоким уровнем формализации и, в-третьих, со сложностью выявления взаимосвязей вводимых понятий с явлениями и процессами окружающей действительности. В частности, многие исследователи предлагают для определения основных элементарных функций использовать довольно сложные аксиоматики, требующие от обучающихся прочных знаний в области математического анализа, теории чисел и теории групп. Подобные методы иногда непросто воспринимаются обучающимися педагогических направлений подготовки вуза, так как они зачастую не считают их полезными для будущей профессиональной деятельности.

Рассмотрим некоторые из предлагаемых подходов:

– В. А. Любецкий определяет базовые элементарные функции как непрерывный гомоморфизм f из группы X в группу Y. В частности, *ко-*

синус и *синус* он определяет равенствами $\cos x \rightleftarrows P_1(e_{2\pi}(x)) = P_1(e^{ix})$, $\sin x \rightleftarrows P_2(e_{2\pi}(x)) = P_2(e^{ix})$, где $P_{1,2} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_1(x+iy) = x$, $P_2(x+iy) = y$ [4];

– Л. М. Лихтарников для введения элементарных функций рассматривает функциональные уравнения, решения которых должны удовлетворять определённым условиям. Так, *тригонометрическим косинусом* $f(x) = \cos x$ называется решение уравнения $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ при условиях: 1) $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$; 2) $\exists C > 0$ такое, что $f(\frac{C}{2}) = 0$ и $f(x) \neq 0$, если $0 < x < \frac{C}{2}$; 3) $f(0) > 0$. Функция $\varphi(x) = \cos(\frac{C}{2} - x)$ называется *тригонометрическим синусом* и обозначается $\varphi(x) = \sin x$ [5];

– в работах В. А. Ильина и других авторов также используются функциональные уравнения и для определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с действительными значениями аргумента предлагается система

$$\begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1 \\ f(x_1 + x_2) = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1) \\ g(x_1 + x_2) = g(x_1)g(x_2) - f(x_1)f(x_2) \end{cases}$$

с дополнительными условиями: 1) $f(0) = 0$; 2) $g(0) = 1$; 3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; 4) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 5) если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $0 < f(x) < x$ [6];

– А. И. Коробейников, ученик 11-го класса Академической гимназии г. Сыктывкара, совместно с научным руководителем В. А. Поповым предложили заменить условие непрерывности функции $f(x)$ на требование существования предела в точке $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, получена аксиоматика:

1) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) \neq 0, \forall x \in [0; \pi/2)$; 3) $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = 0$ [7].

2.2. Аксиоматика В. Н. Алексюка

В нашем исследовании мы также руководствовались идеей упрощения исходных аксиом и совместно с В. Н. Алексюком для определения синуса и косинуса предложили следующую аксиоматику [8]:

$$\begin{cases} C^2(x) + S^2(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{R}; \quad \text{(I)} \\ S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), & \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad \text{(II)} \\ C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), & \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad \text{(III)} \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{S(x)}{x} = 1. & \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

Указанная система, а также аксиоматика для определения экспоненциальной функции [8–10], послужили основой для разработки методики обучения будущих учителей математики, которая в дальнейшем, совместно с Н. И. Поповым, была модернизирована и эффективно внедрена в учебный процесс Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (СГУ) [3; 11; 12].

Эффективной в методическом плане является следующая последовательность этапов аксиоматического определения элементарных функций:

1) предлагается совокупность аксиом, которым должна удовлетворять вводимая функция;

2) основные свойства функции выводятся из исходной аксиоматики;

3) посредством построения модели доказывается существование, а также единственность определяемой функции.

2.3. Исследование свойств аксиоматически определённых тригонометрических функций

Для изучения свойств предполагается, что решение вышеприведённой системы аксиом существует. Большинство свойств получить нетрудно, поэтому продемонстрируем доказательства лишь нескольких, более подробно исследование изложено в [8; 13].

