ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

1(50) выпуск 24

Вестник Сыктывкарского университета Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	Серия 1: *Математика* *Механика* *Информатика*	12+ ISSN 1992-2752 Выпуск 1 (50) 2024

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2024. — 1 (50). 2024. — 95 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по направлению «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

Журнал также публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)».

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is in the list of peer-reviewed scientific journals which publish the main scientific results of dissertations for the scientific degree of Candidate of Sciences, for the scientific degree of Doctor of Sciences, in the direction «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)»

The journal also publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)»

Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.

Адрес редакции
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Содержание

ИНФОРМАТИКА

INFORMATICS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)

Научная статья

УДК 004.42; 37.018.46
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_4

РАЗРАБОТКА ВЕБ-СЕРВИСА ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПОВЫШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КВАЛИФИКАЦИИ СОТРУДНИКОВ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ НА ОСНОВЕ ГЕНЕРАЦИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ МАРШРУТОВ

Юрий Валентинович Гольчевский[1]
Артем Сергеевич Гарматко[2]
[1]Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, yurygol@mail.ru,
[2]ООО «Философия ИТ», garmatko.art@mail.ru

Аннотация. В данной работе представлено исследование проблемы создания веб-сервиса для автоматизации организации и проведения повышения квалификации работников на примере государственных учреждений, работающих в сфере искусства и культуры. Использован подход, подразумевающий выстраивание индивидуальных маршрутов, содержащих наборы курсов, в результате обучения по которым работник формирует выбранные и необходимые ему компетенции. При этом процесс становится полностью подконтрольным работодателю, который имеет возможность сформировать и/или подтвердить индивидуальный маршрут обучения сотрудника и отслеживать его прохождение.

Ключевые слова: повышение квалификации, индивидуальный образовательный маршрут, автоматизация, веб-ресурс

Для цитирования: Гольчевский Ю. В., Гарматко А. С. Разработка веб-сервиса для автоматизации процесса повышения профессиональной квалификации сотрудников государственных организаций на основе генерации индивидуальных образовательных маршрутов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 4—20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_4

Article

Development of a web service for automating the process of professional development for employees of government organizations based on the generation of individual educational routes

Yuriy V. Golchevskiy[1], **Artem S. Garmatko**[2]
[1]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, yurygol@mail.ru,
[2]LLC "Philosophy IT", garmatko.art@mail.ru

Abstract. The paper presents a study of the problem of creating a web service for automating control over the professional development of employees process using the example of a state agencies working in the field of art and culture. An approach has been used that implies individual training routes generation containing sets of courses, as a result of which the employee will receive all the necessary competencies. At the same time, the process becomes completely controlled by the employer, who also has the opportunity to form and/or confirm an individual employee training route and track the progress.

Keywords: professional development, individual educational route, automation, web resource

For citation: Golchevskiy Yu. V., Garmatko A. S. Development of a web service for automating the process of professional development for employees of government organizations based on the generation of individual educational routes. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 4–20. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_4

Введение

В современных условиях для успешного развития любой частной компании или государственной организации, включая органы государственного управления, медицинские учреждения, учреждения культуры и искусства, необходимо грамотно выстраивать такой важный процесс, как постоянное повышение квалификации сотрудников. Он позволяет актуализировать знания и навыки специалистов, что подготавливает их к постоянно повышающимся требованиям современной цифровой экономики и работодателей. Полученные новые знания и умения позволяют работникам более качественно выполнять возложенные на них обязанности, что приводит к повышению конкурентоспособности товаров или услуг компаний и организаций, не пренебрегающих вниманием к постоянному обучению своего персонала.

Способность выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни, саморазвитие в условиях неопределенности и креативное мышление уже стали компетенциями, которыми должен обладать практически любой квалифицированный специалист [1].

Происходит переосмысление роли и отношения к пониманию значения процессов образования, включая повышение профессиональной квалификации [2; 3]. Растет востребованность повышения квалификации в дистанционном формате, подразумевающем включение в процесс обучения различных онлайн-курсов. Это дает новые возможности и позволяет решать множество разных проблем, например проводить обучение без отрыва сотрудников от работы, оптимизировать скорость обучения в зависимости от индивидуальных способностей, избегать лишних временных и финансовых затрат на командировки и т. д.

На данный момент рынок предлагает множество платформ, позволяющих проходить обучение онлайн. Они содержат учебные материалы по множеству направлений и могут предоставлять различные коммерческие предложения для предприятий, интересующихся реализацией обучения в том или ином виде. Некоторые из популярных образовательных сервисов – Coursera, LinkedIn Learning, edX, Udemy, Stepik, Открытое образование. Значительная часть этих сервисов являются разработками иностранных компаний, что не позволяет обеспечить уверенное и длительное использование данных платформ в современных условиях. Существуют и другие онлайн-платформы. Наш анализ показал, что часто они предлагают достаточно дорогие подписки, рассчитанные на организации, которые будут привлекать многочисленную аудиторию, либо включают множество неиспользуемых функций, не предоставляя удобные инструменты для выстраивания индивидуальных траекторий. Также при использовании подобных сервисов отсутствует возможность с минимальными затратами дополнить функционал по своим пожеланиям, например внести элементы геймификации.

Собственная разработка дает возможность реализовать собственный подход к обучению, не зависящий от условий стороннего поставщика услуг, создать и обезопасить процесс обработки и хранения документов работника, изучить вопросы целесообразности, возможности и способы внесения элементов геймификации на основе исследований, опубликованных, например, в работах [4–8].

Значительное внимание исследователями в разных регионах Российской Федерации уделяется вопросам обучения работников сферы культуры. Подобные проблемы рассматриваются, например, в работах [2; 9; 10].

Сказанное выше обусловливает цель данного исследования – представление результатов анализа процесса повышения квалификации и возможности его автоматизации путем создания веб-сервиса, позволяющего сотрудникам учреждений культуры и искусства выстраивать индивидуальные маршруты обучения на определенный период времени, согласуемые и контролируемые работодателем.

Исследование проблемы и апробация результатов разработки осуществлялась на базе одного из учреждений Министерства культуры и архивного дела Республики Коми.

Проектирование веб-сервиса

Проведенный анализ типичных бизнес-процессов, связанных с организацией процесса повышения квалификации сотрудников государственных учреждений, показал, что значительное количество времени затрачивается на планирование обучения, согласование и утверждение, информирование сотрудников и оформление необходимых документов. Для исследуемой ситуации были выделены следующие роли:

- обучающийся — лицо, зарегистрировавшееся в сервисе с целью получения новых или улучшения имеющихся знаний и навыков;

- работодатель — организация, которая обращается к учебному центру за услугами повышения квалификации своих работников;
- преподаватель — лицо, несущее ответственность за обучение и формирующее учебные материалы;
- куратор — специалист учебного центра, предоставляющий различные консультации и являющийся связующим звеном между всеми субъектами.

В рамках автоматизации исследуемого процесса требовалось создать образовательную платформу (сервис), функциональная часть которой позволяла бы сотрудникам выстраивать индивидуальные маршруты обучения, содержащие набор курсов, позволяющих выбрать и освоить те компетенции, которые необходимы для дальнейшей успешной работы, а также автоматизировала бы работу, связанную с оформлением необходимых документов. Для повышения эффективности системы и контроля обучения работодатели должны иметь возможность отслеживать прогресс обучения своего персонала, а для повышения мотивации работников и улучшения оценки результатов требуется выстраивать рейтинговую систему. Такая система для обучающихся состоит, главным образом, из текущего прогресса и общего количества курсов в индивидуальном маршруте, дате последнего освоения того или иного учебного материала, а для работодателей – из числа работников, обучающихся в системе, и прогресса их индивидуальных образовательных маршрутов. Рейтинговая информация будет полезна и для оценки работы муниципалитетов, отражая число учреждений и статистику успеваемости, складывающейся из прогресса обучения их персонала.

Кураторы должны иметь возможность беспрепятственно вносить все необходимые данные в систему, используя интерфейс, и наглядно представлять данные, упрощающие поиск, фильтрацию и сортировку информации. Данные, необходимые для генерации индивидуальных образовательных маршрутов и работы с сервисом, должны включать:

- категории должностей (например, «Руководители», «Художественный персонал», «Артистический персонал» и т.д.) и сами должности (например, для категории «Специалисты»: «Диктор», «Аранжировщик», «Режиссер»);
- разделы компетенций («Универсальные» и «Уникальные»);

- категории компетенций (для раздела «Универсальные»: «Общие культурные знания», «Психолого-педагогические навыки» и другие; для раздела «Уникальные»: «Профессиональные навыки», «Практические навыки», «Технические навыки» и другие);

- компетенции (например, для категории «Технические навыки»: «Способность эффективно работать в социальных сетях», «Создавать эффективные презентации», «Применять мультимедиатехнологии»);

- курсы — наборы учебных материалов, прохождение которых позволяет освоить ту или иную компетенцию;

- формы обучения – способ прохождения того или иного курса («Семинар», «Вебинар», «Мастер-класс», «КПК», «Лекция», «Тренинг» и т. д.) и учебные материалы;

- список муниципальных образований региона;

- целевые направления (например, «Художественное образование», «Культурно-досуговая деятельность», «Музейная деятельность»).

Построенная модель автоматизированного процесса в упрощенной форме и без детализации промежуточных выходов представлена на рис. 1. Ее особенностью является возможность переложить большую часть подготовительных этапов на веб-ресурс. Исчезает необходимость в использовании дополнительных средств информирования обучающихся о ближайших мероприятиях, реализуемых в рамках курсов, так как в маршруте будет присутствовать вся необходимая информация. Стоит заметить, что работодатели также участвуют в процессе оценки результатов повышения квалификации, так как будут иметь доступ к рейтинговым таблицам, позволяющим извлечь информацию о проблемных местах данного процесса в его организации.

Потоки данных рассматриваемой платформы изображены на диаграмме потоков данных (DFD), представленной на рис. 2. Она описывает основные внешние по отношению к системе источники и адресаты данных, а также логические функции, потоки данных и хранилища данных, к которым осуществляется доступ.

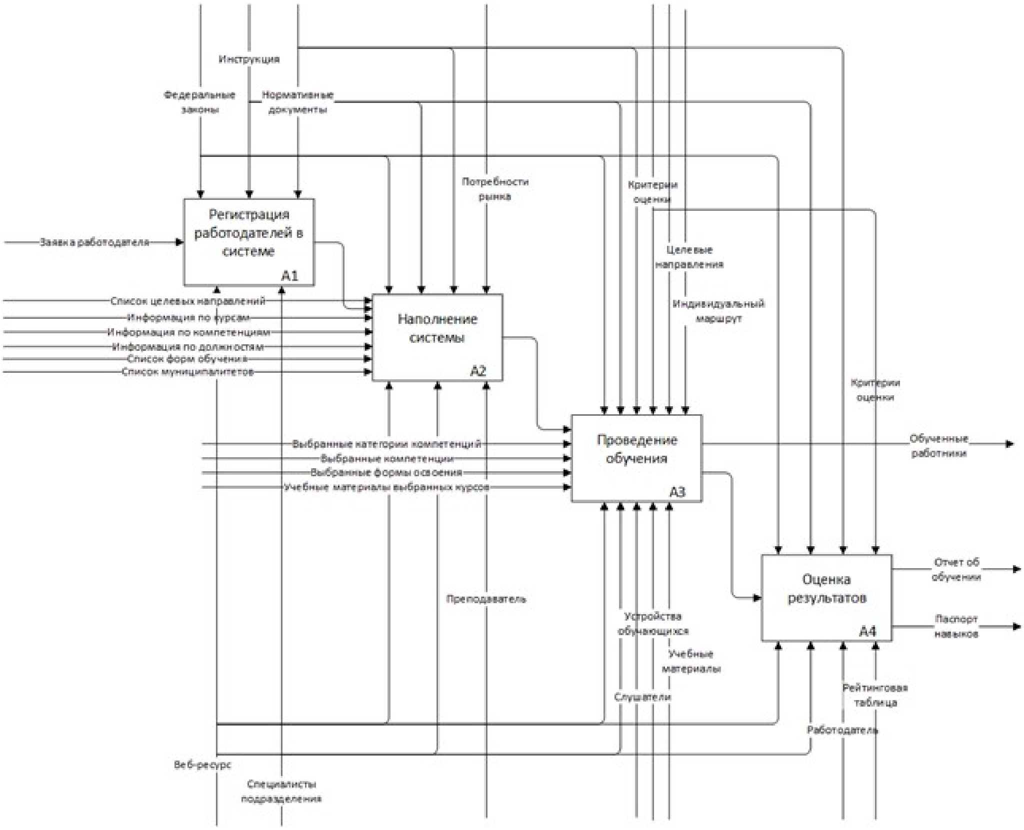

Рис. 1. Модель процесса повышения квалификации

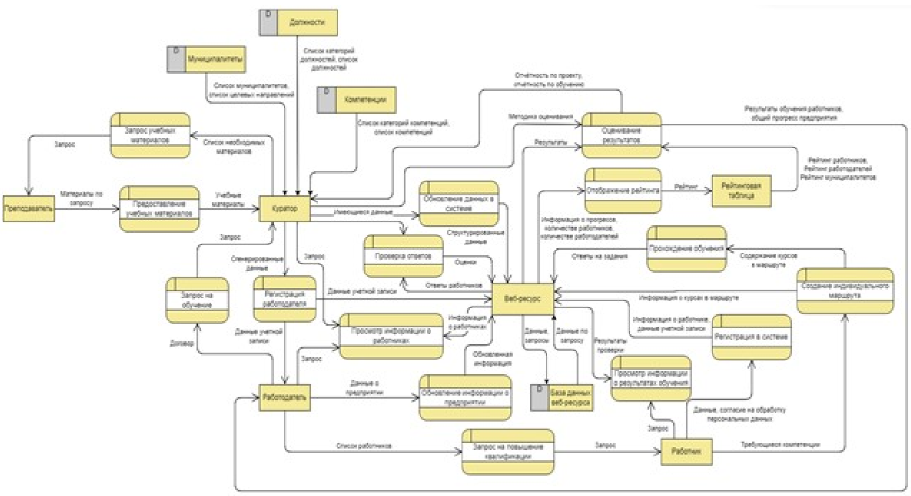

Рис. 2. Диаграмма потоков данных для проектируемого сервиса

Визуализация основных функциональных требований к разрабатываемому веб-ресурсу представлена на диаграмме прецедентов, показанной на рис. 3, которая отображает системные прецеденты, системное окружение и связи между прецедентами и пользователями [11].

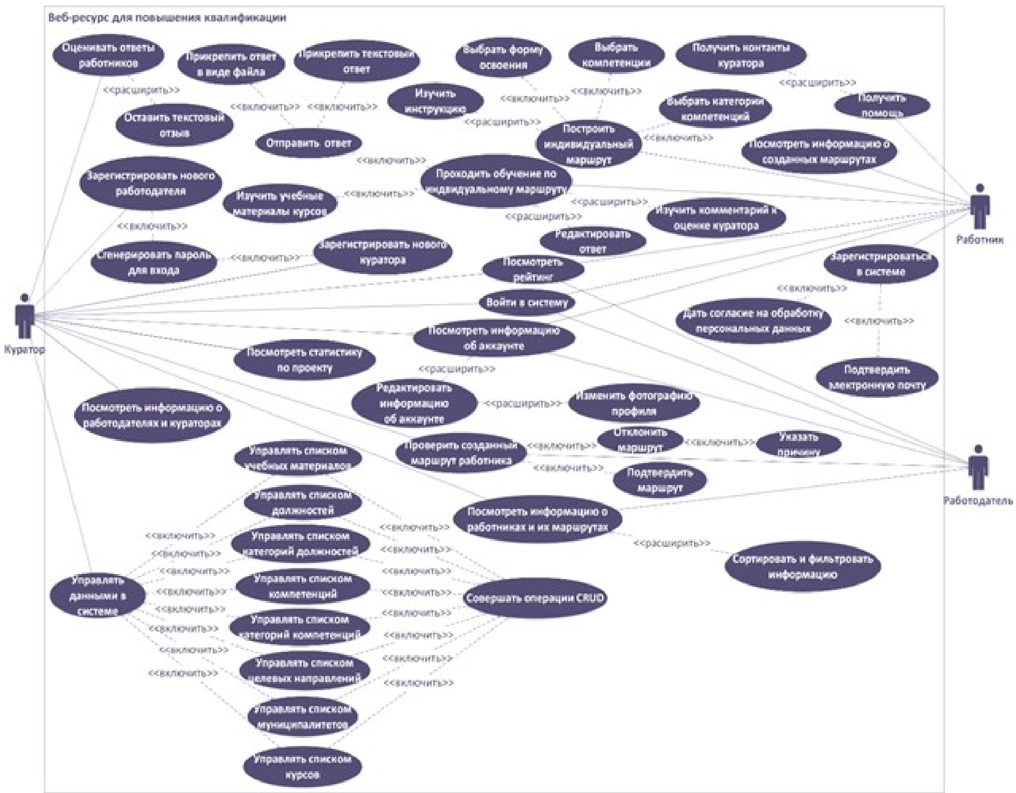

Рис. 3. Диаграмма прецедентов для описываемого сервиса

Следует отметить необходимость наличия таких промежуточных функций, как «Проверка маршрута работодателями и кураторами» и «Регистрация новых кураторов и работодателей» посредством аккаунта другого куратора.

У каждой организации, зарегистрированной в сервисе, имеется доступ к информации и маршрутам своего персонала, поэтому на первом этапе проверки созданных индивидуальных маршрутов будет проходить их согласование непосредственно с работодателями. На втором этапе маршруты должны подтвердить кураторы. Такой порядок может обеспечить «просеивание» некорректных маршрутов на стороне организаций и позволит специалистам учебного центра, которым доступны все неподтвержденные записи в системе, заниматься оценкой маршрутов, уже прошедших первоначальную проверку. При наличии ошибок в выборе компетенций и способов их освоения проверяющий может отклонить маршрут, обязательно указав причину. Эта информация будет доступна работнику для дальнейшего исправления.

В качестве основных инструментов разработки для реализации серверной части веб-сервиса использовались:

- скриптовый язык программирования PHP, имеющий высокую производительность, множество фреймворков, упрощающих процесс разработки и хорошо подходящий для решения сложных задач [12];

- популярный фреймворк Laravel, позволяющий быстро реализовывать алгоритмы аутентификации пользователей, настройки взаимодействия с базами данных и множества других стандартных функций веб-ресурсов (сравнение с другими фреймворками приведено в работе [13]);

- гибкая, продуктивная система управления базами данных MySQL [14].

Механизм построения индивидуального маршрута

Сам процесс обучения является достаточно стандартным для подобных сервисов, и на нем нет смысла останавливаться подробно в данной работе. Интерес представляет механизм построения индивидуального образовательного маршрута, который имеется далеко не у многих подобных платформ. Если у зарегистрированного в сервисе обучающегося еще не создан маршрут на заданный текущий период времени (период задается в системе, например, текущий год), то при нажатии на статус пользователь перейдет на страницу генерации маршрута, которая содержит ознакомительную часть и сам конструктор маршрута. В ознакомительной части представлена основная информация по целевым направлениям, а также по работе с конструктором. Принцип работы с конструктором индивидуального маршрута состоит в выборе формы освоения для той или иной компетенции в каждой из категорий, что представлено на скриншоте, показанном на рис. 4.

