МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

MATHEMATICS EDUCATION

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)

Научная статья

УДК 378.016, 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

ЧТО ТАКОЕ ПОЛУКОЛЬЦО[1]

Евгений Михайлович Вечтомов
Вятский государственный университет, vecht@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются начала теории полуколец. Анализируется определение (аксиоматика) полукольца. Вводятся исходные понятия теории полуколец. Приведены базовые примеры. Указаны важнейшие классы полуколец. Сформулированы первые структурные теоремы о полукольцах. Изложение носит учебно-методический характер, включает замечания, пояснения и 25 упражнений.

Ключевые слова: алгебраическая структура, полукольцо, изучение теории полуколец

Для цитирования: Вечтомов Е. М. Что такое полукольцо // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 21–42. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Article

What is a semiring

Evgeny M. Vechtomov
Vyatka State University, vecht@mail.ru

Abstract. The article discusses the beginnings of the theory of semirings. The author analyzes the definition (axiomatics) of a semiring and introduces the initial concepts of the theory of semirings. The work provides basic examples, indicates the most important classes of semirings, and also formulates the first structure theorems about semirings. The presented material is educational and mathematical in nature, includes comments, explanations and 25 exercises.

Keywords: algebraic structure, semiring, study of the theory of semirings

For citation: Vechtomov E. M. What is a semiring. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 21–42. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

Введение

Теория полуколец — раздел современной абстрактной алгебры. Понятие полукольца обобщает и расширяет понятие кольца так же, как полугруппа есть естественное обобщение группы. Группы и кольца стали изучаться в XIX веке (Хенрик Абель, Эварист Галуа, Уильям Гамильтон, Артур Кэли, Рихард Дедекинд, Питер Силов, Фердинанд Фробениус, Феликс Клейн, Фёдор Молин), приобретя современное звучание к началу XX века. Становление теории полугрупп относится к 30-м годам XX века. Исследование полуколец началось в 50-е годы XX века. Особенно активно теория полуколец развивается последние 40–45 лет, что, в частности, связано с возникновением компьютерной алгебры. Полукольца находят применение в дискретной математике и в приложениях математики.

Статья представляет собой элементарное введение в теорию полуколец. Материал предназначен студентам естественно-математических направлений подготовки, начинающим интересоваться современной математикой, абстрактной алгеброй. В качестве введения в предмет рекомендуем наши публикации [1–3] Необходимые алгебраические сведения можно найти в книгах [4–6]. Для дальнейшего изучения полуколец можно обратиться к работам [7–13].

1. Исходные понятия

Понятие полукольца (semiring) является широким обобщением понятия ассоциативного кольца (ring), ставшего уже классическим.

Наглядно представление о полукольцах можно получить следующим образом. Рассматривая «положительную половину» $\mathbb{Z}^+$ кольца $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, получаем полукольцо $\mathbb{N}$ натуральных чисел; если добавим к нему число 0, то имеем полукольцо с нулём всех неотрицательных целых чисел. Ясно, что с обычными операциями сложения и умножения чисел полукольца $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$ не являются кольцами.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной бинарной операцией сложения $+$ и ассоциативной бинарной операцией умножения $\cdot$ на непустом множестве S, такая, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Тем самым полукольцо $\langle S, +, \cdot \rangle$ определяется пятью аксиомами-тождествами:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *ассоциативность сложения*;
2. $x + y = y + x$ — *коммутативность сложения*;
3. $(xy)z = x(yz)$ — *ассоциативность умножения*;
4. $x(y + z) = xy + xz$ — *левая дистрибутивность*;
5. $(x + y)z = xz + yz$ — *правая дистрибутивность*.

Далее, как правило, полукольцо $\langle S, +, \cdot \rangle$ будем обозначать просто S. Выполнение тождества, скажем, тождества 1 на S, означает, что $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых элементов $a, b, c \in S$. Пишем $xy = x \cdot y$. Множество $\{+, \cdot\}$ символов операций полуколец называется сигнатурой типа (2, 2), поскольку обе полукольцевые операции бинарные.

Полукольца суть часть ассоциативной алгебры. По сложению и умножению полукольца являются полугруппами. Напомним, что *группоидом* называется непустое множество с заданной на нём одной бинарной операцией; если эта операция ассоциативна, то группоид будет *полугруппой* (см. [14]).

Мультипликативно записанная полугруппа S называется *моноидом*, если она обладает *нейтральным элементом* e: $\forall s \in S$ $(se = es = s)$; в моноидах такой элемент единственен. Моноид $\langle S, \cdot \rangle$ с нейтральным элементом $e := 1$ называется *группой*, если $\forall s \in S$ $\exists t \in S$ $(st = ts = 1)$; такой элемент t единственен для s, называется *обратным* к s и обозначается s^{-1}, при этом $s = t^{-1}$. В аддитивной записи моноида $\langle S, + \rangle$ нейтральный элемент обозначают 0 и элемент $t \in S$, для которого $s + t = t + s = 0$, называется *противоположным* к s и обозначается $-s$.

Сформулируем исходные полукольцевые понятия.

Элемент a полукольца S называется:

поглощающим по сложению (*поглощающим по умножению*), если

$$\forall s \in S \ s + a = a \ (sa = as = a);$$

единицей и обозначается $a = 1$, если он мультипликативно нейтральный;

нулём и обозначается $a = 0$, если он аддитивно нейтральный и мультипликативно поглощающий.

Полукольцо, в котором существует нуль, называют *полукольцом с нулём*. Аналогичным образом вводятся понятия *полукольца с единицей*, *полукольца с аддитивно* (*мультипликативно*) *поглощающим элементом*.