Свойство 1. $S(x)$ и $C(x)$ ограничены.

Свойство 2. $D(C) = \mathbb{R}, D(S) = \mathbb{R}$.

Свойство 3. $C(0) = 1, S(0) = 0$.

Для доказательства данного свойства подставляем значения $x = 0$, $y = 0$ в (I), (II), (III):

$$\begin{cases} C^2(0) + S^2(0) = 1, \\ S(0) = 2S(0)C(0), \\ C(0) = C^2(0) - S^2(0). \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $S(0) = 0$ или $C(0) = 0.5$. Однако значение $C(0) = 0.5$, поставленное в третье уравнение, даёт неверное равенство $S^2(0) = -0.25$, следовательно, $S(0) = 0$.

Таким образом,

$$\begin{cases} C^2(0) = 1, \\ C(0) = C^2(0) \end{cases}$$

$\Rightarrow C(0) = 1$.

Свойство 4. $C(x)$ — чётная функция, $S(x)$ — нечётная.

Свойство 5. $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Свойство 6. $C(x)$ и $S(x)$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$, причем $S^{'}(x) = C(x)$, $C^{'}(x) = -S(x)$.

Свойство 7. Для функции $C(x)$ существует положительный нуль.

Доказательство проведём от противного, допустим, $\forall x > 0\ C(x) \neq 0$. Так как $C(0) = 1 > 0$, то $C(x) > 0, \forall x > 0$ (теорема о нуле непрерывной функции). Исходя из того, что $S(0) = 0$ и $\forall x > 0\ S^{'}(x) = C(x) > 0$, получаем строгое возрастание функции $S(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$, а также свойство $S(x) > 0, \forall x > 0$. Так как $S(x)$ ограничена, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \alpha > 0$, а также $\lim\limits_{x\to+\infty} S(2x) = \alpha > 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(2x)}{S(x)} = 1$. Из аксиомы (II) тогда имеем $S(2x) = 2S(x)C(x) \Rightarrow C(x) = \dfrac{S(2x)}{2S(x)} \to 0.5$ при $x \to +\infty$.

Аналогично, $C^{'}(x) = -S(x) < 0, \forall x > 0$, значит, $C(x)$ строго убывает на $[0; +\infty)$. С учётом равенства $C(0) = 1$ на промежутке $[0; +\infty)$ выполняется $0.5 < C(x) \leqslant 1$. Значит, $\exists x_0 > 0$ такое, что $C(x_0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (теорема о промежуточных значениях непрерывной функции). Далее, из аксиомы (I) получаем $S^2(x_0) = 1 - C^2(x_0) = 0.5 \Rightarrow C(2x_0) = C^2(x_0) - S^2(x_0) = 0$, т. е. нашёлся положительный нуль функции $C(x)$, равный $2x_0$. Полученное противоречие свидетельствует о неверности начального предположения об отсуствии положительного нуля.

Из свойства 7 непосредственно следует, что существует наименьший положительный нуль функции $C(x)$, который можно обозначить символом $\boldsymbol{\lambda}$ и показать, что $\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\pi}{2}$ [13].

Свойство 8. $C(x)$ — строго убывающая, а $S(x)$ — строго возрастающая на промежутке $[0; \boldsymbol{\lambda}]$ функция.

Свойство 9. На интервале $(0;\boldsymbol{\lambda})$ $C(x)$ выпукла, а $S(x)$ — вогнута.

Свойство 10. $C(x)$ и $S(x)$ — периодические функции, причём период обеих равен $4\boldsymbol{\lambda}$.

Свойство 11. $E(C) = E(S) = [-1;1]$.