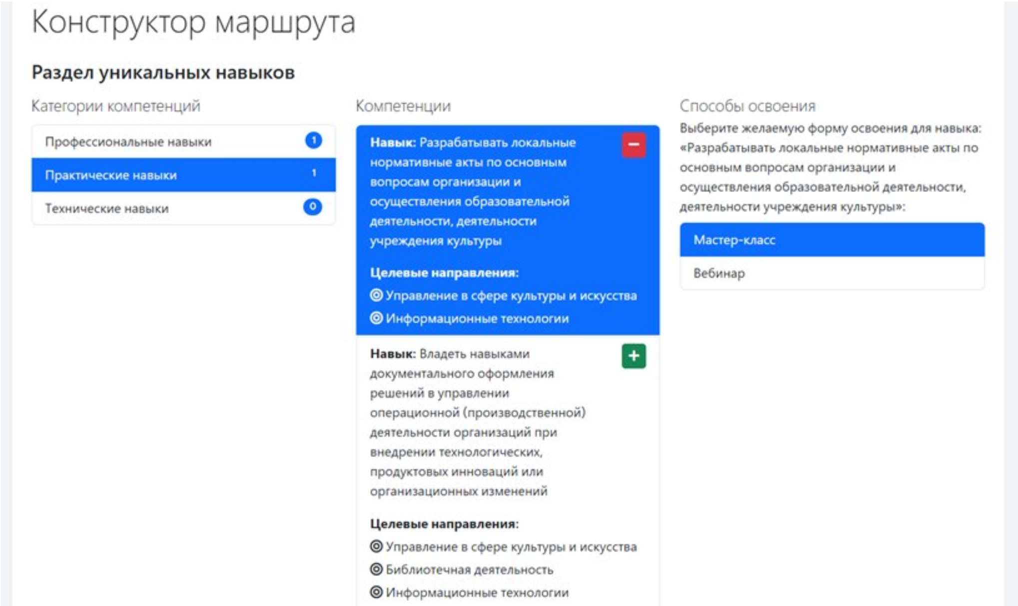

Рис. 4. Интерфейс работы с конструктором индивидуального маршрута

Связь категорий компетенций, компетенций, навыков и целевых направлений осуществляется автоматически по введенным в базу данных параметрам и предлагается пользователю в зависимости от его текущей должности и потребностей работодателя (может корректироваться работодателем или куратором). После выбора как минимум одной компетенции в каждом из разделов можно завершить создание маршрута, ознакомившись с предварительным вариантом, представленным на рис. 5.

Если маршрут подтвержден, то он будет иметь соответствующий статус, а его прогресс будет отображен в списке всех маршрутов (см. рис. 6). Сама страница индивидуального маршрута представляет информацию о курсах или дисциплинах, которые необходимо пройти для получения всех выбранных компетенций, что показано на рис. 7.

Интерфейс работодателя, кроме общих страниц, предоставляет возможность просматривать информацию о персонале организации и успехах в обучении. Скриншот карточки сотрудника представлен на рис. 8.

В интерфейсе Куратора имеется возможность просмотра всех маршрутов пользователей, используя фильтры, что показано на рис. 9, а также экспорта текущей таблицы в файл формата Microsoft Excel.

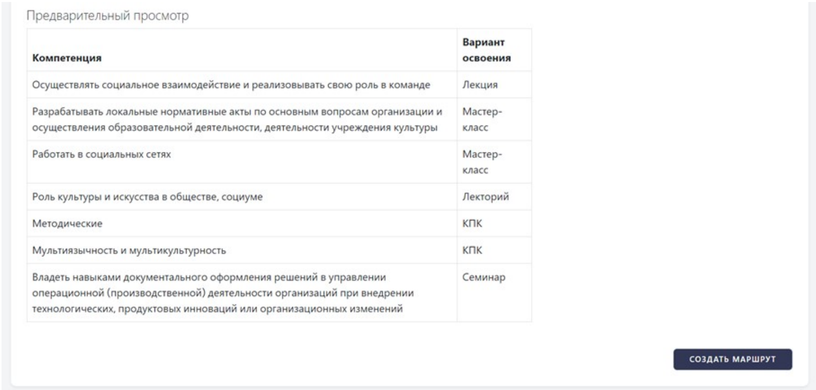

Рис. 5. Пример отображения предварительного индивидуального маршрута обучающегося

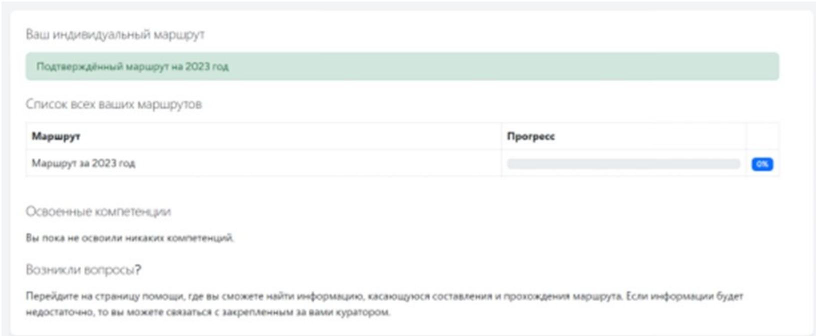

Рис. 6. Отображение подтвержденных маршрутов обучающегося

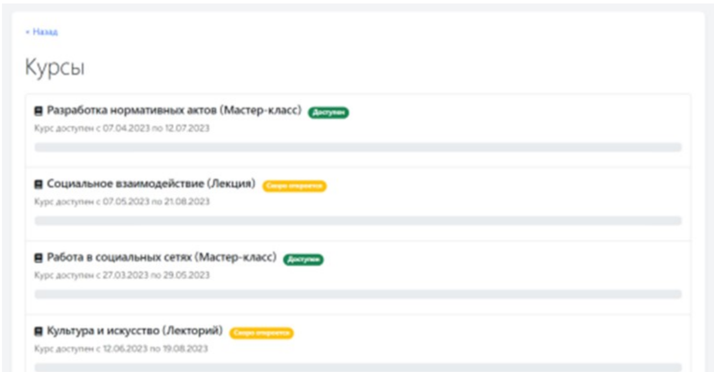

Рис. 7. Страница индивидуального маршрута с курсами и дисциплинами

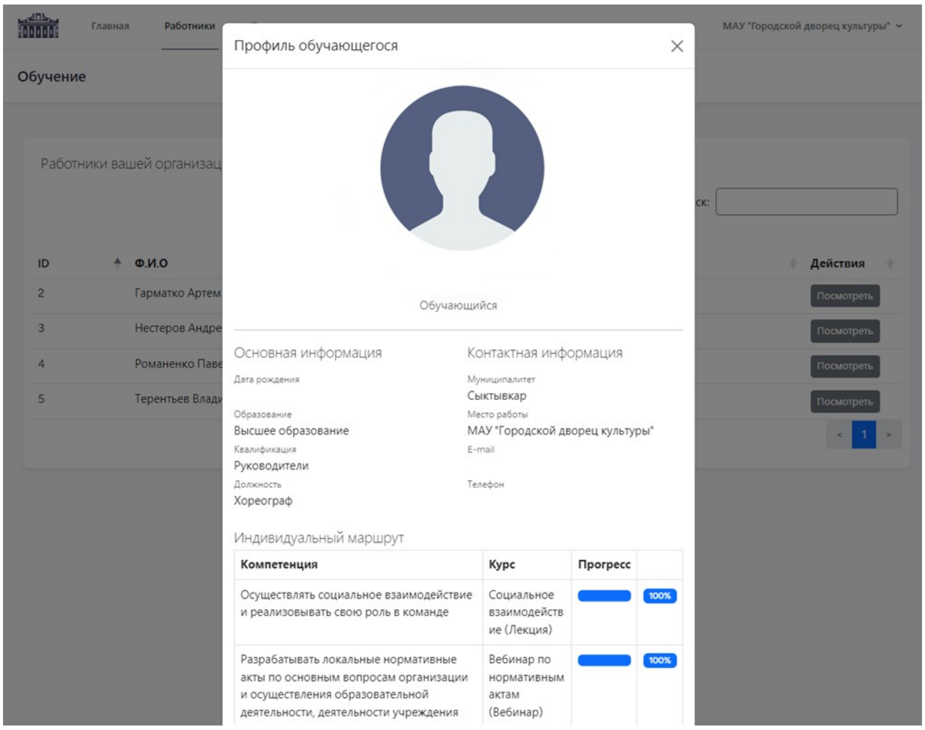

Рис. 8. Информация о прохождении индивидуального образовательного маршрута сотрудника

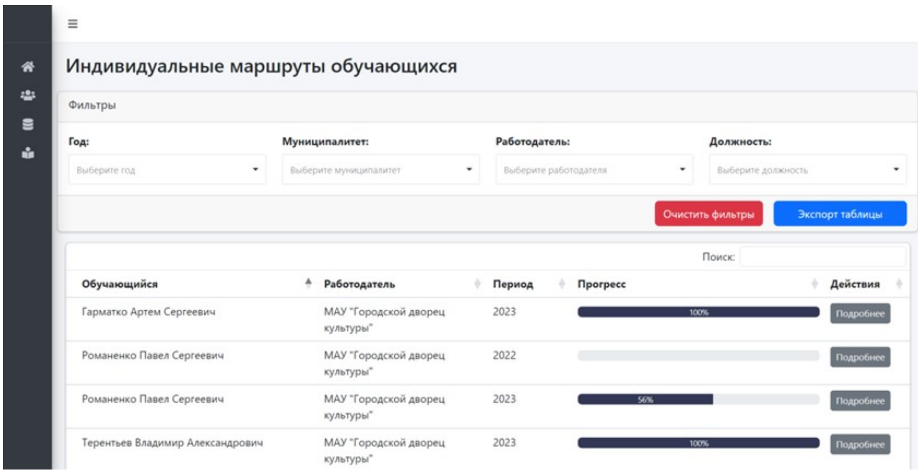

Рис. 9. Интерфейс куратора с информацией об индивидуальных образовательных маршрутах обучающихся

Заключение

В ходе последовательного выполнения всех этапов работы от изучения и моделирования бизнес-процессов, проектирования образовательной платформы, удовлетворяющей основным потребностям в повышении квалификации сотрудников государственных организаций, работающих в сфере культуры, и до разработки и тестирования полученного программного решения был реализован веб-сервис, пригодный для внедрения и практического использования. Обучающиеся имеют возможность выстраивать индивидуальные образовательные маршруты, формирующие необходимые работодателю компетенции, наполнять их курсами/дисциплинами и изучать приложенные учебные материалы, а работодатели — контролировать процесс повышения квалификации своих сотрудников. Учебные центры и кураторы имеют инструменты для управления сервисом (его наполнения и обновления), взаимодействия с обучающимися и автоматизации подготовительного этапа.

Список источников

1. **Golchevskiy Yu., Novokshonova E., Yermolenko A.** Digital economy competencies as a vital necessity of a modern successful specialist // *Advances in Economics, Business and Management Research.* 2020. Vol. 156. Pp. 291–296. DOI: 10.2991/aebmr.k.201205.048.

2. **Галкин О. А.** Повышение квалификации в системе непрерывного профессионального образования в сфере культуры: роль и вопросы содержания // *Проблемы и перспективы развития высшего образования в сфере культуры и искусств: материалы научно-методической конференции профессорско-преподавательского состава учреждения образования.* Минск: Белорусский гос. унив. культуры и искусств, 2023. С. 103–111. EDN: PCPNDH.

3. **Бабикова Н. Н.** Обучение в цифровую эпоху: помнить или гуглить // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 33–46. DOI: 10.34130/1992-2752_2022_3_33.

4. **Норманский Н. С.** Геймификация как механизм цифровизации подготовки кадров в сфере культуры и искусства // *Культурная*

жизнь Юга России. 2022. № 1 (84). С. 101–110. DOI: 10.24412/2070-075X-2022-1-101-110.

5. **Караваев Н. Л., Соболева Е. В.** Анализ программных сервисов и платформ, обладающих потенциалом для геймификации обучения // *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*. 2017. № 8. С. 14–25. EDN: ZEGUJZ.

6. **Гольчевский Ю. В. Бабенко В. В.** Проблемы внедрения игровых технологий в бизнес-процессы и интерфейсы бизнес-ориентированных программных систем // *Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : сборник научных статей I Всероссийской научной конференции. 12–14 декабря 2017 г.: в 2 ч.* Тольятти: ТГУ, 2017. Ч. 2 С. 318–324. EDN: YWGOJL.

7. **Zeybek N., Saygı E.** Gamification in Education: Why, Where, When, and How? A Systematic Review // *Games and Culture*. 2024. Vol. 19. Issue 2. Pp. 237–264. DOI: 10.1177/15554120231158625.

8. **Oliveira W., Hamari J., Shi L. et al.** Tailored gamification in education: A literature review and future agenda // *Education and Information Technologies*. 2023. Vol. 28. Pp. 373–406. DOI: 10.1007/s10639-022-11122-4.

9. **Татарова С. П., Затеева Н. А.** Опыт организации повышения квалификации работников культуры как реализация принципов неформального образования // *Вестник Восточно-Сибирского государственного института культуры*. 2019. № 3 (11). С. 127–133. DOI: 10.31443/2541-8874-2019-3-11-127-133.

10. **Дорофеева Е. В.** Профессиональная переподготовка кадров для сферы культуры региона: проблемы и перспективы // *Образование и общество*. 2019. № 3 (116). С. 72–80. EDN: VDEPEQ.

11. **Новикова Т. Б.** Методология RUP: Collaboration, Class, Activity, Sequence, Use Case Diagrams // *Международный журнал экспериментального образования*. 2017. № 1. С. 74–78. EDN: XVGSSD.

12. **Кочнев А. А.** Web Development с использованием PHP и фреймворка Laravel // *Восточно-Европейский научный журнал*. 2023. № 1-1 (86). С. 4–11. EDN: XNGITS.

13. **Chavan P. R., Pawar S.** Comparison Study Between Performance of Laravel and Other PHP Frameworks // *International Journal of Research in Engineering, Science and Management*. 2021. Vol. 4. Issue 10. Pp. 27–29.

14. **Taipalus T.** Database management system performance comparisons: A systematic literature review // *Journal of Systems and Software*. 2024. Vol. 208. 111872. DOI: 10.1016/j.jss.2023.111872.

References

1. **Golchevskiy Yu., Novokshonova E., Yermolenko A.** Digital economy competencies as a vital necessity of a modern successful specialist. *Advances in Economics, Business and Management Research.* 2020. Vol. 156. Pp. 291–296. DOI: 10.2991/aebmr.k.201205.048.

2. **Galkin O. A.** Professional development in the system of lifelong professional education in the sphere of culture: the role and issues of content. *Problemy i perspektivy razvitiya vysshego obrazovaniya v sfere kul'tury i iskusstv* [Problems and prospects for the development of higher education in the field of culture and the arts]. Proc. of the scientific and methodological conference of the educational institution teaching staff. Minsk: The Belarusian State University of Culture and Arts, 2023. Pp. 103–111. EDN: PCPNDH. (In Russ.)

3. **Babikova N. N.** Education in the digital age: remember or google. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2022. No 3 (44). Pp. 33–46. DOI: 10.34130/1992-2752_2022_3_33. (In Russ.)

4. **Normansky N. S.** Gamification as a Mechanism of Digital Transformation of Personnel Training in the Field of Culture and Art. *Kul'turnaya zhizn' Yuga Rossii* [Cultural Studies of Russian South]. 2022. No 1 (84). Pp. 101–110. DOI: 10.24412/2070-075X-2022-1-101-110. (In Russ.)

5. **Karavaev N. L., Soboleva E. V.** Analysis of software services and platforms that have the potential for educational process gamification. *Nauchno-metodicheskiy elektronnyy zhurnal «Kontsept»* [Scientific and

methodological electronic journal "Concept"]. 2017. No 8. Pp. 14–25. EDN: ZEGUJZ.(In Russ.)

6. **Golchevskiy Yu. V., Babenko V. V.** Problems of gaming technologies introducing into business processes and interfaces of business-oriented software systems. *Informatsionnyye tekhnologii v modelirovanii i upravlenii: podkhody, metody, resheniya: sbornik nauchnykh statey I Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii. 12–14 dekabrya 2017 g.: v 2 ch.* [Information technologies in modeling and management: approaches, methods, solutions: collection of scientific articles of the I All-Russian Scientific Conference. December 12–14, 2017: at 2 a.m.]. Tolyatti: TSU, 2017. Part 2. Pp. 318–324. EDN: YWGOJL. (In Russ.)

7. **Zeybek N., Saygı E.** Gamification in Education: Why, Where, When, and How? – A Systematic Review. *Games and Culture*. 2024. Vol. 19. Issue 2. Pp. 237–264. DOI: 10.1177/15554120231158625.

8. **Oliveira W., Hamari J., Shi L. et al.** Tailored gamification in education: A literature review and future agenda. *Education and Information Technologies*. 2023. Vol. 28. Pp. 373–406. DOI: 10.1007/s10639-022-11122-4.

9. **Tatarova S. P., Zateeva N. A.** Experience of organizing professional upgrading courses of cultural workers as the implementation of informal education principles. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo instituta kul'tury* [Bulletin of the East Siberian State Institute of Culture]. 2019. No 3 (11). Pp. 127–133. DOI: 10.31443/2541-8874-2019-3-11-127-133. (In Russ.)

10. **Dorofeeva E. V.** Professional retraining for the cultural sphere of the region: problems and prospects. *Obrazovaniye i obshchestvo* [Education and Society]. 2019. No 3 (116). Pp. 72–80. EDN: VDEPEQ. (In Russ.)

11. **Novikova T. B.** Modeling RUP: Collaboration, class, activity, sequence, use case diagrams. *Mezhdunarodnyy zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya* [International Journal of Experimental Education]. 2017. No 1. Pp. 74–78. EDN: XVGSSD. (In Russ.)

12. **Kochnev A. A.** Web Development with PHP and Laravel framework. *Vostochno-Yevropeyskiy nauchnyy zhurnal* [East European Scientific Journal]. 2023. No 1 (86). Pp. 4–11. EDN: XNGITS. (In Russ.)

13. **Chavan P. R., Pawar S.** Comparison Study Between Performance of Laravel and Other PHP Frameworks. *International Journal of Research in Engineering, Science and Management*. 2021. Vol. 4. Issue 10. Pp. 27–29.

14. **Taipalus T.** Database management system performance comparisons: A systematic literature review. *Journal of Systems and Software*. 2024. Vol. 208. 111872. DOI: 10.1016/j.jss.2023.111872.

Сведения об авторах / Information about authors
Гольчевский Юрий Валентинович / Yuriy V. Golchevskiy
к.ф.-м.н, доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Applied Informatics Department
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Гарматко Артем Сергеевич / Artem S. Garmatko
стажер-консультант / Trainee Consultant
ООО «Философия ИТ» / LLC "Philosophy IT"
107023, Россия, г. Москва, ул. Измайловский Вал, 30 / 107023, Russia, Moscow, Izmailovsky Val, 30

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 01.03.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 11.03.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

MATHEMATICS EDUCATION

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)

Научная статья

УДК 378.016, 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

ЧТО ТАКОЕ ПОЛУКОЛЬЦО[1]

Евгений Михайлович Вечтомов
Вятский государственный университет, vecht@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются начала теории полуколец. Анализируется определение (аксиоматика) полукольца. Вводятся исходные понятия теории полуколец. Приведены базовые примеры. Указаны важнейшие классы полуколец. Сформулированы первые структурные теоремы о полукольцах. Изложение носит учебно-методический характер, включает замечания, пояснения и 25 упражнений.

Ключевые слова: алгебраическая структура, полукольцо, изучение теории полуколец

Для цитирования: Вечтомов Е. М. Что такое полукольцо // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 21–42. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Article

What is a semiring

Evgeny M. Vechtomov
Vyatka State University, vecht@mail.ru

Abstract. The article discusses the beginnings of the theory of semirings. The author analyzes the definition (axiomatics) of a semiring and introduces the initial concepts of the theory of semirings. The work provides basic examples, indicates the most important classes of semirings, and also formulates the first structure theorems about semirings. The presented material is educational and mathematical in nature, includes comments, explanations and 25 exercises.