Полукольцо S называется:

коммутативным, если его мультипликативная полугруппа $\langle S, \cdot \rangle$ коммутативная;

аддитивно сократимым (*мультипликативно сократимым справа*), если оно удовлетворяет квазитождеству $x + z = y + z \Rightarrow x = y$ $(xz = yz \Rightarrow x = y)$;

аддитивно идемпотентным (*мультипликативно идемпотентным*), если в нём выполняется тождество $x + x = x$ $(xx = x)$;

идемпотентным, если оно одновременно аддитивно идемпотентно и мультипликативно идемпотентно;

кольцом, если его аддитивная полугруппа $\langle S, + \rangle$ есть (коммутативная) группа;

антикольцом, если S — полукольцо с нулём 0, удовлетворяющее квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$;

дистрибутивной решёткой, если оно коммутативно, мультипликативно идемпотентно и удовлетворяет закону поглощения $x + xy = x$;

полутелом, если его мультипликативная полугруппа $\langle S, \cdot \rangle$ является группой;

полутелом с нулём 0, если $\langle S, +, \cdot \rangle$ является полутелом с присоединённым к S нулём 0;

полуполем (*полуполем с* 0), если S — коммутативное полутело (коммутативное полутело с 0).

Заметим, что аддитивная полугруппа $\langle S, + \rangle$ (мультипликативная полугруппа $\langle S, \cdot \rangle$) полукольца $\langle S, +, \cdot \rangle$ называется также его *аддитивным редуктом* (*мультипликативным редуктом*).

Далее, полукольцо S с нулём 0 и единицей $1 \neq 0$ называется *полукольцом с делением*, если каждый его ненулевой элемент a обратим, т. е. для него существует обратный элемент $b \in S$: $ab = ba = 1$, такой элемент b единственен и обозначается a^{-1}. Кольцо с делением называется *телом*, а коммутативное тело — *полем*.

Непустое подмножество T полукольца S называется:

подполукольцом в S, если оно замкнуто относительно сложения и умножения в S, т. е. $\forall a, b \in S\ (a, b \in T \Rightarrow a + b, ab \in T)$;

идеалом (*правым идеалом*), если оно является подполукольцом и $ST \subseteq T, TS \subseteq T$ ($TS \subseteq T$).

Упражнение 1.1. Докажите, что произвольное полукольцо с делением является либо телом, либо полутелом с нулём.

Замечание 1.1. Наиболее общее определение понятия полукольца предложил Вандивер [15] в 1934 году. Он назвал алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot \rangle$ полукольцом, если в ней выполняются аксиомы 1 и 3–5, т. е. сложение не предполагается коммутативным. В кольце-модульном направлении развития теории полуколец [11] используется понимание полукольца в узком смысле — это полукольцо с нулём и, как правило, с единицей [13].

Мы видели, что класс всевозможных полуколец задаётся пятью тождествами в сигнатуре алгебраических структур типа (2, 2), т. е. образует многообразие алгебраических структур.

Упражнение 1.2. Покажите, что класс всех полутел является многообразием в сигнатуре (2, 2, 1, 0).

Упражнение 1.3. Почему класс всех полуколец с делением не является многообразием (ни в какой сигнатуре)?

Мы покажем, что аксиомы 1–5 логически независимы (друг от друга), т. е. ни одна из аксиом не выводится из остальных четырех аксиом полукольца. Для этого достаточно построить пять моделей (примеров) алгебраических структур $\langle S, +, \cdot \rangle$, в каждой из которых не выполняется ровно одна аксиома из пяти аксиом 1–5.

Модель 1.1. Укажем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot \rangle$ типа $(2, 2)$ с неассоциативной операцией $+$, удовлетворяющей тождествам 2–5. Пусть S — множество всех неотрицательных рациональных чисел с обычным умножением $\cdot$. Это коммутативная полугруппа с поглощающим элементом 0 и единицей 1. Чтобы отличить сложение в S от обычного сложения чисел, обозначим новое сложение как $\oplus$, полагая $a \oplus b = (a + b)/2$ для всех $a, b \in S$. В результате получаем неассоциативный коммутативный идемпотентный группоид $\langle S, \oplus \rangle$. Легко видеть, что алгебраическая структура $\langle S, \oplus, \cdot \rangle$ удовлетворяет аксиомам 2–5 и не удовлетворяет аксиоме 1.

Модель 1.2. На произвольном неодноэлементном множестве S зададим операции сложения и умножения тождествами $x + y = x$ и $x \cdot y = x$. Совпадающие операции $+$ и $\cdot$ ассоциативны, идемпотентны, но некоммутативны, и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Получаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot \rangle$ с тождествами 1 и 3–5, которая доказывает, что аксиома 2 не вытекает из других аксиом полукольца.

Модель 1.3. Рассмотрим множество S, содержащее не менее трех элементов, с заданным на нём константным сложением $x + y = u + v$. Положим $x + y = \theta \in S$. Выделим в S трехэлементное подмножество $T = \{a, b, \theta\}$. Определим на S операцию умножения $\cdot$ следующим образом: $x\theta = \theta x = \theta$ для всех $x \in S$, $sa = sb = as = bs = \theta$ при любых $s \in S \setminus \{a, b\}$, $aa = b, ab = a, ba = b, bb = a$. Множество T замкнуто относительно операций сложения и умножения. Алгебраическая структура $\langle T, +, \cdot \rangle$, а вместе с ней и $\langle S, +, \cdot \rangle$ удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5, но не удовлетворяет аксиоме 3 полукольца. Более того, умножение в S неассоциативно по степеням: $a^2 a = (aa)a = ba = b \neq a = ab = a(aa) = aa^2$.