Свойство 12. $|S(x)| \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

Используя доказанные свойства, можно оценить и некоторые значения функций, в частности, $S\Bigl(\dfrac{\pi}{4}\Bigr) = C\Bigl(\dfrac{\pi}{4}\Bigr) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $C\Bigl(\dfrac{\pi}{3}\Bigr) = \dfrac{1}{2}$, $S\Bigl(\dfrac{\pi}{3}\Bigr) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно, что полученные свойства функций $C(x)$ и $S(x)$ совпадают с тригонометрическими функциями $y = \cos x$ и $y = \sin x$, определяемыми как координаты точек единичной окружности. Основываясь на свойствах и оценке некоторых значений, можно построить графики $C(x)$ и $S(x)$.

2.4. Доказательство существования и единственности аксиоматически определённых тригонометрических функций

Для доказательства существования введённых с помощью аксиоматики функций достаточно полученного ранее совпадения с известными тригонометрическими функциями.

Доказательство единственности можно провести следующим образом. Из аксиом (I) и (III) легко получить формулы половинного угла и для $x \in [0;\boldsymbol{\lambda}]$, $n \in \mathbb{N}$ получить следующие соотношения:

$$C\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr) = \sqrt{\frac{1 + C(x)}{2}}, \quad C\Bigl(\frac{x}{4}\Bigr) = \sqrt{\frac{1}{2}\Bigl(1 + C\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\Bigr)}, \ \ldots,$$

$$C\Bigl(\frac{x}{2^n}\Bigr) = \sqrt{\frac{1}{2}\Bigl(1 + C\Bigl(\frac{x}{2^{n-1}}\Bigr)\Bigr)}; \quad S\Bigl(\frac{x}{2^n}\Bigr) = \sqrt{\frac{1}{2}\Bigl(1 - C\Bigl(\frac{x}{2^{n-1}}\Bigr)\Bigr)}.$$

Таким образом, если выбрать $x = \boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\pi}{2}$, то исходной системой аксиом однозначно определены значения функций $C(x)$ и $S(x)$ в точках $x_n = \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{2^n} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Следовательно, во всех точках множества $M = \{x \in [0;\boldsymbol{\lambda}] |\, x = k2^{-l};\ k, l \in \mathbb{N}\}$ значения функций $C(x)$ и $S(x)$ также определены однозначно. Очевидно, что $\forall x \in [0;\boldsymbol{\lambda}]$ можно построить сходящуюся к x последовательность $\{r_n\}$, где числа $r_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$. Вследствие непрерывности $C(x)$ и $S(x)$ значения указанных функций определены на промежутке $[0; \boldsymbol{\lambda}]$ единственным образом. Рассуждая аналогично, можно и любое число $x > 0$ записать в виде $x = n\boldsymbol{\lambda} + b; n \in \mathbb{N}, b \in [0; \boldsymbol{\lambda}]$ и показать, что значения $C(x)$ и $S(x)$ определены однозначно для всех положительных чисел. Остаётся лишь доказать утверждение для отрицательных чисел на основе чётности $C(x)$ и нечётности $S(x)$ [8].

В качестве замечания можно отметить, что доказательство существования и единственности функций () и $S()$ можно провести с помощью теории степенных рядов, рассматривая сходящиеся на $\mathbb{R}$ ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2.5. Опытно-экспериментальная работа по внедрению в учебный процесс вуза методики обучения будущих учителей математики аксиоматическому методу определения элементарных функций

Аксиоматика для введения тригонометрических функций, рассмотренная в данной статье, является значимой составляющей методики обучения будущих учителей математики, используемой на протяжении долгих лет в СГУ. Результаты внедрения указанной методики анализировались с точки зрения оценки уровня сформированности основных компонентов методической компетентности будущих педагогов. Для диагностики применялись различные методы исследования (тесты, контрольные и самостоятельные работы, анкеты, опросы и беседы). Анализ полученных результатов, проведённый с применением статистических методов, показал, что использование методики обучения в вузе будущих учителей математики аксиоматическому подходу к определению элементарных функций позволяет эффективно повышать уровень предметных знаний обучающихся и формировать методическую компетентность будущего учителя математики [3; 11; 12].