Keywords: algebraic structure, semiring, study of the theory of semirings

For citation: Vechtomov E. M. What is a semiring. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 21–42. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_21

Введение

Теория полуколец — раздел современной абстрактной алгебры. Понятие полукольца обобщает и расширяет понятие кольца так же, как полугруппа есть естественное обобщение группы. Группы и кольца стали изучаться в XIX веке (Хенрик Абель, Эварист Галуа, Уильям Гамильтон, Артур Кэли, Рихард Дедекинд, Питер Силов, Фердинанд Фробениус, Феликс Клейн, Фёдор Молин), приобретя современное звучание к началу XX века. Становление теории полугрупп относится к 30-м годам XX века. Исследование полуколец началось в 50-е годы XX века. Особенно активно теория полуколец развивается последние 40–45 лет, что, в частности, связано с возникновением компьютерной алгебры. Полукольца находят применение в дискретной математике и в приложениях математики.

Статья представляет собой элементарное введение в теорию полуколец. Материал предназначен студентам естественно-математических направлений подготовки, начинающим интересоваться современной математикой, абстрактной алгеброй. В качестве введения в предмет рекомендуем наши публикации [1–3] Необходимые алгебраические сведения можно найти в книгах [4–6]. Для дальнейшего изучения полуколец можно обратиться к работам [7–13].

1. Исходные понятия

Понятие полукольца (semiring) является широким обобщением понятия ассоциативного кольца (ring), ставшего уже классическим.

Наглядно представление о полукольцах можно получить следующим образом. Рассматривая «положительную половину» $\mathbb{Z}^+$ кольца $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, получаем полукольцо $\mathbb{N}$ натуральных чисел; если добавим к нему число 0, то имеем полукольцо с нулём всех неотрицательных целых чисел. Ясно, что с обычными операциями сложения и умножения чисел полукольца $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$ не являются кольцами.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной бинарной операцией сложения $+$ и ассоциативной бинарной операцией умножения $\cdot$ на непустом множестве S, такая, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Тем самым полукольцо $\langle S, +, \cdot \rangle$ определяется пятью аксиомами-тождествами:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *ассоциативность сложения*;
2. $x + y = y + x$ — *коммутативность сложения*;
3. $(xy)z = x(yz)$ — *ассоциативность умножения*;
4. $x(y + z) = xy + xz$ — *левая дистрибутивность*;
5. $(x + y)z = xz + yz$ — *правая дистрибутивность*.

Далее, как правило, полукольцо $\langle S, +, \cdot \rangle$ будем обозначать просто S. Выполнение тождества, скажем, тождества 1 на S, означает, что $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых элементов $a, b, c \in S$. Пишем $xy = x \cdot y$. Множество $\{+, \cdot\}$ символов операций полуколец называется сигнатурой типа (2, 2), поскольку обе полукольцевые операции бинарные.

Полукольца суть часть ассоциативной алгебры. По сложению и умножению полукольца являются полугруппами. Напомним, что *группоидом* называется непустое множество с заданной на нём одной бинарной операцией; если эта операция ассоциативна, то группоид будет *полугруппой* (см. [14]).

Мультипликативно записанная полугруппа S называется *моноидом*, если она обладает *нейтральным элементом* e: $\forall s \in S\ (se = es = s)$; в моноидах такой элемент единственен. Моноид $\langle S, \cdot \rangle$ с нейтральным элементом $e := 1$ называется *группой*, если $\forall s \in S\ \exists t \in S\ (st = ts = 1)$; такой элемент t единственен для s, называется *обратным* к s и обозначается s^{-1}, при этом $s = t^{-1}$. В аддитивной записи моноида $\langle S, + \rangle$ нейтральный элемент обозначают 0 и элемент $t \in S$, для которого $s + t = t + s = 0$, называется *противоположным* к s и обозначается $-s$.

Сформулируем исходные полукольцевые понятия.

Элемент a полукольца S называется:

поглощающим по сложению (*поглощающим по умножению*), если

$$\forall s \in S\ s + a = a\ (sa = as = a);$$

единицей и обозначается $a = 1$, если он мультипликативно нейтральный;

нулём и обозначается $a = 0$, если он аддитивно нейтральный и мультипликативно поглощающий.

Полукольцо, в котором существует нуль, называют *полукольцом с нулём*. Аналогичным образом вводятся понятия *полукольца с единицей*, *полукольца с аддитивно* (*мультипликативно*) *поглощающим элементом*.

Полукольцо S называется:

коммутативным, если его мультипликативная полугруппа $\langle S, \cdot \rangle$ коммутативная;

аддитивно сократимым (*мультипликативно сократимым справа*), если оно удовлетворяет квазитождеству $x + z = y + z \Rightarrow x = y$ $(xz = yz \Rightarrow x = y)$;

аддитивно идемпотентным (*мультипликативно идемпотентным*), если в нём выполняется тождество $x + x = x$ $(xx = x)$;

идемпотентным, если оно одновременно аддитивно идемпотентно и мультипликативно идемпотентно;

кольцом, если его аддитивная полугруппа $\langle S, + \rangle$ есть (коммутативная) группа;

антикольцом, если S — полукольцо с нулём 0, удовлетворяющее квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$;

дистрибутивной решёткой, если оно коммутативно, мультипликативно идемпотентно и удовлетворяет закону поглощения $x + xy = x$;

полутелом, если его мультипликативная полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$ является группой;

полутелом с нулём 0, если $\langle S, +, \cdot\rangle$ является полутелом с присоединённым к S нулём 0;

полуполем (*полуполем с* 0), если S — коммутативное полутело (коммутативное полутело с 0).

Заметим, что аддитивная полугруппа $\langle S, +\rangle$ (мультипликативная полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$) полукольца $\langle S, +, \cdot\rangle$ называется также его *аддитивным редуктом* (*мультипликативным редуктом*).

Далее, полукольцо S с нулём 0 и единицей $1 \neq 0$ называется *полукольцом с делением*, если каждый его ненулевой элемент a обратим, т. е. для него существует обратный элемент $b \in S$: $ab = ba = 1$, такой элемент b единственен и обозначается a^{-1}. Кольцо с делением называется *телом*, а коммутативное тело — *полем*.

Непустое подмножество T полукольца S называется:

подполукольцом в S, если оно замкнуто относительно сложения и умножения в S, т. е. $\forall a, b \in S$ $(a, b \in T \Rightarrow a + b, ab \in T)$;

идеалом (*правым идеалом*), если оно является подполукольцом и $ST \subseteq T, TS \subseteq T$ $(TS \subseteq T)$.

Упражнение 1.1. Докажите, что произвольное полукольцо с делением является либо телом, либо полутелом с нулём.

Замечание 1.1. Наиболее общее определение понятия полукольца предложил Вандивер [15] в 1934 году. Он назвал алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot\rangle$ полукольцом, если в ней выполняются аксиомы 1 и 3–5, т. е. сложение не предполагается коммутативным. В кольце-модульном направлении развития теории полуколец [11] используется понимание полукольца в узком смысле — это полукольцо с нулём и, как правило, с единицей [13].

Мы видели, что класс всевозможных полуколец задаётся пятью тождествами в сигнатуре алгебраических структур типа (2, 2), т. е. образует многообразие алгебраических структур.

Упражнение 1.2. Покажите, что класс всех полутел является многообразием в сигнатуре (2, 2, 1, 0).

Упражнение 1.3. Почему класс всех полуколец с делением не является многообразием (ни в какой сигнатуре)?

Мы покажем, что аксиомы 1–5 логически независимы (друг от друга), т. е. ни одна из аксиом не выводится из остальных четырех аксиом полукольца. Для этого достаточно построить пять моделей (примеров) алгебраических структур $\langle S, +, \cdot \rangle$, в каждой из которых не выполняется ровно одна аксиома из пяти аксиом 1–5.

Модель 1.1. Укажем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot \rangle$ типа $(2, 2)$ с неассоциативной операцией $+$, удовлетворяющей тождествам 2–5. Пусть S — множество всех неотрицательных рациональных чисел с обычным умножением $\cdot$. Это коммутативная полугруппа с поглощающим элементом 0 и единицей 1. Чтобы отличить сложение в S от обычного сложения чисел, обозначим новое сложение как $\oplus$, полагая $a \oplus b = (a + b)/2$ для всех $a, b \in S$. В результате получаем неассоциативный коммутативный идемпотентный группоид $\langle S, \oplus \rangle$. Легко видеть, что алгебраическая структура $\langle S, \oplus, \cdot \rangle$ удовлетворяет аксиомам 2–5 и не удовлетворяет аксиоме 1.

Модель 1.2. На произвольном неодноэлементном множестве S зададим операции сложения и умножения тождествами $x + y = x$ и $x \cdot y = x$. Совпадающие операции $+$ и $\cdot$ ассоциативны, идемпотентны, но некоммутативны, и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Получаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot \rangle$ с тождествами 1 и 3–5, которая доказывает, что аксиома 2 не вытекает из других аксиом полукольца.

Модель 1.3. Рассмотрим множество S, содержащее не менее трех элементов, с заданным на нём константным сложением $x + y = u + v$. Положим $x + y = \theta \in S$. Выделим в S трехэлементное подмножество $T = \{a, b, \theta\}$. Определим на S операцию умножения $\cdot$ следующим образом: $x\theta = \theta x = \theta$ для всех $x \in S$, $sa = sb = as = bs = \theta$ при любых $s \in S \setminus \{a, b\}$, $aa = b, ab = a, ba = b, bb = a$. Множество T замкнуто относительно операций сложения и умножения. Алгебраическая структура $\langle T, +, \cdot \rangle$, а вместе с ней и $\langle S, +, \cdot \rangle$ удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5, но не удовлетворяет аксиоме 3 полукольца. Более того, умножение в S неассоциативно по степеням: $a^2a = (aa)a = ba = b \neq a = ab = a(aa) = aa^2$.

Модель 1.4. Пусть S есть множество всех отображений $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество всех неотрицательных целых чисел. Зададим на S операцию сложения поточечно: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

для любых отображений $f, g \in S$ и чисел $x \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\langle S, +\rangle$ будет коммутативной полугруппой с нейтральным элементом $\mathbf{0}$ — функцией-константой $\mathbb{N}_0 \to \{0\}$. В качестве умножения возьмем операцию композиции (суперпозиции, последовательного выполнения отображений): $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$ для всех $f, g \in S$ и $x \in \mathbb{N}_0$. Группоид $\langle S, \cdot\rangle$ является полугруппой с единицей — тождественным отображением $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Значит, для алгебраической структуры $\langle S, +, \cdot\rangle$ верны аксиомы 1–3. Рассмотрим произвольные отображения $f, g, h \in S$ и любое число $x \in \mathbb{N}_0$. Имеем

$$((f+g)h)(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) =$$
$$= f(h(x)) + g(h(x)) = (fh + gh)(x)),$$

т. е. в $\langle S, +, \cdot\rangle$ справедлива аксиома 5. Но в $\langle S, +, \cdot\rangle$ неверно тождество 4. Действительно, полагая $f(x) = x + 1$ для всех $x \in \mathbb{N}_0$, имеем

$$((f(g+h))(x) = f(g(x) + h(x)) = g(x) + h(x) + 1 \text{ и}$$
$$(fg + fh)(x) = (fg)(x) + (fh)(x) = f(g(x)) + f(h(x)) = g(x) + h(x) + 2.$$

Следовательно, аксиома 4 не является следствием аксиом 1–3 и 5. Заметим также, что элемент $\mathbf{0} \in S$ является левым, но не правым, мультипликативно поглощающим элементом алгебраической структуры S.

Модель 1.5. Если в модели 1.4 мы заменим операцию умножения симметричной операцией $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$ при $f, g \in S$ и $x \in \mathbb{N}_0$, то получим алгебраическую структуру, удовлетворяющую тождествам 1–4, но не удовлетворяющую 5.

На основании моделей 1–5 доказано следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Система аксиом* 1-5*, определяющая полукольца, независима.*

Упражнение 1.4. Найдите пять своих примеров конечных алгебраических структур — аналогов моделей 1–5.

Замечание 1.2. Добавим к аксиомам 1–5 аксиому коммутативности умножения. Полученная система аксиом, определяющая коммутативные полукольца, не будет независимой. В ней каждая из аксиом дистрибутивности 4 и 5 является следствием остальных пяти аксиом.

Замечание 1.3. Наряду с полукольцами существуют другие обобщения колец — почтикольца, квазикольца. Далёким обобщением колец служат кольцоиды. В последнее время стали изучаться неассоциативные полукольца, т. е. алгебраические структуры $\langle S, +, \cdot \rangle$, удовлетворяющие аксиомам 1, 2, 4, 5 и, возможно, 3 (см. модель 1.3).

Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ типа (2, 2) называется:

почтикольцом, если $\langle S, + \rangle$ — группа (вообще говоря, некоммутативная), $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа и выполняется закон правой дистрибутивности 5 (симметричным образом вводится понятие левого почтикольца);

квазикольцом, если $\langle S, + \rangle$ — квазигруппа и выполняются оба закона дистрибутивности 4 и 5. Квазигруппа определяется как группоид $\langle S, \cdot \rangle$, в котором $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа и однозначно разрешимы уравнения $ax = b$ $ya = b$ при любых $a, b \in S$. Сложение в квазикольцах не обязано быть ассоциативным и коммутативным.

Упражнение 1.5. Постройте пример почтикольца, не удовлетворяющего закону левой дистрибутивности 4.

Упражнение 1.6. Найдите пример квазикольца, не являющегося кольцом.

В абстрактной алгебре алгебраические структуры описываются с точностью до изоморфизма. Два полукольца $\langle S, +, \cdot \rangle$ и $\langle T, +, \cdot \rangle$ называются *изоморфными*, если между ними существует *изоморфизм*, т. е. взаимно однозначное отображение (биекция) $\alpha : S \to T$, сохраняющее полукольцевые операции: $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ и $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ для любых элементов $a, b \in S$. Нетрудно проверить, что обратная биекция $\alpha^{-1} : T \to S$ также сохраняет операции, т. е. будет изоморфизмом. Композиция $\alpha\beta$ изоморфизмов полуколец $\alpha : S \to T$ и $\beta : T \to U$ является изоморфизмом между полукольцами S и U. Тождественное отображение 1_S полукольца S на себя есть изоморфизм. Следовательно, отношение изоморфности на классе всех полуколец является отношением эквивалентности, разбивающем все полукольца на классы изоморфности — классы попарно изоморфных полуколец. Изоморфные полукольца имеют совершенно одинаковые алгебраические свойства, т. е. свойства, выражаемые в терминах операций сложения $+$ и умножения $\cdot$.

Упражнение 1.7. Докажите, что все сформулированные выше возможные свойства полуколец сохраняются при любом изоморфизме полуколец. В частности, полукольцо, изоморфное полукольцу с делением, является полукольцом с делением.

2. Примеры

Приведем базовые примеры полуколец.

Пример 2.1. *Числовые полукольца.* Берем произвольное подкольцо R поля $\mathbb{R}$ и «отрезаем от него» 0 и все отрицательные числа, входящие в R. Получаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot\rangle$, где $S = R^+ = \{r \in R : r > 0\}$, с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел. Кольцо R является кольцом разностей полукольца S. Полукольцо S с нулём 0 отличается от кольца R тем, что в S ненулевые элементы не имеют противоположных элементов, т. е. в S не выполняется операция вычитания. Если R — подполе поля $\mathbb{R}$, то R^+ будет полуполем. В частности $\mathbb{R}^+$ есть полуполе всех неотрицательных действительных чисел.

Пример 2.2. *Минимаксное полуполе.* Положим $S = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, +\rangle$ — это алгебраическая структура с операцией сложения $\vee$ (взятия максимума max) и операцией умножения $+$ (обычным сложением). На S рассматривается естественный линейный порядок с наименьшим элементом $-\infty$. Считается, что $-\infty$ есть поглощающий элемент по умножению. В результате получаем аддитивно идемпотентное полуполе S с нулём $-\infty$. Полуполе S изоморфно «двойственному» полуполю $\langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \wedge, +\rangle$. Поэтому полуполе S называется минимаксным. Заметим, что полуполе S изоморфно полуполю $\langle \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \vee, \cdot\rangle$ с нулём 0 всевозможных неотрицательных действительных чисел со сложением $\vee$ и обычным умножением $\cdot$. Отметим, что полуполе S служит основой так называемого идемпотентного (математического) анализа так же, как поле $\mathbb{R}$ есть фундамент классического математического анализа.

Пример 2.3. *Прямое произведение.* Прямое произведение полуколец S и T — это полукольцо $S \times T$ всех упорядоченных пар (s, t), где $s \in S, t \in T$, с покоординатными операциями сложения и умножения над парами. Аналогично определяется прямое произведение конечного числа полуколец. Пусть — в общем случае — дано семейство $(S_i)_{i\in I}$ полуколец S_i, индексированное («занумерованное») элементами (индексами) непустого индексного множества I. Элементами прямого произведения Π семейства $(S_i)_{i\in I}$ являются такие отображения $f : I \to \cup S_i$, что

$f(i) \in S_i$ для каждого индекса $i \in I$. Операции над элементами $f, g \in \Pi$ производятся покоординатно: $(f+g)(i) = f(i)+g(i)$ и $(f\cdot g)(i) = f(i)\cdot g(i)$ для всех $i \in I$. Поскольку в силу аксиомы выбора Π непусто, то получаем полукольцо $\langle \Pi, +, \cdot \rangle$. Легко видеть, что полукольцо Π коммутативно, с нулём, с единицей тогда и только тогда, когда все полукольца $S_i (i \in I)$ соответственно коммутативны, обладают нулём и единицей.

Пример 2.4. *Полукольца многочленов.* Пусть S — произвольное полукольцо. Выражение вида $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, где n — неотрицательное целое число, коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$, называется многочленом над S от одной переменной x. Множество всех таких многочленов образует полукольцо $S[x]$ с естественным образом определенными операциями сложения и умножения многочленов. Точнее, возьмём вместе с многочленом f многочлен $g = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$. Имеем $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_m + b_m)x^m$ при $m = n$. Если $m < n$, то добавляем ещё сумму $a_{m+1} + x^{m+1} + \cdots + a_nx^n$. Аналогично при $m > n$. Умножение задаётся обычной формулой:

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + (a_nb_m)x^{n+m}.$$

Если полукольцо S обладает нулём 0, то в многочленах некоторые слагаемые-одночлены могут отсутствовать, так как считается $0x^k = 0$, при этом S будет подполукольцом полукольца $S[x]$ с нулём 0. Если полукольцо S обладает единицей 1, то 1 будет единицей и полукольца $S[x]$, поскольку предполагается $1x^k = x^k$. Обычно полукольцо коэффициентов S наделяется 0 и 1.

Пример 2.5. *Полукольца степенных рядов.* Формальный степенной ряд над полукольцом S есть выражение $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ с коэффициентами $a_n \in S$. Степенные ряды складываются и умножаются аналогично многочленам из $S[x]$. Получается полукольцо степенных рядов $S[[x]]$ над полукольцом S от одной переменной x. В случае полукольца S с нулём имеем $S \subset S[x] \subset S[[x]]$.

Пример 2.6. *Полукольца матриц.* Пусть даны полукольцо S и натуральное число n. Обозначим через $M_n(S)$ множество всех квадратных матриц n-го порядка (т. е. размера $n \times n$) с элементами $a_{ij} \in S$. Матрицы складываются и умножаются обычным образом, как числовые матрицы. В результате получается полукольцо матриц $M_n(S)$. Если S — полукольцо с нулём 0, то полукольцо $M_n(S)$ также обладает нулём — матрицей O с нулевыми элементами. Если же S — полукольцо с нулём

0 и с единицей 1, то единицей полукольца $M_n(S)$ служит единичная матрица $E = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$ при $i = j$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Одним из основных направлений теории полуколец является исследование конечных полуколец.

Найдем, с точностью до изоморфизма, все двухэлементные полукольца. Всего существует 10 двухэлементных группоидов, из них 5 полугрупп, среди которых 3 коммутативные и 2 некоммутативные полугруппы: с левым умножением $x \cdot y = x$ и с правым умножением $x \cdot y = y$.