Модель 1.4. Пусть S есть множество всех отображений $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество всех неотрицательных целых чисел. Зададим на S операцию сложения поточечно: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

для любых отображений $f, g \in S$ и чисел $x \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\langle S, +\rangle$ будет коммутативной полугруппой с нейтральным элементом $\mathbf{0}$ — функцией-константой $\mathbb{N}_0 \to \{0\}$. В качестве умножения возьмем операцию композиции (суперпозиции, последовательного выполнения отображений): $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$ для всех $f, g \in S$ и $x \in \mathbb{N}_0$. Группоид $\langle S, \cdot\rangle$ является полугруппой с единицей — тождественным отображением $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Значит, для алгебраической структуры $\langle S, +, \cdot\rangle$ верны аксиомы 1–3. Рассмотрим произвольные отображения $f, g, h \in S$ и любое число $x \in \mathbb{N}_0$. Имеем

$$((f+g)h)(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) =$$
$$= f(h(x)) + g(h(x)) = (fh+gh)(x)),$$

т. е. в $\langle S, +, \cdot\rangle$ справедлива аксиома 5. Но в $\langle S, +, \cdot\rangle$ неверно тождество 4. Действительно, полагая $f(x) = x+1$ для всех $x \in \mathbb{N}_0$, имеем

$$((f(g+h))(x) = f(g(x)+h(x)) = g(x)+h(x)+1 \text{ и}$$
$$(fg+fh)(x) = (fg)(x)+(fh)(x) = f(g(x))+f(h(x)) = g(x)+h(x)+2.$$

Следовательно, аксиома 4 не является следствием аксиом 1–3 и 5. Заметим также, что элемент $\mathbf{0} \in S$ является левым, но не правым, мультипликативно поглощающим элементом алгебраической структуры S.

Модель 1.5. Если в модели 1.4 мы заменим операцию умножения симметричной операцией $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$ при $f, g \in S$ и $x \in \mathbb{N}_0$, то получим алгебраическую структуру, удовлетворяющую тождествам 1–4, но не удовлетворяющую 5.

На основании моделей 1–5 доказано следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Система аксиом* 1-5, *определяющая полукольца, независима.*

Упражнение 1.4. Найдите пять своих примеров конечных алгебраических структур — аналогов моделей 1–5.

Замечание 1.2. Добавим к аксиомам 1–5 аксиому коммутативности умножения. Полученная система аксиом, определяющая коммутативные полукольца, не будет независимой. В ней каждая из аксиом дистрибутивности 4 и 5 является следствием остальных пяти аксиом.

Замечание 1.3. Наряду с полукольцами существуют другие обобщения колец — почтикольца, квазикольца. Далёким обобщением колец служат кольцоиды. В последнее время стали изучаться неассоциативные полукольца, т. е. алгебраические структуры $\langle S, +, \cdot \rangle$, удовлетворяющие аксиомам 1, 2, 4, 5 и, возможно, 3 (см. модель 1.3).

Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ типа (2, 2) называется:

почтикольцом, если $\langle S, + \rangle$ — группа (вообще говоря, некоммутативная), $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа и выполняется закон правой дистрибутивности 5 (симметричным образом вводится понятие левого почтикольца);

квазикольцом, если $\langle S, + \rangle$ — квазигруппа и выполняются оба закона дистрибутивности 4 и 5. Квазигруппа определяется как группоид $\langle S, \cdot \rangle$, в котором $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа и однозначно разрешимы уравнения $ax = b$ $ya = b$ при любых $a, b \in S$. Сложение в квазикольцах не обязано быть ассоциативным и коммутативным.

Упражнение 1.5. Постройте пример почтикольца, не удовлетворяющего закону левой дистрибутивности 4.

Упражнение 1.6. Найдите пример квазикольца, не являющегося кольцом.

В абстрактной алгебре алгебраические структуры описываются с точностью до изоморфизма. Два полукольца $\langle S, +, \cdot \rangle$ и $\langle T, +, \cdot \rangle$ называются *изоморфными*, если между ними существует *изоморфизм*, т. е. взаимно однозначное отображение (биекция) $\alpha : S \to T$, сохраняющее полукольцевые операции: $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ и $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ для любых элементов $a, b \in S$. Нетрудно проверить, что обратная биекция $\alpha^{-1} : T \to S$ также сохраняет операции, т. е. будет изоморфизмом. Композиция $\alpha\beta$ изоморфизмов полуколец $\alpha : S \to T$ и $\beta : T \to U$ является изоморфизмом между полукольцами S и U. Тождественное отображение 1_S полукольца S на себя есть изоморфизм. Следовательно, отношение изоморфности на классе всех полуколец является отношением эквивалентности, разбивающем все полукольца на классы изоморфности — классы попарно изоморфных полуколец. Изоморфные полукольца имеют совершенно одинаковые алгебраические свойства, т. е. свойства, выражаемые в терминах операций сложения $+$ и умножения $\cdot$.

Упражнение 1.7. Докажите, что все сформулированные выше возможные свойства полуколец сохраняются при любом изоморфизме полуколец. В частности, полукольцо, изоморфное полукольцу с делением, является полукольцом с делением.

2. Примеры

Приведем базовые примеры полуколец.

Пример 2.1. *Числовые полукольца.* Берем произвольное подкольцо R поля $\mathbb{R}$ и «отрезаем от него» 0 и все отрицательные числа, входящие в R. Получаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot \rangle$, где $S = R^+ = \{r \in R : r > 0\}$, с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел. Кольцо R является кольцом разностей полукольца S. Полукольцо S с нулём 0 отличается от кольца R тем, что в S ненулевые элементы не имеют противоположных элементов, т. е. в S не выполняется операция вычитания. Если R — подполе поля $\mathbb{R}$, то R^+ будет полуполем. В частности $\mathbb{R}^+$ есть полуполе всех неотрицательных действительных чисел.