3. Обсуждение

В настоящее время в Российской Федерации повышенное внимание уделяется качеству обучения, особенно в области математической и информационной подготовки обучающихся. Очевидно, что профессиональная педагогическая деятельность учителя математики будет более эффективной, если он обладает фундаментальными предметными и методическими знаниями и умениями. Поэтому обучение в вузе студентов педагогических направлений подготовки необходимо осуществлять на основе использования строгих научных подходов к изложению математических теорий, включая, несомненно, и метод аксиоматизации. Опыт внедрения в образовательный процесс вуза предложенной авторами методики подтвердил её эффективность для формирования у обучающихся необходимого для будущей профессиональной деятельности уровня методической компетентности.

Список источников

1. **Садовский В. Н.** Аксиоматический метод построения научного знания // *Философские вопросы современной формальной логики.* М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962. С. 215–262.

2. **Масалова С. И.** Роль аксиоматизации в процессе построения математической теории // *Вестник ДГТУ.* 2007. № 3. С. 71–77. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/rol-aksiomatizatsii-v-protsesse-postroeniya-matematicheskoy-teorii (дата обращения: 08.02.2024).

3. **Попов Н. И., Шустова Е. Н.** Применение аксиоматического метода для введения экспоненциальной функции при обучении будущих учителей математики // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика.* 2020. № 3. С. 86–94.

4. **Любецкий В. А.** Основные понятия школьной математики : учебное пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2104 «Математика». М.: Просвещение, 1987. 400 с.

5. **Лихтарников Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения : кн. для начинающих изучать функцион. уравнения и преподавателей. СПб.: Лань, 1997. 158 с.

6. **Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.** Математический анализ : в 3 т. Т. 1: Начальный курс : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика», «Прикладная математика» / под ред. А. Н. Тихонова. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1985. 660 с.

7. **Коробейников А. И.** Функциональные уравнения и их приложения // *Молодые исследователи – Республике Коми : сборник тезисов Пятой республиканской научно-практической конференции.* Сыктывкар: МО и ВШ Республики Коми, СГУ, 2002. С. 34-41.

8. **Алексюк В. Н., Шустова Е. Н.** Элементарные функции. 2 / Пед. ин-т. Сыктывкар, 2010. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 25.10.2010, № 610-В2010.

9. **Алексюк В. Н., Шустова Е. Н.** Элементарные функции. 1 / Пед. ин-т. Сыктывкар, 2010. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 11.10.2010, № 577-В2010.

10. **Шустова Е. Н.** Методика изложения курса «Теория элементарных функций» // *Вестник КГПИ.* Сыктывкар: Коми пединститут, 2010. С. 268–270.

11. **Шустова Е. Н.** Особенности использования аксиоматического метода введения элементарных функций при обучении будущих учителей математики в вузе // *Образовательный вестник «Сознание».* 2022. Т. 24. № 4. С. 23–30.

12. **Шустова Е. Н.** Формирование компонентов методической компетентности учителей математики при изучении аксиоматического метода введения элементарных функций в вузе // *Мир науки, культуры, образования.* 2022. № 3 (94). С. 78–81.

13. **Попов Н. И., Шустова Е. Н.** Элементарные функции в школьном курсе математики : учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2023. 165 с.

References

1. **Sadovsky V. N.** Axiomatic method of constructing scientific knowledge. *Filosofskie voprosy sovremennoy formal'noy logiki. M.: Izd-vo Akademii nauk SSSR* [Philosophical issues of modern formal logic. M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences]. 1962. Pp. 215–262. (In Russ.)

2. **Masalova S. I.** The role of axiomatization in the process of constructing a mathematical theory. *Vestnik DGTU* [Bulletin of DSTU].

2007. No 3. Pp. 71–77. Available: https://cyberleninka.ru/article/n/rol-aksiomatizatsii-v-protsesse-postroeniya-matematicheskoy-teorii (accessed: 08.02.2024). (In Russ.)