Упражнение 2.1. Докажите сформулированные в предыдущем абзаце утверждения. Для контроля см. [4, параграф 2.1].

Пусть $S = \{a, b\}$. Задавать полукольцевые операции на S можно исходя из трех аддитивных коммутативных полугрупп $\langle S, +\rangle$ или из пяти мультипликативных полугрупп $\langle S, \cdot\rangle$. Используем первый подход. Для этого на каждой из трех коммутативных полугрупп $\langle S, +\rangle$ определим полукольцевое умножение $\cdot$, т. е. операцию умножения $\cdot$ на S, дающую полукольцо $\langle S, +, \cdot\rangle$.

Возможны три случая.

1. $\langle\{a, b\}, +\rangle$ — группа. Тогда $\langle\{a, b\}, +, \cdot\rangle$ будет кольцом. Можно считать, что $a = 0$ — нулевой элемент. Поэтому умножение определяется значением bb:

1.1) $bb = 0$ — тогда S есть кольцо с нулевым умножением;

1.2) $bb = b$ — тогда S есть поле, изоморфное полю $\mathbb{Z}_2$ классов вычетов целых чисел по модулю 2.

2. $\langle\{a, b\}, +\rangle$ — цепь, $a < b$. При этом $x + y = \max\{x, y\}$. Полукольцевое умножение $\cdot$ в S определяется одним из следующих способов:

2.1) $xy = \min\{x, y\}$, и S — дистрибутивная решетка с нулем a и единицей b;

2.2) $xy = x + y$, и S — коммутативное идемпотентное монополукольцо;

2.3) $xy = a$, т. е. S — полукольцо с нулем и константным умножением;

2.4) $xy = b$, т. е. S — полукольцо с константным умножением и аддитивно поглощающим элементом;

2.5) $xy = x$, и S — полукольцо с левым умножением;

2.6) $xy = y$, и S — полукольцо с правым умножением.

3. $\langle\{a, b\}, +\rangle$ — полугруппа с константным сложением, скажем, $x + y = a$. Рассмотрим полукольцо $\langle S, +, \cdot\rangle$ с данным аддитивным ре-

дуктом. Легко видеть, что элемент a является мультипликативно поглощающим. Имеем:

3.1) $bb = a$, и полукольцо S также имеет константное умножение $xy = a$;

3.2) $bb = b$, и S — коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с единицей b и константным сложением.

В результате получается следующая

Теорема 2.1. *Существует ровно* 10 *двухэлементных полуколец — с точностью до изоморфизма.*

Упражнение 2.2. Построить двухэлементные полукольца исходя из пяти мультипликативных полугрупп.

3. Классы полуколец

Рассмотрим три важнейших класса полуколец — кольца, дистрибутивные решётки, полутела, играющих существенную роль в структурной теории полуколец, в прояснении строения абстрактных полуколец.

Кольца

Как уже отмечалось, кольцо — это полукольцо $\langle R, +, \cdot\rangle$, аддитивная полугруппа которого является (коммутативной) группой. Нейтральный элемент по сложению 0 будет нулём кольца. В кольцах R, наряду с основной операцией сложения $+$, вводится производная операция вычитания $-$, именно $a - b = a + (-b)$ для любых элементов $a, b \in R$.

Можно стандартным образом показать, что полукольцо S вкладывается в качестве полукольца в некоторое кольцо R тогда и только тогда, когда оно аддитивно сократимо; в качестве R можно взять кольцо разностей $S - S$ аддитивно сократимого полукольца S.

Упражнение 3.1. Проверьте, что в любом кольце R аддитивно нейтральный элемент 0 является нулём и $\forall a, b, c \in R$

$$a - a = 0, -(a - b) = b - a, (-a)b = a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab,$$
$$(a - b)c = ac - bc, a(b - c) = ab - ac.$$

Упражнение 3.2. Убедитесь, что всякое полукольцо, изоморфно вложимое в кольцо, аддитивно сократимо.

Дистрибутивные решетки

Дистрибутивная решётка стандартно определяется как алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ типа (2, 2), удовлетворяющая пяти парам взаимно дуальных аксиом:

(1) $(x + y) + z = x + (y + z), (xy)z = x(yz)$ (ассоциативность);

(2) $x + y = y + x, xy = yx$ (коммутативность);

(3) $x + x = x, xx = x$ (идемпотентность);

(4) $x(x + y) = x, x + xy = x$ (поглощение);

(5) $x(y + z) = xy + xz, x + yz = (x + y)(x + z)$ (дистрибутивность).

Заметим, что алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$, удовлетворяющая аксиомам (1)–(4), называется решёткой. Информацию о решётках, в частности о дистрибутивных решётках, можно найти в книгах [16; 17].

Упражнение 3.3. Покажите, что в решётках один из дистрибутивных законов влечёт другой.

Упражнение 3.4. Докажите эквивалентность (равносильность) двух данных выше определений дистрибутивной решётки (первое определение дано в пункте 1).

Полутела

Теории полутел посвящена большая статья [10].

Приведём примеры полутел.

Пример 3.1. *Полуполе нильмногочленов.* Возьмём кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ и натуральное число n. Выделим в $\mathbb{R}[x]$ множество

$$S = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n : a_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Полагаем $x^{n+1} = 0 \in \mathbb{R}, x^n \neq 0$. Тогда получаем полуполе S с обычными операциями сложения и умножения многочленов, которое назовём полуполем нильмногочленов индекса n.

Пример 3.2. *Полутело треугольных матриц.* Рассмотрим кольцо R всех верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ с действительными элементами a_{ij}, $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Подполукольцо в R, состоящее из верхнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами a_{ij}, будет полутелом.

Пример 3.3. Полуполе степенных рядов. Рассмотрим в кольце $\mathbb{R}[[x]]$ подполукольцо S всех степенных рядов с положительным свободным членом. Как легко видеть, S является полуполем.

Пример 3.4. Мультипликативно циклическое полуполе. Рассмотрим числовое полуполе $S = (2) = (1/2) = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$ с операцией сложения max и обычным умножением. Числа 2 и 1/2 служат образующими мультипликативной циклической группы $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$. Полуполе S изоморфно как полуполю $\bigl\langle\{2^k : k \in Z\}, \min, \cdot\bigr\rangle$, так и полуполям $\langle\mathbb{Z}, \max, +\rangle$ и $\langle\mathbb{Z}, \min, +\rangle$.

Упражнение 3.5. Покажите, что всякое конечное полутело одноэлементное $\{1\}$.

Упражнение 3.6. Докажите, что каждый неединичный элемент произвольного полутела имеет бесконечный мультипликативный порядок.

4. Первые структурные теоремы

Наряду с понятием изоморфизма полуколец существует более общее фундаментальное понятие гомоморфизма. Произвольное отображение $S \to T$ полукольца S в полукольцо T, сохраняющее полукольцевые операции, называется их *гомоморфизмом.* Взаимно однозначные гомоморфизмы — это изоморфизмы. Инъективный (сюръективный) гомоморфизм полуколец называется *мономорфизмом* (*эпиморфизмом*). Значит, изоморфизм = мономорфизм + эпиморфизм. Если $S \to T$ — эпиморфизм полуколец, то полукольцо T называется *гомоморфным образом* полукольца S.

Упражнение 4.1. Какие из возможных свойств полуколец, указанных в пункте 1, сохраняются при эпиморфизмах? При гомоморфизмах? Докажите, в частности, что образ полутела при любом гомоморфизме будет полутелом.

Замечание 4.1. Из классической общеалгебраической теоремы Биркгофа следует [18, пункт 13.1], что непустой класс K полуколец образует многообразие тогда и только тогда, когда K замкнут относительно взятия произвольных прямых произведений, подполуколец и гомоморфных образов.

Возьмём произвольный гомоморфизм $\alpha : S \to T$ полукольца S в полукольцо T. Рассмотрим на S бинарное отношение $\rho(\alpha)$ равнообразности отображения α:

$$a\rho(\alpha)b \Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b)\,(\forall a, b \in S).$$

Очевидно, $\rho(\alpha)$ есть отношение эквивалентности на полукольце S, причём оно согласовано с полукольцевыми операциями на S: $\forall a, b, c, d \in S$

$$a\rho(\alpha)b \,\&\, c\rho(\alpha)d \Rightarrow (a+c)\rho(\alpha)(b+d) \,\&\, (ac)\rho(\alpha)(bd).$$

Такое отношение эквивалентности $\rho(\alpha)$ на S будет конгруэнцией на полукольце S. Именно отношение эквивалентности ρ на полукольце S называется *конгруэнцией* на S, если для любых $a, b, c, d \in S$

$$a\rho b \,\&\, c\rho d \Rightarrow (a+c)\rho(b+d) \,\&\, (ac)\rho(bd).$$

Упражнение 4.2. Докажите, что в определении конгруэнции достаточно считать $c = d$.

Понятие конгруэнции позволяет корректно определить операции сложения и умножения на фактор-множестве $S/\rho = \{a/\rho : a \in S\}$ всех классов $a/\rho = \{s \in S : s\rho a\}$ эквивалентности ρ:

$$a/\rho + b/\rho = (a+b)/\rho \text{ и } a/\rho \cdot b/\rho = (ab)/\rho \text{ для любых } a, b \in S.$$

Непосредственно проверяется, что полученная алгебраическая структура $\langle S/\rho, +, \cdot\rangle$ будет полукольцом, называемым *фактор-полукольцом* полукольца S по конгруэнции ρ. Отображение π: $S \to S/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ для всех $a \in S$, является эпиморфизмом, называемым *каноническим эпиморфизмом* полукольца S на своё фактор-полукольцо S/ρ.

Замечание 4.2. Часто класс a/ρ элемента a по конгруэнции ρ полукольца S обозначается как $[a]_\rho$.

Теорема 4.1 (*об эпиморфизме*)**.** *Для всякого эпиморфизма $\alpha : S \to T$ существует единственный изоморфизм $\beta : S/\rho \to T$, для которого $\alpha = \pi\beta$.*

Часто эта теорема формулируется в несколько более общем случае как

Теорема 4.2 (*о гомоморфизме*)**.** *Для всякого гомоморфизма $\alpha : S \to T$ существуют однозначно определённые изоморфизм $\beta : S/\rho \to \operatorname{Im}\alpha$ и мономорфизм $\gamma : \operatorname{Im}\alpha \to T$, для которых $\alpha = \pi\beta\gamma$.*

Здесь $\mathrm{Im}\,\alpha = \{t \in T : \exists s \in S\; t = \alpha(s)\}$ — образ отображения α и γ — тождественное вложение $\mathrm{Im}\,\alpha$ в T ($\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq T$).

Упражнение 4.3. Проверьте, что образ любого гомоморфизма $S \to T$ полуколец является подполукольцом в T.

Упражнение 4.4. Постарайтесь доказать теорему об эпиморфизме.

Упражнение 4.5. Выведите теорему 4.2 из теоремы 4.1.

Далее рассмотрим (непустое) семейство $(\rho_i)_{i\in I}$ конгруэнций на произвольном полукольце S. Пусть ρ — пересечение всех конгруэнций ρ_i ($i \in I$). Имеем фактор-полукольца S/ρ и S/ρ_i по всем индексам $i \in I$, прямое произведение $\Pi S/\rho_i$ и следующее отображение:

$$\alpha : S/\rho \to \Pi S/\rho_i, \alpha(a/\rho)(i) = a/\rho_i \text{ для любого } a \in S \text{ и всех } i \in I.$$

Нетрудно проверить, что отображение α инъективно и является гомоморфизмом указанных полуколец. Особо важен случай, когда $\rho = \cap\rho_i = \mathbf{0}$ есть нулевая конгруэнция на полукольце S, т. е. будет отношением равенства на S; при этом $S/\mathbf{0} = S$.

Теорема 4.3 (*о подпрямом разложении*)**.** *Для любого семейства $(\rho_i)_{i\in I}$ конгруэнций на полукольце S отображение $\alpha : S/\cap\rho_i \to \Pi S/\rho_i$ является мономорфизмом, т. е. изоморфным вложением фактор-полукольца $S/\cap\rho_i$ в прямое произведение $\Pi S/\rho_i$ фактор-полуколец S/ρ_i. Если $\cap\rho_i = \mathbf{0}$, то α — изоморфное вложение самого полукольца S в прямое произведение $\Pi S/\rho_i$ фактор-полуколец S/ρ_i.*

Пример 4.1. Убедитесь, что кольцо $\mathbb{Z}_{30}$ классов вычетов целых чисел по модулю 30 разлагается в прямое произведение полей $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5$: $\mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Пример 4.2. Постройте дистрибутивную решётку S, изоморфную прямому произведению двухэлементной цепи C_2 и трёхэлементной цепи C_3. Найдите на полукольце S конгруэнции ρ и σ, такие, что $\rho \cap \sigma = 0$, $S/\rho \cong C_2$ и $S/\sigma \cong C_3$.

Упражнение 4.6. Подробно докажите теорему 4.3.

Пусть дано произвольное полукольцо S с нулём 0. Обозначим через $r(S)$ множество всех элементов в S, имеющих противоположный элемент:

$$r(S) = \{a \in S : \exists b \in S\; a + b = 0\}.$$

Легко видеть, что $r(S)$ есть идеал полукольца S, причём строгий идеал, т. е. $a+b \in r(S)$, влечёт $a, b \in r(S)$ для любых $a, b \in S$. Напомним, что непустое подмножество J полукольца S называется его *идеалом*, если $J+J \subseteq J, SJ \subseteq J$ и $JS \subseteq J$.

Упражнение 4.7. Проверьте, что $r(S)$ — строгий идеал полукольца S с 0, являющийся кольцом.

Зададим на полукольце S с 0 конгруэнцию Бёрна $\equiv$ по идеалу $r(S)$:

$$s \equiv t \Leftrightarrow \exists a, b \in r(S)\, s+a=t+b\, (\forall s, t \in S).$$

Легко проверить, что класс нуля $0/\equiv$ конгруэнции $\equiv$ совпадает с $r(S)$.

Упражнение 4.8. Докажите, что отношение $\equiv$ является конгруэнцией на полукольце S, причём $0/\equiv = r(S)$.

Покажем, что фактор-полукольцо $S/\equiv$ является антикольцом. Сначала заметим, что $0/\equiv$ будет нулём фактор-полукольца $S/\equiv$. Предположим, что $s/\equiv + t/\equiv = 0/\equiv$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $(s+t)/\equiv = 0/\equiv$, т. е. $(s+t) \equiv 0$, откуда $(s+t)+a=0+b=b$ для некоторых элементов $a, b \in r(S)$. Поскольку идеал $r(S)$ строгий, то $s, t \in r(S)$, значит, $s/\equiv = t/\equiv = 0/\equiv$.

Скажем, что полукольцо S с нулём 0 является 0-*расширением* полукольца A при помощи полукольца B, когда на полукольце S существует такая конгруэнция ρ, что полукольцо $0/\rho$ изоморфно A и фактор-полукольцо S/ρ изоморфно B.

Тем самым доказана следующая структурная теорема о полукольцах.

Теорема 4.4 (*о расширении*)**.** *Любое полукольцо S с нулём является 0-расширением кольца при помощи антикольца.*

Упражнение 4.9. Докажите, что кольцо в теореме 4.4 определено однозначно с точностью до изоморфизма, именно оно изоморфно $r(S)$.

Теорема 4.5. *Пусть S — произвольное полукольцо с нулём 0 и кольцо $r(S)$ обладает единицей e. Тогда S разлагается в прямую сумму своих идеалов $eS = r(S)$ и J, где eS — кольцо, а J является антикольцом, причём такое разложение единственно.*

Разложение полукольца S в *прямую сумму идеалов* I и J из S, в записи $S = I \oplus J$, означает, что каждый элемент $s \in S$ представим в виде суммы $s = a+b$ однозначно определённых элементов $a \in I$ и $b \in J$. Если полукольцо S имеет нуль 0, то $I \cap J = \{0\}$.

Разберём доказательство этой теоремы.

По условию элемент e служит единицей кольца $r(S)$. Мы уже знаем, что $r(S)$ является идеалом в S. Поэтому $eS \cup Se \subseteq r(S) \subseteq eS \cap Se$. Следовательно, $r(S) = eS = Se$. Заметим также, что $es = ese = se$ для всех $s \in S$.

Единица e кольца $r(S)$ имеет противоположный элемент $-e \in r(S)$. Значит, можно определить множество $J = \{s + (-e)s : s \in S\}$. Легко видеть, что J — идеал полукольца S.

Покажем, что $S = eS \oplus J$. Для любого элемента $s \in S$ имеем $s = es + (s + (-e)s)$. Допустим также, что $s = er + (t + (-e)t)$ для некоторых $r, t \in S$. Умножая оба равенства на e слева, получаем $es = er$. Прибавляя к обеим частям равенств элемент $-es = -er$, имеем $s + (-e)s = t + (-e)t$.

Проверим, что J — антикольцо. Предположим, что $(s + (-e)s)+$ $+(t + (-e)t) = 0$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $s \in r(S)$ и $s = es$. Значит, $s + (-e)s = es + (-e)s = 0s = 0$.

Далее, пусть $S = I \oplus K$ для таких идеалов I и K полукольца S, что I — кольцо и K — антикольцо. Элемент $0 = 0+0$ полукольца S служит нулём полуколец I и K. Поэтому $I \subseteq r(S)$. Проверим обратное включение $r(S) \subseteq I$. Для этого достаточно показать, что $e \in I$. Раскладываем $e = a + b$, где $a \in I$ и $b \in K$. Имеем $e = a + eb$, причём $eb \in K$. Откуда $b = eb$ и $b + (-e)b = 0$ в антикольце K. Значит, $b = 0$ и $e = a \in I$. Получили равенство $I = r(S)$.

Докажем равенство $K = J$. Имеем включение $K \subseteq J$: если $s \in K$, то $s = es+s+(-e)s = s+(-e)s \in J$, поскольку $es \in I \cap K = \{0\}$. Включение $J \subseteq K$ вытекает из равенства $r(S) \oplus K = r(S) \oplus J$ и включения $K \subseteq J$. Действительно, каждый элемент $s \in J$ имеет разложения $s = 0 + s$ и $s = r + t$, $r \in r(S)$ и $t \in K$. Следовательно, $r = 0$ и $s = t$. Откуда $J \subseteq K$. Стало быть, $K = J$.

Теорема 4.5 доказана.

Упражнение 4.10. Установите взаимосвязи между прямой суммой $S = I \oplus J$ идеалов I и J полукольца S и прямым произведением $I \times J$ полуколец I и J.

Список источников

1. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000. 44 с.

2. **Вечтомов Е. М.** Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре // *Математический вестник Вятского государственного университета.* 2021. № 3. С. 36–45.

3. **Вечтомов Е. М.** Изучение основ теории полуколец. Простые идеалы // *Математический вестник Вятского государственного университета.* 2021. № 4. С. 4–14.

4. **Вечтомов Е. М.** Математика: основные математические структуры : учебное пособие. 2-е изд. М.: Юрайт, 2018. 296 с.

5. **Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.** Абстрактная алгебра. Базовый курс : учебное пособие. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2014. 260 с.

6. **Сидоров В. В.** Алгебра: алгебраические структуры, комплексные числа, многочлены : учебное пособие. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2013. 232 с.

7. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2016. Т. 1. 384 с.

8. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е.Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец : монография. Киров: ООО «Издательство “Радуга-ПРЕСС”», 2012. 228 с.

9. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением : учебное пособие. СПб.: Лань, 2022. 180 с.

10. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Полутела и их свойства // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2008. Т. 14. Вып. 5. С. 3–54.

11. **Вечтомов Е. М., Чермных В. В.** Основные направления развития теории полуколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. № 4. С. 4–40.

12. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 111–227.

13. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

14. **Вечтомов Е. М.** Знакомимся с абстрактной алгеброй: полугруппы // *Научно-методический электронный журнал «Концепт».* 2014. № 12. С. 11–15. URL: https://e-koncept.ru/2014/14335.htm (дата обращения: 20.01.2024).

15. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold // *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1934. Vol. 40. No 12. Pp. 914–920.

16. **Вечтомов Е. М., Широков Д. В.** Упорядоченные множества и решетки : учебное пособие. СПб.: Лань, 2024. 248 с.

17. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

18. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

References

1. **Vechtomov E. M.** *Vvedeniye v polukol'tsa* [Introduction to Semirings]. Kirov: Izd-vo vyatsk. gos. ped. un-ta, 2000. 44 p. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M.** Student educational and research seminar on algebra. *Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Bulletin of Vyatka State University]. 2021. No 3. Pp. 36–45. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M.** Studying the basics of the theory of semirings. Prime Ideals. *Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Bulletin of Vyatka State University]. 2021. No 4. Pp. 4–14. (In Russ.)

4. **Vechtomov E. M.** *Matematika: osnovnyye matematicheskiye struktury: uchebnoye posobiye. 2-e izd.* [Mathematics: basic mathematical structures: study guide. 2nd ed.]. Moscow: Urait. 2018. 296 p. (In Russ.)

5. **Vechtomov E. M., Sidorov V. V.** *Abstraktnaya algebra. Bazovyy kurs : uchebnoye posobiye* [Abstract algebra. Basic course : study guide]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2014. 260 p. (In Russ.)

6. **Sidorov V. V.** *Algebra: algebraicheskiye struktury. kompleksnyye chisla. mnogochleny : uchebnoye posobiye* [Algebra: algebraic structures, complex numbers, polynomials : study guide]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2013. 232 p. (In Russ.)

7. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V.** *Elementy funktsionalnoy algebry: monografiya: v 2 t.* [Elements of functional algebra: monograph: in 2 vol.]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2016. Vol. 1. 384 p. (In Russ.)

8. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnykh V. V.** *Elementy teorii polukolets: monografiya* [Elements of the theory of semirings: monograph]. Kirov: OOO «Izdatelstvo "Raduga-PRESS"», 2012. 228 p. (In Russ.)

9. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Funktsionalnaya algebra i polukoltsa. Polukoltsa s idempotentnym umnozheniyem : uchebnoye posobiye* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan', 2022. 180 p. (In Russ.)

10. **Vechtomov E. M., Cheraneva A. V.** Semifields and their properties. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 2008. Vol. 14. No 5. Pp. 3–54. (In Russ.)

11. **Vechtomov E. M., Chermnykh V. V.** Main directions of development of the theory of semirings. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2021. No 4. Pp. 4–40. (In Russ.)

12. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 2012. Vol. 17. No 3. Pp. 111–227. (In Russ.)

13. **Golan J. S.** *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

14. **Vechtomov E. M.** We are introduced to abstract algebra: semigroups. *Nauchno-metodicheskiy elektronniy zhurnal «Kontsept»* [Scientific and methodological electronic journal «Concept»]. 2014. No 12. Pp. 61–65. Available: https://e-koncept.ru/2014/14335.htm (accessed: 20.01.2024). (In Russ.)

15. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1934. Vol. 40. No 12. Pp. 914–920.

16. **Vechtomov E. M., Shirokov D. V.** *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki : uchebnoye posobiye* [Ordered sets and lattices : study guide]. Sankt-Peterburg: Lan', 2024. 248 p. (In Russ.)

17. **Grätzer G.** *Obshchaya teoriya reshetok* [General Lattice Theory]. Moscow: Mir, 1982. 456 p. (In Russ.)

18. **Mal'tsev A. I.** *Algebraicheskiye sistemy* [Algebraic systems]. Moscow: Nauka, 1970. 392 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Евгений Михайлович Вечтомов / Evgeny M. Vechtomov
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Россия, Киров, ул. Московская, д. 36 / 610000, Russia, Kirov, Moskovskaya St., 36

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 04.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.02.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)

Научная статья

УДК 378
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

ОБ ОДНОЙ ИЗ АКСИОМАТИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Елена Николаевна Шустова
Сыктывкарский государственный
университет имени Питирима Сорокина, shustovaen@yandex.ru

Аннотация. В статье представлены основные теоретические положения методики обучения в вузе будущих учителей математики определению тригонометрических функций с помощью одной из аксиоматик. Приведена последовательность исследования свойств функций и аксиом предложенной системы, а также краткая характеристика результатов применения описанного подхода в процессе обучения студентов педагогических направлений подготовки вуза.

Ключевые слова: аксиоматический метод, тригонометрические функции, обучение в вузе будущих учителей математики

Для цитирования: Шустова Е. Н. Об одной из аксиоматик для определения тригонометрических функций при обучении будущих учителей математики // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 43–54. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

Article

About one of the axiomatics for determining trigonometric functions when training future mathematics teachers

Elena N. Shustova
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, shustovaen@yandex.ru

Abstract. The article outlines the main theoretical principles of the methodology for teaching future mathematics teachers at a university the definition of trigonometric functions using one of the axiomatics. The sequence of studying the properties of functions and axioms of the proposed system is given, as well as a brief description of the results of applying the described approach in the process of training students in pedagogical areas of university training.

Keywords: axiomatic method, trigonometric functions, university training for future mathematics teachers

For citation: Shustova E. N. About one of the axiomatics for determining trigonometric functions when training future mathematics teachers. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 43–54. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

Введение

Математика — достаточно формализованная наука, изучающая количественные и пространственные характеристики предметов и явлений окружающего мира посредством абстрагирования и обобщения. Поэтому одним из значимых методов построения математических теорий можно считать аксиоматизацию – способ, при котором «некоторая совокупность утверждений указанной области науки принимается без доказательства, а остальные её закономерности и положения выводятся из исходных посредством определённых логических законов» [1].

По мнению современных исследователей в области педагогики, аксиоматический подход при обучении будет эффективнее не на этапе усвоения новых теорий, а на этапе повторения и закрепления. В этом случае применение аксиоматических методов способствует систематизации знаний учащихся, выявлению логической структуры математической теории, выделению наиболее значимого содержания, устранению противоречий [2].

Следует отметить, что при обучении в вузе студентов педагогических направлений подготовки (профиль «Математика») использование аксиоматических методов изложения некоторых разделов математики также служит эвристическим средством познания [3], что развивает исследовательские навыки будущих педагогов, и, несомненно, способствует эффективному формированию методической компетентности учителей математики.

1. Материалы и методы

В процессе исследования использованы методы анализа, систематизации и обобщения результатов ученых по теме работы. На основе предложенной авторами аксиоматики разработана методика обучения будущих учителей математики аксиоматическому подходу к определению тригонометрических функций. В ходе опытно-экспериментальной работы вышеуказанная методика внедрена в учебный процесс вуза, проведён анализ результатов исследований статистическими методами, который позволил сделать вывод об эффективности предложенного подхода для формирования компонентов методической компетентности обучающихся, повышения уровня их предметных знаний и умений.

2. Результаты

2.1. Обзор некоторых аксиоматик для введения тригонометрических функций

Аксиоматический метод изложения математических теорий, кроме вышеуказанных положительных аспектов, тем не менее имеет некоторые ограничения, связанные, во-первых, с нестрогостью введения исходных понятий, во-вторых, с высоким уровнем формализации и, в-третьих, со сложностью выявления взаимосвязей вводимых понятий с явлениями и процессами окружающей действительности. В частности, многие исследователи предлагают для определения основных элементарных функций использовать довольно сложные аксиоматики, требующие от обучающихся прочных знаний в области математического анализа, теории чисел и теории групп. Подобные методы иногда непросто воспринимаются обучающимися педагогических направлений подготовки вуза, так как они зачастую не считают их полезными для будущей профессиональной деятельности.

Рассмотрим некоторые из предлагаемых подходов:

– В. А. Любецкий определяет базовые элементарные функции как непрерывный гомоморфизм f из группы X в группу Y. В частности, *ко-*

синус и *синус* он определяет равенствами $\cos x \rightleftarrows P_1(e_{2\pi}(x)) = P_1(e^{ix})$, $\sin x \rightleftarrows P_2(e_{2\pi}(x)) = P_2(e^{ix})$, где $P_{1,2} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_1(x+iy) = x$, $P_2(x+iy) = y$ [4];

– Л. М. Лихтарников для введения элементарных функций рассматривает функциональные уравнения, решения которых должны удовлетворять определённым условиям. Так, *тригонометрическим косинусом* $f(x) = \cos x$ называется решение уравнения $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ при условиях: 1) $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$; 2) $\exists C > 0$ такое, что $f(\frac{C}{2}) = 0$ и $f(x) \neq 0$, если $0 < x < \frac{C}{2}$; 3) $f(0) > 0$. Функция $\varphi(x) = \cos(\frac{C}{2} - x)$ называется *тригонометрическим синусом* и обозначается $\varphi(x) = \sin x$ [5];

– в работах В. А. Ильина и других авторов также используются функциональные уравнения и для определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с действительными значениями аргумента предлагается система

$$\begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1 \\ f(x_1 + x_2) = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1) \\ g(x_1 + x_2) = g(x_1)g(x_2) - f(x_1)f(x_2) \end{cases}$$

с дополнительными условиями: 1) $f(0) = 0$; 2) $g(0) = 1$; 3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; 4) $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; 5) если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < f(x) < x$ [6];

– А. И. Коробейников, ученик 11-го класса Академической гимназии г. Сыктывкара, совместно с научным руководителем В. А. Поповым предложили заменить условие непрерывности функции $f(x)$ на требование существования предела в точке $\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, получена аксиоматика:

1) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) \neq 0, \forall x \in [0; \pi/2)$; 3) $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = 0$ [7].

2.2. Аксиоматика В. Н. Алексюка

В нашем исследовании мы также руководствовались идеей упрощения исходных аксиом и совместно с В. Н. Алексюком для определения синуса и косинуса предложили следующую аксиоматику [8]:

$$\begin{cases} C^2(x) + S^2(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{R}; \quad \text{(I)} \\ S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), & \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad \text{(II)} \\ C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), & \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad \text{(III)} \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{S(x)}{x} = 1. & \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

Указанная система, а также аксиоматика для определения экспоненциальной функции [8–10], послужили основой для разработки методики обучения будущих учителей математики, которая в дальнейшем, совместно с Н. И. Поповым, была модернизирована и эффективно внедрена в учебный процесс Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (СГУ) [3; 11; 12].

Эффективной в методическом плане является следующая последовательность этапов аксиоматического определения элементарных функций:

1) предлагается совокупность аксиом, которым должна удовлетворять вводимая функция;

2) основные свойства функции выводятся из исходной аксиоматики;

3) посредством построения модели доказывается существование, а также единственность определяемой функции.

2.3. Исследование свойств аксиоматически определённых тригонометрических функций

Для изучения свойств предполагается, что решение вышеприведённой системы аксиом существует. Большинство свойств получить нетрудно, поэтому продемонстрируем доказательства лишь нескольких, более подробно исследование изложено в [8; 13].

Свойство 1. $S(x)$ и $C(x)$ ограничены.

Свойство 2. $D(C) = \mathbb{R}, D(S) = \mathbb{R}$.

Свойство 3. $C(0) = 1, S(0) = 0$.

Для доказательства данного свойства подставляем значения $x = 0$, $y = 0$ в (I), (II), (III):

$$\begin{cases} C^2(0) + S^2(0) = 1, \\ S(0) = 2S(0)C(0), \\ C(0) = C^2(0) - S^2(0). \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $S(0) = 0$ или $C(0) = 0.5$. Однако значение $C(0) = 0.5$, поставленное в третье уравнение, даёт неверное равенство $S^2(0) = -0.25$, следовательно, $S(0) = 0$.

Таким образом,

$$\begin{cases} C^2(0) = 1, \\ C(0) = C^2(0) \end{cases}$$

$\Rightarrow C(0) = 1$.

Свойство 4. $C(x)$ — чётная функция, $S(x)$ — нечётная.

Свойство 5. $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Свойство 6. $C(x)$ и $S(x)$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$, причем $S'(x) = C(x)$, $C'(x) = -S(x)$.

Свойство 7. Для функции $C(x)$ существует положительный нуль.

Доказательство проведём от противного, допустим, $\forall x > 0\ C(x) \neq 0$. Так как $C(0) = 1 > 0$, то $C(x) > 0, \forall x > 0$ (теорема о нуле непрерывной функции). Исходя из того, что $S(0) = 0$ и $\forall x > 0\ S'(x) = C(x) > 0$, получаем строгое возрастание функции $S(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$, а также свойство $S(x) > 0, \forall x > 0$. Так как $S(x)$ ограничена, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \alpha > 0$, а также $\lim\limits_{x\to+\infty} S(2x) = \alpha > 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(2x)}{S(x)} = 1$. Из аксиомы (II) тогда имеем $S(2x) = 2S(x)C(x) \Rightarrow C(x) = \dfrac{S(2x)}{2S(x)} \to 0.5$ при $x \to +\infty$.

Аналогично, $C'(x) = -S(x) < 0, \forall x > 0$, значит, $C(x)$ строго убывает на $[0; +\infty)$. С учётом равенства $C(0) = 1$ на промежутке $[0; +\infty)$ выполняется $0.5 < C(x) \leqslant 1$. Значит, $\exists x_0 > 0$ такое, что $C(x_0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (теорема о промежуточных значениях непрерывной функции). Далее, из аксиомы (I) получаем $S^2(x_0) = 1 - C^2(x_0) = 0.5 \Rightarrow C(2x_0) = C^2(x_0) - S^2(x_0) = 0$, т. е. нашёлся положительный нуль функции $C(x)$, равный $2x_0$. Полученное противоречие свидетельствует о неверности начального предположения об отсуствии положительного нуля.

Из свойства 7 непосредственно следует, что существует наименьший положительный нуль функции $C(x)$, который можно обозначить символом $\boldsymbol{\lambda}$ и показать, что $\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\pi}{2}$ [13].

Свойство 8. $C(x)$ — строго убывающая, а $S(x)$ — строго возрастающая на промежутке $[0; \boldsymbol{\lambda}]$ функция.

Свойство 9. На интервале $(0;\boldsymbol{\lambda})$ $C(x)$ выпукла, а $S(x)$ — вогнута.

Свойство 10. $C(x)$ и $S(x)$ — периодические функции, причём период обеих равен $4\boldsymbol{\lambda}$.

Свойство 11. $E(C) = E(S) = [-1;1]$.

Свойство 12. $|S(x)| \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

Используя доказанные свойства, можно оценить и некоторые значения функций, в частности, $S\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = C\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $C\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{1}{2}$, $S\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно, что полученные свойства функций $C(x)$ и $S(x)$ совпадают с тригонометрическими функциями $y = \cos x$ и $y = \sin x$, определяемыми как координаты точек единичной окружности. Основываясь на свойствах и оценке некоторых значений, можно построить графики $C(x)$ и $S(x)$.

2.4. Доказательство существования и единственности аксиоматически определённых тригонометрических функций

Для доказательства существования введённых с помощью аксиоматики функций достаточно полученного ранее совпадения с известными тригонометрическими функциями.

Доказательство единственности можно провести следующим образом. Из аксиом (I) и (III) легко получить формулы половинного угла и для $x \in [0;\boldsymbol{\lambda}]$, $n \in \mathbb{N}$ получить следующие соотношения:

$$C\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sqrt{\frac{1 + C(x)}{2}}, \quad C\Big(\frac{x}{4}\Big) = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + C\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)}, \ ...,$$

$$C\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + C\Big(\frac{x}{2^{n-1}}\Big)\Big)}; \quad S\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 - C\Big(\frac{x}{2^{n-1}}\Big)\Big)}.$$

Таким образом, если выбрать $x = \boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\pi}{2}$, то исходной системой аксиом однозначно определены значения функций $C(x)$ и $S(x)$ в точках $x_n = \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{2^n} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Следовательно, во всех точках множества $M = \{x \in [0;\boldsymbol{\lambda}] |\, x = k2^{-l}; k, l \in \mathbb{N}\}$ значения функций $C(x)$ и $S(x)$ также определены однозначно. Очевидно, что $\forall x \in [0;\boldsymbol{\lambda}]$ можно построить сходящуюся к x последовательность $\{r_n\}$, где числа $r_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$. Вследствие непрерывности $C(x)$ и $S(x)$ значения указанных функций определены на промежутке $[0; \boldsymbol{\lambda}]$ единственным образом. Рассуждая аналогично, можно и любое число $x > 0$ записать в виде $x = n\boldsymbol{\lambda} + b; n \in \mathbb{N}, b \in [0; \boldsymbol{\lambda}]$ и показать, что значения $C(x)$ и $S(x)$ определены однозначно для всех положительных чисел. Остаётся лишь доказать утверждение для отрицательных чисел на основе чётности $C(x)$ и нечётности $S(x)$ [8].

В качестве замечания можно отметить, что доказательство существования и единственности функций () и $S()$ можно провести с помощью теории степенных рядов, рассматривая сходящиеся на $\mathbb{R}$ ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2.5. Опытно-экспериментальная работа по внедрению в учебный процесс вуза методики обучения будущих учителей математики аксиоматическому методу определения элементарных функций

Аксиоматика для введения тригонометрических функций, рассмотренная в данной статье, является значимой составляющей методики обучения будущих учителей математики, используемой на протяжении долгих лет в СГУ. Результаты внедрения указанной методики анализировались с точки зрения оценки уровня сформированности основных компонентов методической компетентности будущих педагогов. Для диагностики применялись различные методы исследования (тесты, контрольные и самостоятельные работы, анкеты, опросы и беседы). Анализ полученных результатов, проведённый с применением статистических методов, показал, что использование методики обучения в вузе будущих учителей математики аксиоматическому подходу к определению элементарных функций позволяет эффективно повышать уровень предметных знаний обучающихся и формировать методическую компетентность будущего учителя математики [3; 11; 12].

3. Обсуждение

В настоящее время в Российской Федерации повышенное внимание уделяется качеству обучения, особенно в области математической и информационной подготовки обучающихся. Очевидно, что профессиональная педагогическая деятельность учителя математики будет более эффективной, если он обладает фундаментальными предметными и методическими знаниями и умениями. Поэтому обучение в вузе студентов педагогических направлений подготовки необходимо осуществлять на основе использования строгих научных подходов к изложению математических теорий, включая, несомненно, и метод аксиоматизации. Опыт внедрения в образовательный процесс вуза предложенной авторами методики подтвердил её эффективность для формирования у обучающихся необходимого для будущей профессиональной деятельности уровня методической компетентности.

Список источников

1. **Садовский В. Н.** Аксиоматический метод построения научного знания // *Философские вопросы современной формальной логики.* М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962. С. 215–262.

2. **Масалова С. И.** Роль аксиоматизации в процессе построения математической теории // *Вестник ДГТУ.* 2007. № 3. С. 71–77. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/rol-aksiomatizatsii-v-protsesse-postroeniya-matematicheskoy-teorii (дата обращения: 08.02.2024).

3. **Попов Н. И., Шустова Е. Н.** Применение аксиоматического метода для введения экспоненциальной функции при обучении будущих учителей математики // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика.* 2020. № 3. С. 86–94.

4. **Любецкий В. А.** Основные понятия школьной математики : учебное пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2104 «Математика». М.: Просвещение, 1987. 400 с.

5. **Лихтарников Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения : кн. для начинающих изучать функцион. уравнения и преподавателей. СПб.: Лань, 1997. 158 с.

6. **Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.** Математический анализ : в 3 т. Т. 1: Начальный курс : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика», «Прикладная математика» / под ред. А. Н. Тихонова. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1985. 660 с.

7. **Коробейников А. И.** Функциональные уравнения и их приложения // *Молодые исследователи – Республике Коми : сборник тезисов Пятой республиканской научно-практической конференции.* Сыктывкар: МО и ВШ Республики Коми, СГУ, 2002. С. 34-41.