Пример 2.2. *Минимаксное полуполе.* Положим $S = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, + \rangle$ — это алгебраическая структура с операцией сложения $\vee$ (взятия максимума max) и операцией умножения $+$ (обычным сложением). На S рассматривается естественный линейный порядок с наименьшим элементом $-\infty$. Считается, что $-\infty$ есть поглощающий элемент по умножению. В результате получаем аддитивно идемпотентное полуполе S с нулём $-\infty$. Полуполе S изоморфно «двойственному» полуполю $\langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \wedge, + \rangle$. Поэтому полуполе S называется минимаксным. Заметим, что полуполе S изоморфно полуполю $\langle \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \vee, \cdot \rangle$ с нулём 0 всевозможных неотрицательных действительных чисел со сложением $\vee$ и обычным умножением $\cdot$. Отметим, что полуполе S служит основой так называемого идемпотентного (математического) анализа так же, как поле $\mathbb{R}$ есть фундамент классического математического анализа.

Пример 2.3. *Прямое произведение.* Прямое произведение полуколец S и T — это полукольцо $S \times T$ всех упорядоченных пар (s, t), где $s \in S, t \in T$, с покоординатными операциями сложения и умножения над парами. Аналогично определяется прямое произведение конечного числа полуколец. Пусть — в общем случае — дано семейство $(S_i)_{i \in I}$ полуколец S_i, индексированное («занумерованное») элементами (индексами) непустого индексного множества I. Элементами прямого произведения Π семейства $(S_i)_{i \in I}$ являются такие отображения $f : I \to \cup S_i$, что

$f(i) \in S_i$ для каждого индекса $i \in I$. Операции над элементами $f, g \in \Pi$ производятся покоординатно: $(f+g)(i) = f(i)+g(i)$ и $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$ для всех $i \in I$. Поскольку в силу аксиомы выбора Π непусто, то получаем полукольцо $\langle \Pi, +, \cdot \rangle$. Легко видеть, что полукольцо Π коммутативно, с нулём, с единицей тогда и только тогда, когда все полукольца $S_i (i \in I)$ соответственно коммутативны, обладают нулём и единицей.

Пример 2.4. *Полукольца многочленов.* Пусть S — произвольное полукольцо. Выражение вида $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где n — неотрицательное целое число, коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$, называется многочленом над S от одной переменной x. Множество всех таких многочленов образует полукольцо $S[x]$ с естественным образом определенными операциями сложения и умножения многочленов. Точнее, возьмём вместе с многочленом f многочлен $g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Имеем $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_m + b_m)x^m$ при $m = n$. Если $m < n$, то добавляем ещё сумму $a_{m+1} + x^{m+1} + \cdots + a_n x^n$. Аналогично при $m > n$. Умножение задаётся обычной формулой:

$$fg = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots + (a_n b_m)x^{n+m}.$$

Если полукольцо S обладает нулём 0, то в многочленах некоторые слагаемые-одночлены могут отсутствовать, так как считается $0x^k = 0$, при этом S будет подполукольцом полукольца $S[x]$ с нулём 0. Если полукольцо S обладает единицей 1, то 1 будет единицей и полукольца $S[x]$, поскольку предполагается $1x^k = x^k$. Обычно полукольцо коэффициентов S наделяется 0 и 1.

Пример 2.5. *Полукольца степенных рядов.* Формальный степенной ряд над полукольцом S есть выражение $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ с коэффициентами $a_n \in S$. Степенные ряды складываются и умножаются аналогично многочленам из $S[x]$. Получается полукольцо степенных рядов $S[[x]]$ над полукольцом S от одной переменной x. В случае полукольца S с нулём имеем $S \subset S[x] \subset S[[x]]$.

Пример 2.6. *Полукольца матриц.* Пусть даны полукольцо S и натуральное число n. Обозначим через $M_n(S)$ множество всех квадратных матриц n-го порядка (т. е. размера $n \times n$) с элементами $a_{ij} \in S$. Матрицы складываются и умножаются обычным образом, как числовые матрицы. В результате получается полукольцо матриц $M_n(S)$. Если S — полукольцо с нулём 0, то полукольцо $M_n(S)$ также обладает нулём — матрицей O с нулевыми элементами. Если же S — полукольцо с нулём

0 и с единицей 1, то единицей полукольца $M_n(S)$ служит единичная матрица $E = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$ при $i = j$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Одним из основных направлений теории полуколец является исследование конечных полуколец.

Найдем, с точностью до изоморфизма, все двухэлементные полукольца. Всего существует 10 двухэлементных группоидов, из них 5 полугрупп, среди которых 3 коммутативные и 2 некоммутативные полугруппы: с левым умножением $x \cdot y = x$ и с правым умножением $x \cdot y = y$.

Упражнение 2.1. Докажите сформулированные в предыдущем абзаце утверждения. Для контроля см. [4, параграф 2.1].

Пусть $S = \{a, b\}$. Задавать полукольцевые операции на S можно исходя из трех аддитивных коммутативных полугрупп $\langle S, +\rangle$ или из пяти мультипликативных полугрупп $\langle S, \cdot\rangle$. Используем первый подход. Для этого на каждой из трех коммутативных полугрупп $\langle S, +\rangle$ определим полукольцевое умножение $\cdot$, т. е. операцию умножения $\cdot$ на S, дающую полукольцо $\langle S, +, \cdot\rangle$.

Возможны три случая.

1. $\langle\{a, b\}, +\rangle$ — группа. Тогда $\langle\{a, b\}, +, \cdot\rangle$ будет кольцом. Можно считать, что $a = 0$ — нулевой элемент. Поэтому умножение определяется значением bb:

1.1) $bb = 0$ — тогда S есть кольцо с нулевым умножением;

1.2) $bb = b$ — тогда S есть поле, изоморфное полю $\mathbb{Z}_2$ классов вычетов целых чисел по модулю 2.