3. **Popov N. I., Shustova E. N.** Application of the axiomatic method for introducing the exponential function when training future mathematics teachers. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Pedagogika* [Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Pedagogy]. 2020. No 3. Pp. 86–94. (In Russ.)

4. **Lyubetsky V. A.** *Osnovnye ponyatiya shkol'noy matematiki : uchebnoye posobie dlya studentov ped. in-tov po spec. № 2104 "Matematika"* [Basic concepts of school mathematics : Proc. manual for pedagogical students. Institute for specialties No 2104 "Mathematics"]. Moscow: Prosveshchenie, 1987. 400 p. (In Russ.)

5. **Lihtarnikov L. M.** *Elementarnoe vvedenie v funkcional'nye uravneniya: kn. dlya nachinayushchih izuchat' funkzion. uravneniya i prepodavateley* [Elementary introduction to functional equations: book. for beginners to learn functions. equations and teachers]. SPB.: Lan', 1997. 158 p. (In Russ.)

6. **Ilyin V. A., Sadovnichy V. A., Sendov Bl. X.** *Matematicheskiy analiz : v 3 t. T. 1: Nachal'nyj kurs: uchebnik dlya studentov vuzo, obuchayushchihsya po special'nosti "Matematika", "Prikladnaya matematika"* [Mathematical analysis : in 3 volumes. T. 1: Initial course: textbook for university students studying in the specialty "Mathematics", "Applied Mathematics"]. Pod red. A. N. Tihonova. 2-e izd., pererab. Moscow: Izd-vo MGU, 1985. 660 p.

7. **Korobeinikov A. I.** Functional equations and their applications *Molodye issledovateli - Respublike Komi: sbornik tezisov Pyatoy respublikanskoy nauchno-prakticheskoy konferencii. Syktyvkar: MO i VSh Respubliki Komi, SGU* [Young researchers - the Komi Republic: collection of abstracts of the Fifth Republican Scientific and Practical Conference]. Syktyvkar: Moscow Region and Higher School of the Komi Republic, SGU, 2002. Pp. 34–41 (In Russ.)

8. **Alexyuk V. N., Shustova E. N.** *Elementarnye funkcii. 2* [Elementary functions. 2]. Ped. in-t. Syktyvkar, 2010. 12 p. Dep v VINITI 25.10.2010, no 610-B2010 (In Russ.)

9. **Alexyuk V. N.** *Elementarnye funkcii. 1* [Elementary functions. 1]. Ped. in-t. Syktyvkar, 2010. 13 p. Dep v VINITI 11.10.2010, no 577-B2010 (In Russ.)

10. **Shustova E. N.** Methodology for presenting the course “Theory of elementary functions”. *Vestnik KGPI* [Bulletin of KSPI]. Syktyvkar: Komi Pedagogical Institute, 2010. Pp. 268–270. (In Russ.)

11. **Shustova E. N.** Features of using the axiomatic method of introducing elementary functions in teaching future teachers of mathematics at the university. *Obrazovatel’nyj vestnik “Soznanie”* [Educational Bulletin “Consciousness”]. 2022. Vol. 24. No 4. Pp. 23–30. (In Russ.)

12. **Shustova E. N.** Formation of components of methodological competence of mathematics teachers when studying the axiomatic method of introducing elementary functions at a university. *Mir nauki, kul’tury, obrazovaniya* [World of science, culture, education]. 2022. No 3 (94). Pp. 78–81. (In Russ.)

13. **Popov N. I., Shustova E. N.** *Elementarnye funkcii v shkol’nom kurse matemayiki : uchebnoe posobie. 2-e izd., ispr. i dop.* [Elementary functions in a school mathematics course : a textbook. 2nd ed., rev. and additional]. Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2023. 165 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Шустова Елена Николаевна / Elena N. Shustova
к.пед.н., доцент кафедры физико-математического и информационного образования / PhD (Pedagogy), Associate Professor of the Department of Physics, Mathematics, and Information Education
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 29.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 11.03.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024