8. **Алексюк В. Н., Шустова Е. Н.** Элементарные функции. 2 / Пед. ин-т. Сыктывкар, 2010. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 25.10.2010, № 610-В2010.

9. **Алексюк В. Н., Шустова Е. Н.** Элементарные функции. 1 / Пед. ин-т. Сыктывкар, 2010. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 11.10.2010, № 577-В2010.

10. **Шустова Е. Н.** Методика изложения курса «Теория элементарных функций» // *Вестник КГПИ.* Сыктывкар: Коми пединститут, 2010. С. 268–270.

11. **Шустова Е. Н.** Особенности использования аксиоматического метода введения элементарных функций при обучении будущих учителей математики в вузе // *Образовательный вестник «Сознание».* 2022. Т. 24. № 4. С. 23–30.

12. **Шустова Е. Н.** Формирование компонентов методической компетентности учителей математики при изучении аксиоматического метода введения элементарных функций в вузе // *Мир науки, культуры, образования.* 2022. № 3 (94). С. 78–81.

13. **Попов Н. И., Шустова Е. Н.** Элементарные функции в школьном курсе математики : учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2023. 165 с.

References

1. **Sadovsky V. N.** Axiomatic method of constructing scientific knowledge. *Filosofskie voprosy sovremennoy formal'noy logiki. M.: Izd-vo Akademii nauk SSSR* [Philosophical issues of modern formal logic. M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences]. 1962. Pp. 215–262. (In Russ.)

2. **Masalova S. I.** The role of axiomatization in the process of constructing a mathematical theory. *Vestnik DGTU* [Bulletin of DSTU].

2007. No 3. Pp. 71–77. Available: https://cyberleninka.ru/article/n/rol-aksiomatizatsii-v-protsesse-postroeniya-matematicheskoy-teorii (accessed: 08.02.2024). (In Russ.)

3. **Popov N. I., Shustova E. N.** Application of the axiomatic method for introducing the exponential function when training future mathematics teachers. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Pedagogika* [Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Pedagogy]. 2020. No 3. Pp. 86–94. (In Russ.)

4. **Lyubetsky V. A.** *Osnovnye ponyatiya shkol'noy matematiki : uchebnoye posobie dlya studentov ped. in-tov po spec. № 2104 "Matematika"* [Basic concepts of school mathematics : Proc. manual for pedagogical students. Institute for specialties No 2104 "Mathematics"]. Moscow: Prosveshchenie, 1987. 400 p. (In Russ.)

5. **Lihtarnikov L. M.** *Elementarnoe vvedenie v funkcional'nye uravneniya: kn. dlya nachinayushchih izuchat' funkzion. uravneniya i prepodavateley* [Elementary introduction to functional equations: book. for beginners to learn functions. equations and teachers]. SPB.: Lan', 1997. 158 p. (In Russ.)

6. **Ilyin V. A., Sadovnichy V. A., Sendov Bl. X.** *Matematicheskiy analiz : v 3 t. T. 1: Nachal'nyj kurs: uchebnik dlya studentov vuzo, obuchayushchihsya po special'nosti "Matematika", "Prikladnaya matematika"* [Mathematical analysis : in 3 volumes. T. 1: Initial course: textbook for university students studying in the specialty "Mathematics", "Applied Mathematics"]. Pod red. A. N. Tihonova. 2-e izd., pererab. Moscow: Izd-vo MGU, 1985. 660 p.

7. **Korobeinikov A. I.** Functional equations and their applications *Molodye issledovateli - Respublike Komi: sbornik tezisov Pyatoy respublikanskoy nauchno-prakticheskoy konferencii. Syktyvkar: MO i VSh Respubliki Komi, SGU* [Young researchers - the Komi Republic: collection of abstracts of the Fifth Republican Scientific and Practical Conference]. Syktyvkar: Moscow Region and Higher School of the Komi Republic, SGU, 2002. Pp. 34–41 (In Russ.)

8. **Alexyuk V. N., Shustova E. N.** *Elementarnye funkcii. 2* [Elementary functions. 2]. Ped. in-t. Syktyvkar, 2010. 12 p. Dep v VINITI 25.10.2010, no 610-B2010 (In Russ.)

9. **Alexyuk V. N.** *Elementarnye funkcii. 1* [Elementary functions. 1]. Ped. in-t. Syktyvkar, 2010. 13 p. Dep v VINITI 11.10.2010, no 577-B2010 (In Russ.)

10. **Shustova E. N.** Methodology for presenting the course “Theory of elementary functions”. *Vestnik KGPI* [Bulletin of KSPI]. Syktyvkar: Komi Pedagogical Institute, 2010. Pp. 268–270. (In Russ.)

11. **Shustova E. N.** Features of using the axiomatic method of introducing elementary functions in teaching future teachers of mathematics at the university. *Obrazovatel'nyj vestnik “Soznanie”* [Educational Bulletin “Consciousness”]. 2022. Vol. 24. No 4. Pp. 23–30. (In Russ.)

12. **Shustova E. N.** Formation of components of methodological competence of mathematics teachers when studying the axiomatic method of introducing elementary functions at a university. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya* [World of science, culture, education]. 2022. No 3 (94). Pp. 78–81. (In Russ.)

13. **Popov N. I., Shustova E. N.** *Elementarnye funkcii v shkol'nom kurse matemayiki : uchebnoe posobie. 2-e izd., ispr. i dop.* [Elementary functions in a school mathematics course : a textbook. 2nd ed., rev. and additional]. Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2023. 165 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Шустова Елена Николаевна / Elena N. Shustova
к.пед.н., доцент кафедры физико-математического и информационного образования / PhD (Pedagogy), Associate Professor of the Department of Physics, Mathematics, and Information Education
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 29.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 11.03.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 16.03.2024

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

METHODICAL MATERIALS

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)*

Научная статья

УДК 519.1, 378
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_55

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИГРЫ И КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Надежда Николаевна Бабикова[1],
Надежда Олеговна Котелина[1],
Мария Александровна Валуева[2],
Николай Андреевич Старцев[3]
[1]Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина
[2]Санкт-Петербургский государственный институт культуры
[3]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина)

Аннотация. В статье предлагаются для обсуждения авторские задачи по комбинаторике, составленные по мотивам компьютерных игр. Представлены примеры задач для практических занятий и лабораторных работ по темам: правила суммы и произведения, перестановки с повторениями и без, размещения с повторениями и без, сочетания с повторениями и без, разбиение числа на слагаемые и разбиение числа на слагаемые, каждое из которых не превосходит заданного значения, формула включений и исключений. Задачи апробированы в процессе обучения дисциплине «Дискретная математика» студентов направления подготовки «Прикладная информатика».

Ключевые слова: комбинаторика, комбинаторные задачи, компьютерные игры, обучение, авторские задачи

Для цитирования: Бабикова Н. Н., Котелина Н. О., Валуева М. А., Старцев Н. А. Компьютерные игры и комбинаторные задачи // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 55–72. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_55

Article

Computer games and combinatorial problems

Nadezhda N. Babikova[1], Nadezhda O. Kotelina[1], Marija A. Valueva[2], Nikolaj A. Startsev[3]
[1]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, valmasha@mail.ru
[2]St. Petersburg State University of Culture,
[3]St. Petersburg State Electrotechnical University "LETI" named after V. I. Ulyanov (Lenin)

Abstract. The author's problems in combinatorics, based on computer games, are offered for discussion in the article. Examples of problems for practical classes and laboratory work are presented on the following topics: sum and product rules, permutations with and without repetitions, placements with and without repetitions, combinations with and without repetitions, partitioning a number into terms and partitioning a number into terms, each of which does not exceed given value, inclusion and exclusion formula. The problems were tested in the process of teaching the discipline "Discrete Mathematics" to students in the field of study "Applied Informatics".

Keywords: combinatorics, combinatorial problems, computer games, training, author's problems

For citation: Babikova N. N., Kotelina N. O., Valueva M. A., Startsev N. A. Computer games and combinatorial problems. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 55–72. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_55

Введение

Одной из основных целей обучения математике в вузе является формирование способности студентов применять предметные знания вне предмета – как при изучении других дисциплин, так и в последующей профессиональной деятельности, т. е. способности осуществлять *трансфер* (перенос) *знаний* в новый контекст.

Анализ педагогических и психологических исследований проблемы трансфера математических знаний позволяет выделить два основных условия, необходимых для формирования способности к применению знаний в новом контексте: высокий уровень усвоения предметных знаний (именно высокий, а не средний) [1, с. 18] и контекстная насыщенность прикладных задач [2, с. 18]. Разнообразие контекстов в учебных прикладных задачах, внешне различных и неоднородных, повышает вероятность успешного трансфера знаний в будущем [3, с. 316]. Желание разнообразить контекст задач по комбинаторике легло в основу исследования, результаты которого представлены в статье.

История становления и развития комбинаторики как науки тесно связана с играми и головоломками. В мире комбинаторных задач подбрасывают монетки и бросают кости, играют в домино и шахматы, выигрывают в лотерею и проигрывают в карты. Компьютерные игры стали неотъемлемой частью жизни современного человека, и их включение в мир традиционных комбинаторных задач представляется естественным и логичным.

1. Материалы и методы

На протяжении нескольких лет Н. Н. Бабиковой в процессе обучения дисциплине «Дискретная математика» (направление подготовки «Прикладная информатика», СГУ им. Питирима Сорокина) в рамках самостоятельной работы студентов по разделу «Комбинаторика» используется задание: «Составьте задачу(и) на комбинаторные конфигурации на основе любой компьютерной игры и решите ее (их)». На основе этого опыта авторами было решено разработать задачи по мотивам компьютерных игр на общие правила и основные комбинаторные объекты: правила суммы и произведения, расчет при условии «хотя бы один», перестановки с повторениями и без, размещения с повторениями и без, сочетания с повторениями и без, разбиение числа на слагаемые и разбиение числа на слагаемые, каждое из которых не превосходит заданного значения, формула включений и исключений.

Два автора — преподаватели «Дискретной математики», игровой опыт которых не слишком значителен (любимая игра — «Растения против зомби»). Два автора — студенты, изучавшие в вузе «Дискретную математику» и имеющие большой и разнообразный игровой опыт. Составленные авторами задачи апробированы в процессе обучения дисциплине «Дискретная математика» (направление подготовки «Прикладная информатика»). Задачи использовались на практических и лабораторных занятиях (реализация алгоритмов на языке Python), в качестве примеров в лекционном материале.

2. Результаты исследования

Рассмотрим примеры задач, различных по уровню сложности.

Игры «Собери / найди пары»

Имеется 9 пар одинаковых карточек (рис. 1). Сколькими способами можно расположить карточки на экране?

Рис. 1. Яндекс игры: Найди пару – большой выпуск

Не имеет значения, как карточки расположены: будут ли они выстроены в один ряд, расположены в форме прямоугольника или просто случайно разбросаны по экрану. Важно лишь то, что они упорядочены. Это задача на **перестановки с повторениями**. Число различных вариантов расположения карточек — $P(2,2,2,2,2,2,2,2,2) = 18!/29 =$ $= 12\,504\,636\,144\,000$.

Иногда в подобных играх требуется собирать не пары, а тройки одинаковых карточек. Если имеется 6 троек одинаковых карточек, то количество вариантов их расположения составит $P(3,3,3,3,3,3) = 18!/66$.

Игра «Растения против зомби»

В игре «Растения против зомби» игроку нужно выбирать и выращивать растения, чтобы защитить свой дом от нападения орды зомби. По мере продвижения в игре число ячеек для выбора растений и число видов растений увеличивается (рис. 2). При этом растения можно сгруппировать по функциям: есть растения для защиты, для дальнего боя, для ближнего боя и другие.

Рис. 2. Каталог растений в игре «Растения против зомби»

На этапе «Бассейн» (рис. 3) у игрока имеется 7 ячеек для выбора растений из 14 доступных видов. Растения по функциям делятся следующим образом: генерация света — подсолнух; защита от нападений — стенорех, картофельная мина, колючка; оборона на воде — лист кувшинки и водоросли, нанесение большого урона — вишневая бомба и перец; ближний бой — зубастик и кабачок; дальний бой — горохострел, огорошиватель, тройной горохострел, ледяной горохострел.

Рис. 3. Выбор растений на этапе «Бассейн»

Обязательно нужно выбрать подсолнух для генерации света и лист кувшинки, на который в бассейне устанавливаются все остальные растения. Игровой опыт показывает, что желательно иметь: хотя бы по одному растению для защиты от нападений и для нанесения большого урона, хотя бы два растения для дальнего боя. Сколькими способами можно выбрать растения?

Сначала выберем обязательные и желательные растения. Выбираем подсолнух и лист кувшинки. Выбрать любое растение для защиты от нападений можно C_3^1 способами, любое растение для нанесения большого урона — C_2^1 способами, два растения для дальнего боя — C_4^2 способами (**сочетания без повторений**). По **правилу произведения** получаем $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 18$ способов. После этого у нас остается: два растения для защиты от нападений, одно растение для нанесения большого урона, два растения для дальнего боя, два растения для ближнего боя и водоросли. Выбрать нам нужно еще одно растение, по **правилу суммы** это можно сделать $(2+1+2+2+1) = 8$ способами. По правилу произведения общее число вариантов выбора $18 \cdot 8 = 144$.

Игры «Dota 2» и «League of Legends»

Игры «Dota 2» и «League of Legends» — одни из самых популярных многопользовательских онлайн-игр в мире. В каждом матче обеих игр две команды по пять игроков сталкиваются на симметричной карте. Структура игровых карт одинакова, они состоят из трёх линий: верхней (top), центральной (mid) и нижней (bot), а также участков леса (рис. 4). Матч начинается с выбора героев игроками каждой команды, но правила выбора героев в League of Legends и Dota 2 различаются.

Рис. 4. Карты игр «League of Legends» (слева) и «Dota 2» (справа)

В Dota 2 на сегодняшний день 124 различных героя, каждый герой может быть выбран только один раз. Сколькими способами можно собрать каждую команду, если герои выбираются командами по очереди?

Для команды, выбирающей первой, по правилу произведения имеется $124 \cdot 122 \cdot 120 \cdot 118 \cdot 116 = 24\,848\,647\,680$ способов. Для второй команды — $123 \cdot 121 \cdot 119 \cdot 117 \cdot 115 = 23\,829\,841\,035$.

В начальной стадии игры развитие происходит на трёх линиях, надо распределить пять героев команды по линиям так, чтобы на каждой линии оказался **хотя бы один** герой.

Распределить 5 героев по 3 линиям можно 3^5 способами (**размещения с повторениями**). При этом в $3 \cdot 2^5$ случаях одна из линий окажется свободной, а в 3 случаях свободными окажутся две линии. Тогда по **формуле включений и исключений** получаем, что распределить 5 героев по 3 линиям так, чтобы на каждой линии оказался хотя бы один герой, можно $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 = 150$ способами. Эта задача относится к общей схеме «раскладка n различных предметов по m различным ящикам так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет» [4, с. 102].

В Dota 2 у каждого героя есть своя зона обзора, в рамках которой он может видеть все, что происходит вокруг. Остальная часть карты покрыта туманом войны. Лучший способ увидеть сквозь туман — это поставить варды. Вард — предмет, который позволяет видеть в тумане. Варды бывают двух типов: observer — дает обзор, sentry — позволяет видеть невидимых существ. В самом начале игры команде доступно два observer варда и три sentry варда. Сколькими способами можно распределить все варды между пятью героями команды?

Сначала посчитаем, сколькими способами можно распределить 2 observer варда между 5 героями. Если 2 варда распределяются между разными героями, то число вариантов соответствует числу сочетаний без повторений $C_5^2 = 10$. И есть 5 способов распределения обоих вардов одному из героев. Таким образом, общее количество способов распределить 2 observer варда равно $10 + 5 = 15$.

При распределении 3 sentry вардов среди 5 героев возможны три ситуации. По одному варду достается трём разным героям из пяти — $C_5^3 = 10$ вариантов выбора героев. Если варды получают два героя, то сначала выберем одного героя и отдадим ему два варда — 5 способов, а потом выберем второго героя из оставшихся четырех и отдадим ему один вард — 4 способа, всего 20 вариантов выбора двух героев. И есть 5 вариантов, когда все три варда попадут к одному из героев. Таким образом, возможно $10+20+5 = 35$ способов распределения 3 sentry вардов среди 5 героев. А общее количество способов распределения всех вардов между героями команды в соответствии с правилом произведения составит $15 \cdot 35 = 525$.

Игра «Карлсон, который живет на крыше»

В мини-игре «Весы» из обучающей компьютерной игры «Карлсон, который живет на крыше» игроку на каждом уровне игры нужно подвесить все имеющиеся грузы так, чтобы весы пришли в равновесие (рис. 5–6). На уровне h весы представляют собой полное двоичное дерево высоты h, в котором число листьев-крючков равно 2^h.

Рис. 5. Мини-игра «Весы», уровень 2

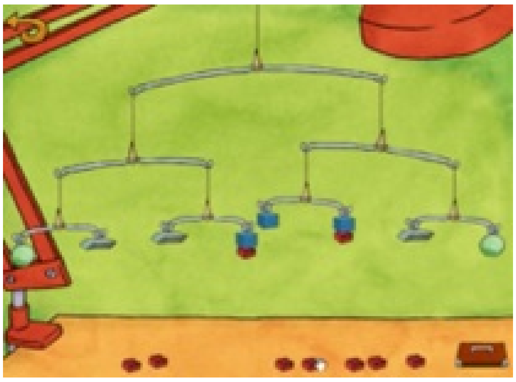

Рис. 6. Мини-игра «Весы», уровень 3

При каждой попытке игроку выдается новый набор грузов. Вес грузов игроку неизвестен, соотношение между весами грузов определяется опытным путем. Минимальный вес имеет красная деталь конструктора, примем ее вес за 1. Тогда вес синего кубика равен 2, ластика — 3, зеленого шара — 4, солдатика — 5, машинки — 6.

На первом уровне весы имеют всего 2 крючка, и сначала набор грузов генерируется так, чтобы игрок мог соотнести веса грузов между собой, например ластик и три детали конструктора, шар и два кубика и т. п. Затем игра усложняется. Пусть вес грузов на каждом крючке равен 4. Как разработчик игры может сгенерировать общий набор грузов, который позволит уравновесить весы? Сколькими способами можно сгенерировать такие наборы?

Общий набор грузов для весов есть сумма наборов для каждого крючка. Если вес на каждом крючке должен быть равен 4, то количество различных наборов грузов для одного крючка равно **количеству разбиений числа 4 на слагаемые**. Таких разбиений 5. Далее нужно выбрать из 5 возможных наборов грузов 2. Если мы хотим, чтобы наборы грузов для крючков были обязательно различны (так интереснее), то число способов составить общий набор грузов равно числу сочетаний без повторений $C_5^2 = 10$.

На втором уровне с тем же весом для крючков ситуация будет аналогичной, число способов составить общий набор грузов будет равно $C_5^4 = 5$. Но при весе 4 для крючков на третьем уровне окажется, что различных наборов грузов у нас 5, а крючков 8. То есть различных наборов грузов для каждого крючка не хватает. Тогда мы допускаем возможность повторения наборов грузов на крючках, и количество способов составить общий набор грузов будет равно **числу сочетаний с повторениями** $\bar{C}_5^8 = 495$.

Генерация набора грузов для крючков сводится к генерации разбиений числа, равного суммарному весу грузов на крючке, на слагаемые. А количество способов сформировать общий набор грузов равно числу сочетаний с повторениями или без из числа разбиений по количеству крючков.