2. $\langle\{a, b\}, +\rangle$ — цепь, $a < b$. При этом $x + y = \max\{x, y\}$. Полукольцевое умножение $\cdot$ в S определяется одним из следующих способов:

2.1) $xy = \min\{x, y\}$, и S — дистрибутивная решетка с нулем a и единицей b;

2.2) $xy = x + y$, и S — коммутативное идемпотентное монополукольцо;

2.3) $xy = a$, т. е. S — полукольцо с нулем и константным умножением;

2.4) $xy = b$, т. е. S — полукольцо с константным умножением и аддитивно поглощающим элементом;

2.5) $xy = x$, и S — полукольцо с левым умножением;

2.6) $xy = y$, и S — полукольцо с правым умножением.

3. $\langle\{a, b\}, +\rangle$ — полугруппа с константным сложением, скажем, $x + y = a$. Рассмотрим полукольцо $\langle S, +, \cdot\rangle$ с данным аддитивным ре-

дуктом. Легко видеть, что элемент a является мультипликативно поглощающим. Имеем:

3.1) $bb = a$, и полукольцо S также имеет константное умножение $xy = a$;

3.2) $bb = b$, и S — коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с единицей b и константным сложением.

В результате получается следующая

Теорема 2.1. *Существует ровно* 10 *двухэлементных полуколец — с точностью до изоморфизма.*

Упражнение 2.2. Построить двухэлементные полукольца исходя из пяти мультипликативных полугрупп.

3. Классы полуколец

Рассмотрим три важнейших класса полуколец — кольца, дистрибутивные решётки, полутела, играющих существенную роль в структурной теории полуколец, в прояснении строения абстрактных полуколец.

Кольца

Как уже отмечалось, кольцо — это полукольцо $\langle R, +, \cdot \rangle$, аддитивная полугруппа которого является (коммутативной) группой. Нейтральный элемент по сложению 0 будет нулём кольца. В кольцах R, наряду с основной операцией сложения $+$, вводится производная операция вычитания $-$, именно $a - b = a + (-b)$ для любых элементов $a, b \in R$.

Можно стандартным образом показать, что полукольцо S вкладывается в качестве полукольца в некоторое кольцо R тогда и только тогда, когда оно аддитивно сократимо; в качестве R можно взять кольцо разностей $S - S$ аддитивно сократимого полукольца S.

Упражнение 3.1. Проверьте, что в любом кольце R аддитивно нейтральный элемент 0 является нулём и $\forall a, b, c \in R$

$$a - a = 0, -(a - b) = b - a, (-a)b = a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab,$$
$$(a - b)c = ac - bc, a(b - c) = ab - ac.$$

Упражнение 3.2. Убедитесь, что всякое полукольцо, изоморфно вложимое в кольцо, аддитивно сократимо.

Дистрибутивные решетки

Дистрибутивная решётка стандартно определяется как алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ типа (2, 2), удовлетворяющая пяти парам взаимно дуальных аксиом:

(1) $(x + y) + z = x + (y + z), (xy)z = x(yz)$ (ассоциативность);
(2) $x + y = y + x, xy = yx$ (коммутативность);
(3) $x + x = x, xx = x$ (идемпотентность);
(4) $x(x + y) = x, x + xy = x$ (поглощение);
(5) $x(y + z) = xy + xz, x + yz = (x + y)(x + z)$ (дистрибутивность).

Заметим, что алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$, удовлетворяющая аксиомам (1)–(4), называется решёткой. Информацию о решётках, в частности о дистрибутивных решётках, можно найти в книгах [16; 17].

Упражнение 3.3. Покажите, что в решётках один из дистрибутивных законов влечёт другой.

Упражнение 3.4. Докажите эквивалентность (равносильность) двух данных выше определений дистрибутивной решётки (первое определение дано в пункте 1).

Полутела

Теории полутел посвящена большая статья [10].

Приведём примеры полутел.

Пример 3.1. *Полуполе нильмногочленов.* Возьмём кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ и натуральное число n. Выделим в $\mathbb{R}[x]$ множество

$$S = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n : a_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Полагаем $x^{n+1} = 0 \in \mathbb{R}, x^n \neq 0$. Тогда получаем полуполе S с обычными операциями сложения и умножения многочленов, которое назовём полуполем нильмногочленов индекса n.

Пример 3.2. *Полутело треугольных матриц.* Рассмотрим кольцо R всех верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ с действительными элементами a_{ij}, $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Подполукольцо в R, состоящее из верхнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами a_{ij}, будет полутелом.

Пример 3.3. Полуполе степенных рядов. Рассмотрим в кольце $\mathbb{R}[[x]]$ подполукольцо S всех степенных рядов с положительным свободным членом. Как легко видеть, S является полуполем.

Пример 3.4. Мультипликативно циклическое полуполе. Рассмотрим числовое полуполе $S = (2) = (1/2) = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$ с операцией сложения max и обычным умножением. Числа 2 и 1/2 служат образующими мультипликативной циклической группы $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$. Полуполе S изоморфно как полуполю $\bigl\langle\{2^k : k \in Z\}, \min, \cdot\bigr\rangle$, так и полуполям $\langle\mathbb{Z}, \max, +\rangle$ и $\langle\mathbb{Z}, \min, +\rangle$.

Упражнение 3.5. Покажите, что всякое конечное полутело одноэлементное $\{1\}$.

Упражнение 3.6. Докажите, что каждый неединичный элемент произвольного полутела имеет бесконечный мультипликативный порядок.