Разбиения числа на слагаемые можно сгенерировать, например, при помощи алгоритма генерации разбиений в обратном лексикографическом порядке [5, с. 446]. Число разбиений можно определить по рекуррентной формуле Эйлера [5, с. 451].

$$
\begin{aligned}
p(n) = {} & p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \cdots + \\
& + (-1)^{q+1}(p(n-(3q^2-q)/2) + p(n-(3q^2+q)/2))\ldots
\end{aligned}
$$

По этой формуле:

$$p(1) = p(0) = 1, \quad p(2) = p(1) + p(0) = 2, \quad p(3) = p(2) + p(1) = 3,$$
$$p(4) = p(3) + p(2) = 5, \quad p(5) = p(4) + p(3) - p(0) = 7,$$
$$p(6) = p(5) + p(4) - p(1) = 11.$$

Пусть вес грузов для каждого крючка будет равен 6 (это вес самого тяжелого груза), тогда количество различных наборов грузов для крючков равно $p(6) = 11$. Если мы допускаем возможность повторения наборов грузов для крючков, то число способов составить общий набор грузов на первом уровне равно $\bar{C}_{11}^{2} = 66$. Для второго уровня — $\bar{C}_{11}^{4} = 1001$. Для третьего уровня — $\bar{C}_{11}^{8} = 43\,758$. Очень много.

Игра «Hollow Knight»

Задача составлена студентом группы 121б-ПИо Игнатом Туркиным и дополнена авторами. В приключенческой компьютерной игре «Hollow Knight» герой постепенно накапливает амулеты и ячейки, в которых амулеты можно разместить (рис. 7). Стартовое количество ячеек — 3, максимальное — 11. Амулеты могут быть четырех типов: А — занимают 1 ячейку, Б — 2 ячейки, В — 3 ячейки, Д — 4 ячейки.

Рис. 7. Игра «Hollow Knight»

Предположим, на некотором начальном уровне игры у героя имеется 3 ячейки и 25 амулетов: 10 амулетов А, 9 амулетов Б и 6 амулетов В. Сколькими способами герой может собрать комплект амулетов при условии, что все ячейки должны быть заполнены?

Порядок размещения амулетов в ячейках не имеет значения, поэтому варианты выбора амулетов: 1В или 1Б + 1А или 3А. Используя правила суммы и произведения и формулу числа сочетаний без повторений, определяем количество способов: $6 + 9 \cdot 10 + C_{10}^{3}$.

При максимальном развитии у главного героя имеется 11 ячеек под амулеты и 39 всевозможных амулетов: амулетов А — 10, амулетов Б — 16, амулетов В — 9, амулетов Д — 4. Сколькими способами герой может собрать комплект амулетов при условии, что все ячейки должны быть заполнены?

Количество вариантов выбора амулетов равно **числу разбиений числа 11 на слагаемые, не превышающие 4**. Для каждого из 26 разбиений вычисляем количество способов комплектации амулетов, затем складываем их. Например, для разбиения $4 + 4 + 3$ (2Д + 1В) количество способов равно $C_4^2 \cdot C_9^1$. Конечно, в этом случае ручной счет утомительный, и желательно составить программу генерации разбиений числа на слагаемые. Всего получается 1 189 411 различных способов собрать комплект амулетов.

3. Обсуждение

Задание «Сконструировать задачу по комбинаторике на основе...» относится к наивысшей категории когнитивных процессов модифицированной таксономии Блума — помнить, понимать, применять, анализировать, критиковать, **создавать** [6]. Некоторым студентам сложно выполнить такое задание. Им можно предложить составить задачу, аналогичную некоторому примеру. В этом случае задание будет соответствовать категории **применять**, а при некотором развитии примера категории **анализировать**, что тоже очень хорошо.

Рассмотрим два модельных примера, на основе которых студенты могут составить свои собственные задачи.

Игры «Найди различия»

В таких играх нужно найти отличия между двумя практически идентичными картинками (рис. 8).

Предположим, мы хотим разработать игру для детей или пожилых людей, в которой на основе каждой имеющейся картинки будут автоматически генерироваться несколько отличающихся деталями картинок (рис. 9). То есть у игрока при желании будет несколько попыток на одном уровне с одной и той же картинкой. На первом уровне между картинками должно быть только одно отличие, на втором уровне — два. Менять можно цвет 6 желтых точек, цвет 10 внутренних участков на крыльях (сиреневый, оранжевый и зеленый на верхних крыльях, красный и зеленый на нижних). Сколько разных картинок можно сгенерировать для первого и второго уровней?

Рис. 8. Яндекс игры: Найди отличия: Головоломка

Рис. 9. Картинка-основа (источник – Яндекс-картинки)

На первом уровне можно сгенерировать по правилу сложения $6+$ $+10 = 16$ разных картинок. На втором уровне по правилу произведения можно сгенерировать $16 \cdot 15 = 240$ картинок. Если наложить дополнительное условие, что меняться должны объекты разных типов, т. е. изменяется 1 точка и 1 область на крыле, то получим $6 \cdot 10 = 60$ возможных вариантов генерации картинок. Вариантов много, поэтому можно добавить еще условия: например, один изменяемый объект должен быть справа, а второй — слева. В этом случае можно сгенерировать $6 \cdot 5 = 30$ разных картинок.

На основе этого примера студенты могут составить свои задачи, изменив картинку, определив набор изменяющихся элементов и дополнительные условия. Задача может усложниться за счет добавления третьего уровня, а при желании и последующих.

Игры с лабиринтами

При создании компьютерных игр широко применяется процедурная генерация игровых миров и их деталей. Существует большое количество алгоритмов генерации лабиринтов. Создаваемые при помощи различных алгоритмов лабиринты отличаются количеством проходов, длиной коридоров и тупиков, текстурой и т. п. Все алгоритмы можно разделить на те, в которых стены удаляются, и те, в которых стены строятся.

Рассмотрим самый простой алгоритм генерации лабиринтов — алгоритм двоичного дерева. Имеется прямоугольная сетка, в которой границы клеток являются стенами. Выбираем два направления движения, пусть это будут «вправо» и «вверх». В каждой клетке случайным образом выбираем одно из направлений и стираем соответствующую стену. В крайних справа и крайних сверху клетках сетки выбор направления определен единственным образом. В результате получается идеальный лабиринт (лабиринт с одиночным соединением), т. е. лабиринт с единственным проходом без циклов и изолированных участков. Сколько различных лабиринтов может быть сгенерировано при помощи алгоритма двоичного дерева на сетке размера n на n?

Поскольку такие лабиринты всегда имеют два коридора вдоль верхней и вдоль правой границ, то количество вариантов можно определить, как число размещений с повторениями — $2n - 1$.

На рис. 10 представлен лабиринт, построенный при помощи алгоритма двоичного дерева на сетке 5 на 5. В нем имеется пять тупиков. Предположим, что в конце каждого тупика может быть размещен клад. Сколько существует вариантов распределения кладов по тупикам, если хотя бы один клад в лабиринте должен быть обязательно? Все клады одинаковые.

Всего вариантов распределения кладов — число размещений с повторениями — 2^5. Единственный вариант распределения кладов, который нас не устраивает — случай, когда клада нет ни в одном тупике. Следовательно, имеется $2^5 - 1 = 31$ способ распределить клады в лабиринте требуемым образом.

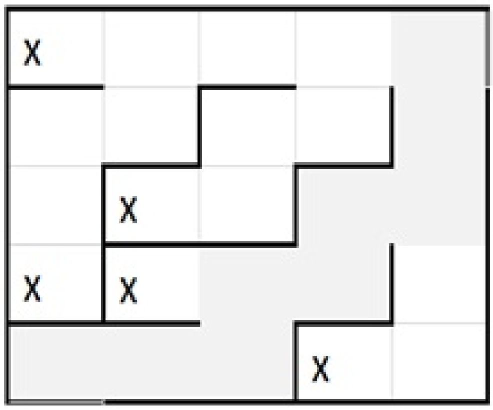

Рис. 10. Лабиринт, построенный при помощи алгоритма двоичного дерева

В этом примере можно поменять приблизительно все: алгоритм генерации лабиринта (а значит, изменится структура лабиринта), размер сетки, клады могут быть разных типов, количество кладов может меняться.

Заключение

В 2022–2023 годах Н. Н.Бабиковой было проведено анкетирование студентов направления подготовки «Прикладная информатика». Анкета содержала в том числе вопросы об эффективности тех или иных видов учебной деятельности в процессе обучения математическим дисциплинам. В 2022 году на вопрос с открытым ответом — «Перечислите виды учебной деятельности на аудиторных занятиях, которые помогают вам лучше запоминать / понимать новую информацию» — самым распространенным ответом был «Анализ / примеры применения в реальной деятельности», его дали 43 % студентов [7, с. 39]. В 2023 году этот вопрос был задан в закрытой форме, 52 % студентов выбрали ответ — «Решение задач с реальными данными». А что может быть для современных студентов более реальным, чем виртуальный мир компьютерных игр?

Студенты направления подготовки «Прикладная информатика» положительно отнеслись как к решению комбинаторных задач по мотивам компьютерных игр на практических и лабораторных занятиях, так и к заданию на самостоятельную разработку задач. В 2023 году студент группы 121б-ПИо Николай Мельник составил целый комплект таких задач в рамках самостоятельной научно-исследовательской работы и подготовил доклад для выступления на научной студенческой конференции.

Планируется использование составленных авторами задач для студентов направлений «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки» (дисциплины «Дискретная математика», «Комбинаторные алгоритмы», «Приложения дискретной математики в компьютерных науках»).

Для студентов информационных специальностей разработка компьютерных игр является одним из возможных видов будущей профессиональной деятельности. Математические методы и модели широко применяются в геймдизайне [8; 9], поэтому в дальнейшем авторы считают целесообразным разработку задач на тему компьютерных игр, сформулированных с точки зрения геймдизайнера: таких, как приведенная выше задача про весы в игре «Карлсон, который живет на крыше».

Благодарности

Авторы выражают благодарность студентам направления «Прикладная информатика» СГУ им. Питирима Сорокина за участие в исследовании.

Список источников

1. **Тюменева Ю. А., Вальдман А. И., Карной М.** Что дают предметные знания для умения применять их в новом контексте. Первые результаты сравнительного анализа TIMSS-2011 и PISA-2012 // *Вопросы образования.* 2014. № 1. С. 8–24. DOI 10.17323/1814-9545-2014-1-8-24.

2. **Тюменева Ю. А., Шкляева И. В.** Два подхода к пониманию «применения знаний»: трансфер и моделирование. Обзор литературы и критика // *Вопросы образования.* 2016. № 3. С. 8–33. DOI 10.17323/1814-9545-2016-3-8-33.

3. **Tyumeneva Y. A., Goncharova M. V.** Following the Template: Transferring Modeling Skills to Nonstandard Problems // *Russian*

Education & Society. 2017. Vol. 59. No 5–6. Pp. 298–318. DOI 10.1080/10609393.2017.1408370.

4. **Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.** Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. 400 с.

5. **Кнут Д.** Искусство программирования. Том 4, А. Комбинаторные алгоритмы. Часть 1 : пер. с англ. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. 960 с.

6. **Бабикова Н. Н.** Согласование методов оценивания и результатов обучения на основе таксономии // *Образование и педагогические науки в XXI веке: актуальные вопросы, достижения и инновации : сборник статей II Международной научно-практической конференции : в 2 частях.* Пенза: Наука и Просвещение (ИП Гуляев Г. Ю.), 2017. Ч. 1. С. 93–100.

7. **Бабикова Н. Н.** Обучение в цифровую эпоху: помнить или гуглить // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 33–46. DOI 10.34130/1992-2752_2022_3_33.

8. **Патрашов А. С.** Математическое руководство по созданию компьютерных игр: справочник. Екатеринбург: Интернет-издательство Ridero, 2016. 316 с.

9. **Патрашов А. С.** Применение высшей математики в дизайне компьютерных игр // *Системный администратор.* 2020. № 5 (210). С. 46–49.

References

1. **Tyumeneva Yu. A., Val'dman A. I., Karnoi M.** What Does Subject Knowledge Give for Its Applying in New Context. The First Results from Studies TIMSS-2011 and PISA-2012. *Voprosy obrazovaniya* [Questions of education]. 2014. No 1. Pp. 8–24. DOI 10.17323/1814-9545-2014-1-8-24. (In Russ.)

2. **Tyumeneva Yu. A., Shkliaeva I. V.** Two Approaches to the Concept of Knowledge Application: Transfer and Modeling. Overview

and Criticism. *Voprosy obrazovaniya* [Questions of education]. 2016. No 3. Pp. 8–33. DOI 10.17323/1814-9545-2016-3-8-33. (In Russ.)

3. **Tyumeneva Y. A., Goncharova M. V.** Following the Template: Transferring Modeling Skills to Nonstandard Problems. *Russian Education & Society*. 2017. No 59 (5–6). Pp. 298–318. DOI 10.1080/10609393.2017.1408370.

4. **Vilenkin N. Ya., Vilenkin A. N., Vilenkin P. A.** *Kombinatorika* [Combinatorics]. Moscow: FIMA, MCzNMO, 2006. 400 p. (In Russ.)

5. **Knuth D.** *Iskusstvo programmirovaniya. Tom 4, A. Kombinatornyye algoritmy* [The Art of Computer Programming, Vol. 4, A: Combinatorial Algorithms]. Moscow: I.D. Williams LLC, 2013. Part 1. 960 p. (In Russ.)

6. **Babikova N. N.** Aligning assessment methods with learning outcomes based on taxonomy. *Obrazovaniye i pedagogicheskiye nauki v XXI veke: aktual'nyye voprosy, dostizheniya i innovatsii : sbornik statey II Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii : v 2 chastyah* [Education and pedagogical science in the XXI century: current issues, achievements and innovations : collection of articles of the international scientific and practical conference : in 2 parts]. Penza, 2017. Part. 1. Pp. 93–100. (In Russ.)

7. **Babikova N. N.** Education in the digital age: remember or google *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science]. 2022. No 3 (44). Pp. 33–46. DOI 10.34130/1992-2752_2022_3_33.(In Russ.)

8. **Patrashov A. S.** *Matematicheskoe rukovodstvo po sozdaniyu komp'yuterny'x igr: spravochnik* [A mathematical guide to creating computer games: guide.] Ekaterinburg: Internet-izdatel'stvo Ridero, 2016. 316 p. (In Russ.)

9. **Patrashov A. S.** Application of higher mathematics in computer game design. *Sistemnyy administrator* [System Administrator]. 2020. No 5 (210). Pp. 46–49. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Бабикова Надежда Николаевна / Nadezhda N. Babikova
к.пед.н., доцент, доцент кафедры прикладной информатики / PhD (Pedagogy), Associate Professor, Associate Professor of Applied Informatics Department
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Котелина Надежда Олеговна / Nadezhda O. Kotelina
к.ф.-м.н., доцент кафеды прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Валуева Мария Александровна / Marija A. Valueva
обучающийся бакалавриата/ undergraduate student
Санкт-Петербургский государственный институт культуры / St. Petersburg State University of Culture
191186, г. Санкт-Петербург, Дворцовая наб., д. 2 / 191186, St. Petersburg, Dvortsovaya embankment, 2

Старцев Николай Андреевич / Nikolaj A. Startsev
обучающийся бакалавриата/ undergraduate student
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина) / St. Petersburg State Electrotechnical University "LETI"named after V. I. Ulyanov (Lenin)
197022, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, литера Ф / 197022, Russia, St. Petersburg, Professora Popova str., 5, litera F

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 16.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 26.02.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 11.03.2024

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Выпуск 1 (50)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024; 1 (50)

Научная статья

УДК 373.1
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_73

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ И ИННОВАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СЕТЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОРГАНИЗАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ И ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Ирина Валерьевна Клещева
Российский государственный педагогический университет
имени А. И. Герцена, iv-kl@list.ru

Аннотация. В статье рассмотрены содержательные, организационные, функциональные проблемы реализации сетевого взаимодействия в сфере образования. Аргументирована своевременность и действенность сетевого взаимодействия как инструмента интегрированного и результативного решения различных задач в образовании. Обоснована и экспериментально подтверждена педагогическая целесообразность использования сетевого взаимодействия для повышения качества математического образования. Методологической основой сетевого образовательного взаимодействия мотивированно определен системный подход, детерминирующий конструирование и функционирование образовательной сети на концептуальном, структурном и элементном уровнях. Системообразующим фактором при этом чаще всего выступают общие цели, ради которых и консолидируются педагогические усилия.

На основании сравнительного анализа существующих научных трактовок, изучения актуальной педагогической практики, опытно-экспериментальной работы выявлены характеристические свойства сетевого взаимодействия, значимые для построения эффективных образовательно-исследовательских сетей.

Установлены принципы, поддерживающие корректные, но результативные взаимосвязи между участниками сети: принцип личностной значимости, социальной ответственности, открытости, инициативности.

Описаны опирающиеся на выделенные выше положения апробированные модели сетевого образовательного взаимодействия, в частности для организации исследовательской и проектной деятельности обучающихся.

Приведены проблемные точки и риски, сопровождающие сетевое взаимодействие, способы их нивелирования.

Ключевые слова: сетевое взаимодействие, системный подход, исследовательская деятельность, проектная деятельность, качество математического образования

Для цитирования: Клещева И. В. Образовательный и инновационный потенциал сетевого взаимодействия организаций на примере развития исследовательской и проектной деятельности обучающихся // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2024. Вып. 1 (50). С. 73–93. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_73

Article

Educational and innovative potential of network interaction between organizations using the example of the development of research and project activities of students

Irina V. Kleshcheva
Herzen State Pedagogical University of Russia, iv-kl@list.ru

Abstract. The article examines the substantive, organizational, and functional problems of implementing network interaction in the field of education. The timeliness and effectiveness of network interaction as a tool for integrated and effective solution of various problems in education is argued. The pedagogical feasibility of using network interaction to improve the quality of mathematics education has been scientifically substantiated and experimentally confirmed. The methodological basis of network educational interaction is motivated by a systematic approach that determines the design and functioning of the educational network at the conceptual, structural and elemental levels. The system-forming factor in this case is most often common goals, for the sake of which pedagogical efforts are consolidated.

Based on a comparative analysis of existing scientific interpretations, the study of current teaching practice, and experimental work, the characteristic properties of network interaction that are significant for building effective educational and research networks have been identified.

Principles have been established that support correct but effective relationships between network participants: the principle of personal significance, social responsibility, openness, and initiative.

Tested models of network educational interaction, based on the provisions highlighted above, are described, in particular, for organizing research and project activities of students.

Problem points and risks accompanying network interaction and ways to mitigate them are given.

Keywords: networking, systems approach, research activities, project activities, quality of mathematical education

For citation: Kleshcheva I. V. Educational and innovative potential of network interaction between organizations using the example of the development of research and project activities of students. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2024, no 1 (50), pp. 73–93. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_73

Введение

Исследовательская и проектная деятельность обучающихся, являясь активной самостоятельной многогранной учебно-познавательной деятельностью, позволяет реализовать различные актуальные образовательные тренды, способствует поддержанию качества образования, повышению мотивации к обучению, развитию и самоопределению, достижению различных видов образовательных результатов. Поэтому на протяжении десятилетий организация этих видов деятельности инициативно осуществлялась многими образовательными учреждениями общего, дополнительного и профессионального образования. Школы сами искали возможности для мотивации, обучения, выполнения, оценки исследовательской или проектной работы. Причем применительно и к обучающимся, и к педагогам. Работа над учебными исследованиями и проектами велась преимущественно со способными учениками в формате внеклассной деятельности, а полученные обучающимися результаты учитывались при поступлении в профильные классы старшей школы или в вузы. К руководству исследованиями и проектами привлекались преподаватели и научные сотрудники высшей школы, магистранты, аспиранты, «малые факультеты» университетов, так как большинство учителей испытывали сложности в организации исследовательской и проектной деятельности школьников, обусловленные и спецификой такой работы, и недостатком учебно-методического сопровождения, и отсутствием личного и профессионального опыта выполнения исследований и проектов. Таким образом, привлечение партнеров для организации исследовательской и проектной деятельности было в большей степени вынужденной мерой, продиктованной нехваткой кадровых, материально-технических и других ресурсов.