4. Первые структурные теоремы

Наряду с понятием изоморфизма полуколец существует более общее фундаментальное понятие гомоморфизма. Произвольное отображение $S \to T$ полукольца S в полукольцо T, сохраняющее полукольцевые операции, называется их *гомоморфизмом.* Взаимно однозначные гомоморфизмы — это изоморфизмы. Инъективный (сюръективный) гомоморфизм полуколец называется *мономорфизмом* (*эпиморфизмом*). Значит, изоморфизм = мономорфизм + эпиморфизм. Если $S \to T$ — эпиморфизм полуколец, то полукольцо T называется *гомоморфным образом* полукольца S.

Упражнение 4.1. Какие из возможных свойств полуколец, указанных в пункте 1, сохраняются при эпиморфизмах? При гомоморфизмах? Докажите, в частности, что образ полутела при любом гомоморфизме будет полутелом.

Замечание 4.1. Из классической общеалгебраической теоремы Биркгофа следует [18, пункт 13.1], что непустой класс K полуколец образует многообразие тогда и только тогда, когда K замкнут относительно взятия произвольных прямых произведений, подполуколец и гомоморфных образов.

Возьмём произвольный гомоморфизм $\alpha : S \to T$ полукольца S в полукольцо T. Рассмотрим на S бинарное отношение $\rho(\alpha)$ равнообразности отображения α:

$$a\rho(\alpha)b \Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b)\,(\forall a, b \in S).$$

Очевидно, $\rho(\alpha)$ есть отношение эквивалентности на полукольце S, причём оно согласовано с полукольцевыми операциями на S: $\forall a, b, c, d \in S$

$$a\rho(\alpha)b \,\&\, c\rho(\alpha)d \Rightarrow (a+c)\rho(\alpha)(b+d) \,\&\, (ac)\rho(\alpha)(bd).$$

Такое отношение эквивалентности $\rho(\alpha)$ на S будет конгруэнцией на полукольце S. Именно отношение эквивалентности ρ на полукольце S называется *конгруэнцией* на S, если для любых $a, b, c, d \in S$

$$a\rho b \,\&\, c\rho d \Rightarrow (a+c)\rho(b+d) \,\&\, (ac)\rho(bd).$$

Упражнение 4.2. Докажите, что в определении конгруэнции достаточно считать $c = d$.

Понятие конгруэнции позволяет корректно определить операции сложения и умножения на фактор-множестве $S/\rho = \{a/\rho : a \in S\}$ всех классов $a/\rho = \{s \in S : s\rho a\}$ эквивалентности ρ:

$$a/\rho + b/\rho = (a+b)/\rho \text{ и } a/\rho \cdot b/\rho = (ab)/\rho \text{ для любых } a, b \in S.$$

Непосредственно проверяется, что полученная алгебраическая структура $\langle S/\rho, +, \cdot \rangle$ будет полукольцом, называемым *фактор-полукольцом* полукольца S по конгруэнции ρ. Отображение π: $S \to S/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ для всех $a \in S$, является эпиморфизмом, называемым *каноническим эпиморфизмом* полукольца S на своё фактор-полукольцо S/ρ.

Замечание 4.2. Часто класс a/ρ элемента a по конгруэнции ρ полукольца S обозначается как $[a]_\rho$.

Теорема 4.1 (*об эпиморфизме*)**.** *Для всякого эпиморфизма $\alpha : S \to T$ существует единственный изоморфизм $\beta : S/\rho \to T$, для которого $\alpha = \pi\beta$.*

Часто эта теорема формулируется в несколько более общем случае как

Теорема 4.2 (*о гомоморфизме*)**.** *Для всякого гомоморфизма $\alpha : S \to T$ существуют однозначно определённые изоморфизм $\beta : S/\rho \to \operatorname{Im}\alpha$ и мономорфизм $\gamma : \operatorname{Im}\alpha \to T$, для которых $\alpha = \pi\beta\gamma$.*

Здесь $\mathrm{Im}\,\alpha = \{t \in T : \exists s \in S\ t = \alpha(s)\}$ — образ отображения α и γ — тождественное вложение $\mathrm{Im}\,\alpha$ в T ($\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq T$).

Упражнение 4.3. Проверьте, что образ любого гомоморфизма $S \to T$ полуколец является подполукольцом в T.

Упражнение 4.4. Постарайтесь доказать теорему об эпиморфизме.

Упражнение 4.5. Выведите теорему 4.2 из теоремы 4.1.

Далее рассмотрим (непустое) семейство $(\rho_i)_{i\in I}$ конгруэнций на произвольном полукольце S. Пусть ρ — пересечение всех конгруэнций ρ_i ($i \in I$). Имеем фактор-полукольца S/ρ и S/ρ_i по всем индексам $i \in I$, прямое произведение $\Pi S/\rho_i$ и следующее отображение:

$$\alpha : S/\rho \to \Pi S/\rho_i, \alpha(a/\rho)(i) = a/\rho_i \text{ для любого } a \in S \text{ и всех } i \in I.$$

Нетрудно проверить, что отображение α инъективно и является гомоморфизмом указанных полуколец. Особо важен случай, когда $\rho = \cap\rho_i = \mathbf{0}$ есть нулевая конгруэнция на полукольце S, т. е. будет отношением равенства на S; при этом $S/\mathbf{0} = S$.

Теорема 4.3 (*о подпрямом разложении*)**.** *Для любого семейства $(\rho_i)_{i\in I}$ конгруэнций на полукольце S отображение $\alpha : S/\cap\rho_i \to \Pi S/\rho_i$ является мономорфизмом, т. е. изоморфным вложением фактор-полукольца $S/\cap\rho_i$ в прямое произведение $\Pi S/\rho_i$ фактор-полуколец S/ρ_i. Если $\cap\rho_i = \mathbf{0}$, то α — изоморфное вложение самого полукольца S в прямое произведение $\Pi S/\rho_i$ фактор-полуколец S/ρ_i.*

Пример 4.1. Убедитесь, что кольцо $\mathbb{Z}_{30}$ классов вычетов целых чисел по модулю 30 разлагается в прямое произведение полей $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5$: $\mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Пример 4.2. Постройте дистрибутивную решётку S, изоморфную прямому произведению двухэлементной цепи C_2 и трёхэлементной цепи C_3. Найдите на полукольце S конгруэнции ρ и σ, такие, что $\rho \cap \sigma = 0$, $S/\rho \cong C_2$ и $S/\sigma \cong C_3$.

Упражнение 4.6. Подробно докажите теорему 4.3.

Пусть дано произвольное полукольцо S с нулём 0. Обозначим через $r(S)$ множество всех элементов в S, имеющих противоположный элемент:

$$r(S) = \{a \in S : \exists b \in S\ a + b = 0\}.$$

Легко видеть, что $r(S)$ есть идеал полукольца S, причём строгий идеал, т. е. $a+b \in r(S)$, влечёт $a, b \in r(S)$ для любых $a, b \in S$. Напомним, что непустое подмножество J полукольца S называется его *идеалом*, если $J+J \subseteq J, SJ \subseteq J$ и $JS \subseteq J$.

Упражнение 4.7. Проверьте, что $r(S)$ — строгий идеал полукольца S с 0, являющийся кольцом.

Зададим на полукольце S с 0 конгруэнцию Бёрна $\equiv$ по идеалу $r(S)$:

$$s \equiv t \Leftrightarrow \exists a, b \in r(S)\, s+a=t+b\, (\forall s, t \in S).$$

Легко проверить, что класс нуля $0/\equiv$ конгруэнции $\equiv$ совпадает с $r(S)$.

Упражнение 4.8. Докажите, что отношение $\equiv$ является конгруэнцией на полукольце S, причём $0/\equiv = r(S)$.

Покажем, что фактор-полукольцо $S/\equiv$ является антикольцом. Сначала заметим, что $0/\equiv$ будет нулём фактор-полукольца $S/\equiv$. Предположим, что $s/\equiv +t/\equiv = 0/\equiv$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $(s+t)/\equiv = 0/\equiv$, т. е. $(s+t) \equiv 0$, откуда $(s+t)+a = 0+b = b$ для некоторых элементов $a, b \in r(S)$. Поскольку идеал $r(S)$ строгий, то $s, t \in r(S)$, значит, $s/\equiv = t/\equiv = 0/\equiv$.

Скажем, что полукольцо S с нулём 0 является 0-*расширением* полукольца A при помощи полукольца B, когда на полукольце S существует такая конгруэнция ρ, что полукольцо $0/\rho$ изоморфно A и фактор-полукольцо S/ρ изоморфно B.

Тем самым доказана следующая структурная теорема о полукольцах.

Теорема 4.4 (*о расширении*)**.** *Любое полукольцо S с нулём является 0-расширением кольца при помощи антикольца.*

Упражнение 4.9. Докажите, что кольцо в теореме 4.4 определено однозначно с точностью до изоморфизма, именно оно изоморфно $r(S)$.

Теорема 4.5. *Пусть S — произвольное полукольцо с нулём 0 и кольцо $r(S)$ обладает единицей e. Тогда S разлагается в прямую сумму своих идеалов $eS = r(S)$ и J, где eS — кольцо, а J является антикольцом, причём такое разложение единственно.*

Разложение полукольца S в *прямую сумму идеалов* I и J из S, в записи $S = I \oplus J$, означает, что каждый элемент $s \in S$ представим в виде суммы $s = a + b$ однозначно определённых элементов $a \in I$ и $b \in J$. Если полукольцо S имеет нуль 0, то $I \cap J = \{0\}$.

Разберём доказательство этой теоремы.

По условию элемент e служит единицей кольца $r(S)$. Мы уже знаем, что $r(S)$ является идеалом в S. Поэтому $eS \cup Se \subseteq r(S) \subseteq eS \cap Se$. Следовательно, $r(S) = eS = Se$. Заметим также, что $es = ese = se$ для всех $s \in S$.

Единица e кольца $r(S)$ имеет противоположный элемент $-e \in r(S)$. Значит, можно определить множество $J = \{s + (-e)s : s \in S\}$. Легко видеть, что J — идеал полукольца S.

Покажем, что $S = eS \oplus J$. Для любого элемента $s \in S$ имеем $s = es + (s + (-e)s)$. Допустим также, что $s = er + (t + (-e)t)$ для некоторых $r, t \in S$. Умножая оба равенства на e слева, получаем $es = er$. Прибавляя к обеим частям равенств элемент $-es = -er$, имеем $s + (-e)s = t + (-e)t$.

Проверим, что J — антикольцо. Предположим, что $(s + (-e)s) + (t + (-e)t) = 0$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $s \in r(S)$ и $s = es$. Значит, $s + (-e)s = es + (-e)s = 0s = 0$.

Далее, пусть $S = I \oplus K$ для таких идеалов I и K полукольца S, что I — кольцо и K — антикольцо. Элемент $0 = 0 + 0$ полукольца S служит нулём полуколец I и K. Поэтому $I \subseteq r(S)$. Проверим обратное включение $r(S) \subseteq I$. Для этого достаточно показать, что $e \in I$. Раскладываем $e = a + b$, где $a \in I$ и $b \in K$. Имеем $e = a + eb$, причём $eb \in K$. Откуда $b = eb$ и $b + (-e)b = 0$ в антикольце K. Значит, $b = 0$ и $e = a \in I$. Получили равенство $I = r(S)$.

Докажем равенство $K = J$. Имеем включение $K \subseteq J$: если $s \in K$, то $s = es + s + (-e)s = s + (-e)s \in J$, поскольку $es \in I \cap K = \{0\}$. Включение $J \subseteq K$ вытекает из равенства $r(S) \oplus K = r(S) \oplus J$ и включения $K \subseteq J$. Действительно, каждый элемент $s \in J$ имеет разложения $s = 0 + s$ и $s = r + t$, $r \in r(S)$ и $t \in K$. Следовательно, $r = 0$ и $s = t$. Откуда $J \subseteq K$. Стало быть, $K = J$.

Теорема 4.5 доказана.

Упражнение 4.10. Установите взаимосвязи между прямой суммой $S = I \oplus J$ идеалов I и J полукольца S и прямым произведением $I \times J$ полуколец I и J.

Список источников

1. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000. 44 с.

2. **Вечтомов Е. М.** Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре // *Математический вестник Вятского государственного университета.* 2021. № 3. С. 36–45.

3. **Вечтомов Е. М.** Изучение основ теории полуколец. Простые идеалы // *Математический вестник Вятского государственного университета.* 2021. № 4. С. 4–14.

4. **Вечтомов Е. М.** Математика: основные математические структуры : учебное пособие. 2-е изд. М.: Юрайт, 2018. 296 с.

5. **Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.** Абстрактная алгебра. Базовый курс : учебное пособие. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2014. 260 с.

6. **Сидоров В. В.** Алгебра: алгебраические структуры, комплексные числа, многочлены : учебное пособие. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2013. 232 с.

7. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2016. Т. 1. 384 с.

8. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е.Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец : монография. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2012. 228 с.

9. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением : учебное пособие. СПб.: Лань, 2022. 180 с.

10. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Полутела и их свойства // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2008. Т. 14. Вып. 5. С. 3–54.

11. **Вечтомов Е. М., Чермных В. В.** Основные направления развития теории полуколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. № 4. С. 4–40.

12. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 111–227.

13. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

14. **Вечтомов Е. М.** Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // *Научно-методический электронный журнал «Концепт».* 2014. № 12. С. 11–15. URL: https://e-koncept.ru/2014/14335.htm (дата обращения: 20.01.2024).

15. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold // *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1934. Vol. 40. No 12. Pp. 914–920.

16. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Упорядоченные множества и решетки : учебное пособие. СПб.: Лань, 2024. 248 с.

17. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

18. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

References

1. **Vechtomov E. M.** *Vvedeniye v polukol'tsa* [Introduction to Semirings]. Kirov: Izd-vo vyatsk. gos. ped. un-ta, 2000. 44 p. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M.** Student educational and research seminar on algebra. *Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Bulletin of Vyatka State University]. 2021. No 3. Pp. 36–45. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M.** Studying the basics of the theory of semirings. Prime Ideals. *Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Bulletin of Vyatka State University]. 2021. No 4. Pp. 4–14. (In Russ.)

4. **Vechtomov E. M.** *Matematika: osnovnyye matematicheskiye struktury: uchebnoye posobiye. 2-e izd.* [Mathematics: basic mathematical structures: study guide. 2nd ed.]. Moscow: Urait. 2018. 296 p. (In Russ.)

5. **Vechtomov E. M., Sidorov V. V.** *Abstraktnaya algebra. Bazovyy kurs : uchebnoye posobiye* [Abstract algebra. Basic course : study guide]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2014. 260 p. (In Russ.)

6. **Sidorov V. V.** *Algebra: algebraicheskiye struktury. kompleksnyye chisla. mnogochleny : uchebnoye posobiye* [Algebra: algebraic structures, complex numbers, polynomials : study guide]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2013. 232 p. (In Russ.)

7. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V.** *Elementy funktsionalnoy algebry: monografiya: v 2 t.* [Elements of functional algebra: monograph: in 2 vol.]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2016. Vol. 1. 384 p. (In Russ.)

8. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnykh V. V.** *Elementy teorii polukolets: monografiya* [Elements of the theory of semirings: monograph]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2012. 228 p. (In Russ.)

9. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Funktsionalnaya algebra i polukoltsa. Polukoltsa s idempotentnym umnozheniyem : uchebnoye posobiye* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan', 2022. 180 p. (In Russ.)

10. **Vechtomov E. M., Cheraneva A. V.** Semifields and their properties. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 2008. Vol. 14. No 5. Pp. 3–54. (In Russ.)

11. **Vechtomov E. M., Chermnykh V. V.** Main directions of development of the theory of semirings. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2021. No 4. Pp. 4–40. (In Russ.)

12. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 2012. Vol. 17. No 3. Pp. 111–227. (In Russ.)

13. **Golan J. S.** *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

14. **Vechtomov E. M.** We are introduced to abstract algebra: semigroups. *Nauchno-metodicheskiy elektronniy zhurnal «Kontsept»* [Scientific and methodological electronic journal «Concept»]. 2014. No 12. Pp. 61–65. Available: https://e-koncept.ru/2014/14335.htm (accessed: 20.01.2024). (In Russ.)

15. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1934. Vol. 40. No 12. Pp. 914–920.

16. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki : uchebnoye posobiye* [Ordered sets and lattices : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan', 2024. 248 p. (In Russ.)

17. **Grätzer G.** *Obshchaya teoriya reshetok* [General Lattice Theory]. Moscow: Mir, 1982. 456 p. (In Russ.)

18. **Mal'tsev A. I.** *Algebraicheskiye sistemy* [Algebraic systems]. Moscow: Nauka, 1970. 392 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Евгений Михайлович Вечтомов / Evgeny M. Vechtomov
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Россия, Киров, ул. Московская, д. 36 / 610000, Russia, Kirov, Moskovskaya St., 36

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 04.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.02.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024