В настоящее время в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами общего образования (ФГОС) выполнение индивидуального проекта является обязательным для всех обучающихся. ФГОС определяет индивидуальный проект как особую форму организации деятельности обучающихся – учебное исследование или проект [1]. Строго говоря, исследование и проект – это разные виды познавательной деятельности, обладающие различными существенными характеристиками, особенными этапами своей реализации, специфическими результатами. Однако в рамках данной статьи уточнение этих понятий не предусмотрено, а положения, касающиеся сетевого взаимодействия, могут быть применены к организации обоих видов деятельности.

Освоение обучающимися исследовательской и проектной деятельностью в настоящее время крайне актуально не только с формальных позиций, продиктованных нормативными документами. По данным агентства стратегических инициатив [2], в ближайшее десятилетие наиболее востребованными будут наукоемкие специальности и надпрофессиональные умения (работа в режиме высокой неопределенности и быстрой смены условий задач, характерных для исследований, управление проектами, системное и критическое мышление, навыки межотраслевой коммуникации, навыки нетворкинга и др.), формируемые приоритетно в процессе исследования, работы над проектом. Кроме того, сегодня исследование рассматривается не только как специфическая профессиональная деятельность научных работников, но и как неотъемлемая составная часть любой профессиональной или общественной деятельности, как стиль жизни современного человека. А проектные умения применяются и в учебе, и в бизнесе, и в социуме. В связи с этим необходимо не ограничивать учебные исследования и проекты содержанием образовательной программы, стенами образовательного учреждения, подменять реферативной работой, а, наоборот, демонстрировать и школьникам, и студентам возможность, целесообразность, значимость, эффективность, универсальность этих видов деятельности в различных сферах жизни: в обучении, в будущей профессии, в прикладных направлениях, в личностном развитии. Все это требует расширения образовательного пространства посредством сетевого взаимодействия.

Целью данной статьи является раскрытие образовательных возможностей сетевого взаимодействия, спроектированного с учетом системного подхода, на примере организации исследовательской и проектной деятельности обучающихся, описание апробированных моделей сетевого образовательного взаимодействия.

1. Материалы и методы

Методы, которыми проводилось исследование: анализ литературы и нормативных документов, сравнение и обобщение педагогического опыта, анкетирование и анализ его результатов, наблюдение, экспериментальная работа, анализ хода и результатов реализации проектов.

Сетевое взаимодействие признается сегодня действенным механизмом совместного решения различных образовательных, управленческих, ресурсных проблем, позволяющим более полно учесть различные стартовые условия, скооперировать научно-методические, кадровые, материально-технические ресурсы партнеров, расширить адресность использования совместных разработок, обогатить ассортимент учебных и методических материалов, повысить квалификацию кадров, обеспечить преемственность образовательного процесса, оптимизировать затраты и минимизировать возможные риски.

Обобщая различные трактовки [3–5], под сетевым взаимодействием в сфере образования понимается система особым образом структурированных связей между педагогами, образовательными (и не только) учреждениями, процессами, осуществляемыми на основе открытости, добровольного объединения и использования ресурсов, взаимной ответственности и обязательств для достижения общей цели, предполагающая распределение функций и согласованность действий.

При подготовке данной статьи также были опрошены более 50 будущих и практикующих педагогов на предмет выявления наиболее значимых характеристик, свойственных сетевому взаимодействию в образовании. Далее приведены полученные в этом опросе не ранжированные, но наиболее часто встречающиеся характеристики-ассоциации сетевого взаимодействия: партнерство, объединение, интеграция, доверие, кооперация, адаптация, обязательства, сотрудничество, контакты, связь, согласование, общность, помощь и т. д. Названные педагогами характеристики поддерживают и эмоционально окрашивают научные трактовки понятия сетевого взаимодействия, предлагаемые учеными.

2. Обсуждение

Как показывает практика, часто сетевое взаимодействие продиктовано ситуативно-общими целями, организационными удобствами, наличием уже готовых материалов по теме взаимодействия, личными контактами.

Но сетевое взаимодействие как система характеризуется наличием в нем прежде всего системных характеристик, которые задают определенные требования к сетевым партнерам, гарантируют достижение поставленной в сети общей цели, обеспечивают устойчивость сетевого взаимодействия. Последующее описание выделенных системных характеристик будем иллюстрировать их проекциями на модель кросс-возрастного проектно-исследовательского сообщества для обучающихся (схематично модель этого сообщества представлена на рис. 1).

Системообразующим фактором (СОФ) чаще всего выступают цели, ради которых и интегрируются педагогические усилия. Важно, чтобы эти цели были не навязаны, а поддерживались большинством участников сети, причем разных категорий: преподавателями, администрацией школ и вузов, обучающимися, их родителями, другими партнерами.

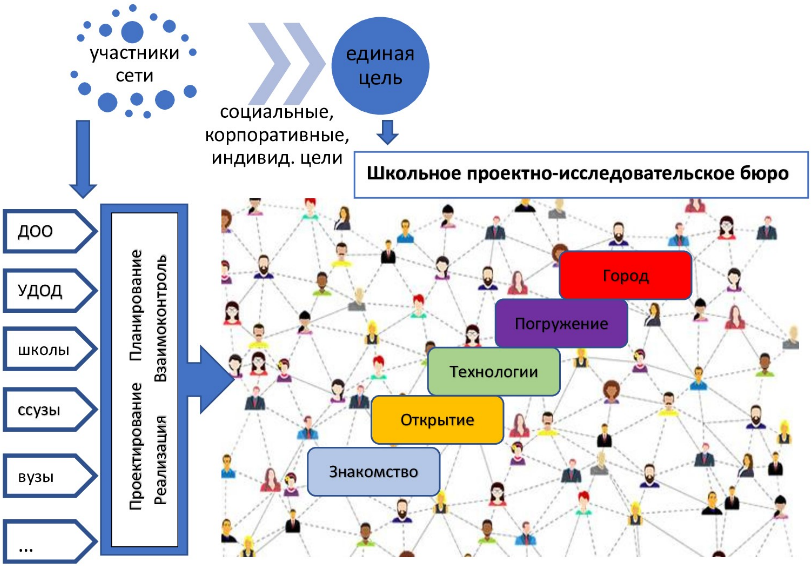

Рис. 1. Модель кросс-возрастного проектно-исследовательского сообщества обучающихся

При этом исходные цели разных групп участников сети могут быть вариативны. Например, в сетевом сообществе по организации исследовательской и проектной деятельности обучающихся школ социально-экономические цели ссузов, вузов, предприятий поддержаны потребностями общества в выпускнике школы, потенциальном абитуриенте, обладающем развитым исследовательским потенциалом, владеющем основами научно-познавательной деятельности, способном к осознанному получению дальнейшего профессионального образования, освоению наукоемких технологий. Корпоративные цели учителей при этом могут быть связаны с достижением заданных стандартами личностных, метапредметных, предметных образовательных результатов посредством подготовки учащихся, мотивированных к учебе, способных осуществлять самостоятельный поиск знаний, владеющих исследовательским и проектным методами. А индивидуальные цели обучающихся могут состоять в удовлетворении тяги к познанию нового, неизведанного, желании изучать интересующие их вопросы за пределами школьной программы, освоить неизвестные способы познавательной деятельности, подготовиться к продолжению образования, осуществить профессиональные пробы.

Поиск способов достижения указанных дифференцированных, но созвучных целей и приводит к общей идее образования сетевого проектно-исследовательского сообщества, которое позволит объединить, согласовать, систематизировать усилия названных выше учреждений и групп людей: организовать и включить обучающихся в разноуровневые исследования, проекты, проблемные лаборатории, научные, социальные и культурные коммуникации, совместную групповую или индивидуальную продуктивную деятельность детей, молодежи, педагогов, ученых, представителей различных профессий, создать условия для целенаправленного взаимодействия обучающихся с окружающей средой посредством их посильного, но активного и инициативного участия в общественно значимой исследовательской и проектной работе.

Таким образом, кросс-возрастное исследовательское сообщество для учащихся — это площадка интеллектуального общения и сотрудничества не только с одноклассниками, учителями, приглашенными учеными внутри школы, но и приобретение опыта исследовательского познания за ее стенами, в условиях других образовательных, культурных, научных, производственных учреждений. Для администрации школы, ее педагогов сетевое взаимодействие выступает инструментом интеграции педагогических усилий, интенсификации образовательного процесса, направленных на личностное развитие учащихся, создание условий для их успешной профориентации и социализации, осознанного выбора ими дальнейшего образовательного и профессионального маршрута. Для социальных партнеров (детские сады, ссузы, вузы, учреждения дополнительного образования, предприятия и др.) обеспечивает преемственность и интеграцию образовательной и социально-экономической политики на разных ступенях образования, расширение ареала своей образовательной деятельности, реализацию наставничества как со стороны преподавателей и работодателей, так и со стороны студентов, развитие научного волонтерства, привлечение потенциальных абитуриентов и сотрудников, повышение квалификации.

Системоопределяющими в сети, как правило, являются организации-лидеры — те учреждения, которые задают ориентир, направленность, характер взаимодействия, целевой «портрет» образовательной организации (ОО), ее абитуриента, обучающегося, выпускника, педагога. Названные положения, отражающие общие идеи и цели, представления о миссии взаимодействия, выбор единых подходов, разработку стратегии сотрудничества, определяют концептуальный уровень сетевого взаимодействия.

На практике для рационального «запуска» сети целесообразно выделенные концепты поддержать некоторой общей формой взаимодействия, позволяющей реализовать основную цель партнерства. В нашем случае такой формой стало построенное по принципам кросс-возрастного исследовательского сообщества школьное проектно-исследовательское бюро. Выбор формы, в свою очередь, влияет и на структуру сети.

Структурный уровень задается содержательными, функциональными, организационными связями между участниками сетевого взаимодействия.

Системосвязующие отношения (ССО) при организации исследовательской и проектной деятельности определялись:

1) разработкой и реализацией программы «Проектно-исследовательская вертикаль», обеспечивающей пролонгированное преемственное формирование исследовательских и проектных умений от поддержки исследовательского поведения детей дошкольного возраста до квазипрофессиональных проектов старшеклассников и научного волонтерства студентов и аспирантов. Программа конструировалась по модулям, последовательное освоение которых и предоставляет возможность формирования исследовательской и проектной деятельности. В рамках первого модуля «Знакомство» происходит диагностика познавательных интересов дошкольников и учащихся, их исследовательских способностей и опыта проектной работы, включение в краткосрочные мотивационные исследования и проекты под руководством наставников. Следующий модуль «Открытие» знакомит с учебными исследованиями и проектами как инструментами познания и развития, демонстрирует актуальность исследовательских и проектных практик. Третий модуль «Технологии» расширяет приемы исследовательской и проектной работы посредством овладения, например, элементами компьютерного моделирования, 3D-прототипирования, VR-технологиями, умениями работы с лазерным гравером, фрезерным станком и другим оборудованием. Модуль «Погружение» предполагает максимально самостоятельное выполнение исследования или проекта в соответствии с выбранной обучающимся проблемой. Заключительный модуль «Город» дает возможность выполнения с учетом реального или потенциального социального заказа исследования или проекта, имею-

щего высокую практическую значимость в городской инфраструктуре. Предусмотрена также другая последовательность освоения модулей в зависимости от потребностей и возможностей обучающихся;

2) стратегией развития исследовательской и проектной деятельности по «горизонтали», когда в рамках одного модуля происходит, например, увеличение самостоятельности обучающихся, исследовательская или проектная работа в различных предметных областях, участие в коллективном или групповом проекте, при выполнении которых происходит обогащение проектно-исследовательского опыта обучающихся, освоение сопутствующих метаумений и soft skills;

3) содержательными и организационными доминантами исследовательской / проектной работы, например отбором внепрограммной математической теории, необходимой для выполнения конкретного проекта, и его методической обработкой для быстрого и автономного изучения участниками проектной группы, необходимостью привлечения партнеров и их ресурсов для работы над конкретными исследованиями или проектами;

4) общей территориальной субкультурой, важной при создании, например, социально значимых проектных продуктов, осознанием субъектами взаимодействия своей социально-педагогической общности, возможностью планирования обучающимися своего образовательного и профессионального маршрута применительно к конкретным организациям дополнительного, профессионального образования, предприятиям, которые, в свою очередь, также могут сопровождать ребят от школьной скамьи до трудоустройства.

Взаимосвязи между участниками сети также определяются уровнем и качеством профессионального нетворкинга, этикой отношений и коммуникаций, основанной на следующих принципах.

Принцип личностной значимости предполагает, что проблема, на решение которой нацелено сетевое взаимодействие, является значимой для всех участников сети и они готовы внести свой личный вклад в решение этой проблемы. Солидарная ответственность в формулировании общей цели, общей системы ценностей, путей и способов их достижения, объединении ресурсов, разделении рисков.

Принцип социальной ответственности в широком смысле обеспечивает солидарную поддержку и стимулирование проектно-исследовательской деятельности, объединение ресурсов, разделение рисков. В узком смысле означает ценность исследуемой обучающимися проблемы для определенного микросоциума.

Трактовка принципа открытости многозначна и предполагает, с одной стороны, большую гибкость и персонификацию взаимодействия в связи с потребностями и возможностями обучающегося, учет влияния на развитие ребенка его окружения, ориентацию на его будущее; с другой стороны, прозрачность педагогического воздействия со стороны разных участников сети, предоставление информации о своей деятельности другим, доступность информации о деятельности других участников, в том числе с использованием информационных каналов партнеров; с третьей стороны, возможность включения в сеть новых участников, причем не только образовательных организаций, но и всех заинтересованных компетентных лиц, учреждений, ведомств.

Принцип инициативности интерпретируется как возможность проявления каждым участником сети собственной инициативы, в том числе инициативы «снизу», исходящей от учеников или студентов, однако каждая инициатива подлежит коллективной оценке, возможной поддержке или корректировке.

Непосредственная реализация сетевого взаимодействия в форматах сетевых событий – исследований, проектов, профессиональных смен, педагогических практик, клубов, каникулярия, дней погружения в профессию и прочих мероприятий – осуществляется уже на личностном уровне, конкретными людьми. Именно здесь в конечном счете реализуется уровень элементов системы (ЭС), представленной разнообразием задач, форм, средств, способов общей согласованной деятельности, обеспечивающей сотрудничество.

В профессиональном нетворкинге важно, чтобы отношения были взаимовыгодными. Результативность сетевого взаимодействия на личностном уровне также связана с командной работой. Синергетический эффект усиливается, если, например, от школы в команду входят учителя различных предметов, педагоги дополнительного образования, кураторы проектной деятельности, организаторы внутришкольного мониторинга, заместители руководителей. От вуза – не только преподаватели и студенты, но и сотрудники деканата, лаборанты, научные работники. Это позволяет расширить ассортимент и контингент сетевых программ и мероприятий, выстроить оптимальный сценарий сотрудничества, трансформировать опыт сетевого взаимодействия в ресурс развития образовательной организации.

На основании анализа распространенных сетевых образовательных моделей выделим дополнительные свойства, не столько идейно, сколько конструктивно определяющие структуру сети:

- протяженность (например, организации одного района, муниципалитета, региона и т. д.);
- охват (в сеть входят однотипные образовательные организации, или учреждения различных ведомств: просвещения, образования, науки, спорта, культуры, здравоохранения и пр.);
- стратегия управления: иерархия, партнерство, функциональное, проектное, матричное управление и др.;
- выделенность из среды (название, наличие документов, регламентирующих сетевое взаимодействие, органы управления, единое финансирование, помещение для сетевых мероприятий, совместный цифровой информационно-образовательный ресурс и др.).

Схематично описанные выше закономерности организации сетевого взаимодействия на основе системного подхода представлены на рис. 2.

Рис. 2. Сетевое взаимодействие как система

Как свидетельствует изучение практики организации сетевого взаимодействия в сфере образования, наиболее распространенным является сотрудничество однотипных организаций, например разных школ города, района, округа. Автор данной статьи и сам выступал научным руководителем сетевой региональной опытно-экспериментальной площадки по повышению качества общего математического образования, в рамках работы которой школы различной направленности (социально-экономической, гуманитарной, инженерно-технической, естественно-научной) работали по единому плану, разделяя между собой содержательно и технологически зоны ответственности и решая разными инструментами одни задачи. Это способствовало диверсификации форм и содержания, вариативности и адаптивности разработанных учебных и методических материалов для разного контингента учащихся и учителей, реализации сетевых технологий на уровне учеников, педагогических коллективов, администраций. Однако реализовать инновационную содержательную интеграцию математической теории и практики, учебы и профессии в полной мере не удалось. Для этого остро ощущалась необходимость привлечения в сетевое сообщество разноуровневых, разноведомственных организаций.

По результатам наших наблюдений, для современных школьников, казалось бы, привычная триада школьная математика – высшая математика – прикладные, профессиональные, например, инженерные аспекты математики – становится неочевидной, не связанной друг с другом, растянутой во времени и слишком отсроченной перспективой. Школьники в своем большинстве не имеют своевременной практической возможности убедиться в том, что знания, которые приобретаются в школе, составляют фундамент, на котором выстраиваются и обогащаются углубленные предметные или специальные знания и умения, формируются профессиональные компетентности специалистов. Учитель тоже может предложить лишь упрощенное, теоретизированное представление об использовании, например, математики в различных профессиях, несмотря на весомый «математический портфель» многих специальностей. Хотя общеизвестно, что, скажем, в основе компетенций инженера лежат фундаментальные математические знания и методы: математическая обработка информации, различные виды анализа данных, математическое моделирование, расчеты, составления и отслеживания изменения различных величин, прогнозирование развития технических процессов и пр. Но педагог для иллюстрации ученикам применения этих знаний в инженерном деле должен владеть спецификой другой профессии и уметь адаптировать этот материал на доступный для понимания учащимися уровень. Учителя, имеющее второе образование, освоившие программу переподготовки, закончившие бакалавриат или магистратуру не только по педагогическим направлениям, в данном вопросе имеют более выигрышные позиции, позволяющие применять для прикладных и профориентирующих задач предыдущий профессиональный опыт.

Таким образом, межведомственное сетевое взаимодействие позволяет усилить не только организационные, но и содержательные факторы повышения качества математического образования за счет:

- обеспечения развивающего уровня математической подготовки в соответствии с образовательными и профориентационными потребностями и возможностями обучающихся;

- установления межпредметных фактологических и методологических связей математики с другими областями знаний, обогащения предметного содержания практико-ориентированными заданиями, прикладными модулями, квазипрофессиональными проектами, применения математических методов в современных технологиях;

- формирования на математическом и межпредметном содержании актуальных видов познавательной деятельности, в частности исследовательской и проектной деятельности, в том числе в сетевой форме, использования математических методов при выполнении исследований и проектов;

- повышения квалификации учителей посредством расширения и обновления их профессионального поля.

Указанные направления соответствуют тенденциям, описанным в Концепции развития математического образования в Российской Федерации [6]. Дополнительно стимулирует выстраивание образовательно-профориентационного сетевого пространства необходимость реализации введенного с текущего учебного года в школах профминимума [7]. Что еще раз подтверждает своевременность, действенность, согласованность сетевого взаимодействия системным изменениям в образовании, результативность и даже опережающий эффект в достижении многоаспектных образовательных результатов.

Однако при таком, как называют некоторые авторы, «вертикальном сетевом взаимодействии» [8] обостряются и проблемные зоны, его сопровождающие. Наиболее чувствительными из них являются:

- заимствование не только достоинств, но и недостатков участников сетевого взаимодействия;
- желание работать в сети, но без учета интересов и возможностей друг друга;
- ограниченное согласие партнеров делиться своими кадровыми и материально-техническими ресурсами;
- несоблюдение обязанностей и договоренностей;
- необходимость общей координации, но ограниченное влияние на партнеров.

И даже разработка организационно-управленческой документации в соответствии с Приказом Министерства науки и высшего образования и Министерства просвещения [9], согласованных образовательных и развивающих программ лишь отчасти нивелирует названные проблемы.

Вариативная конкретизация описанных в статье характеристик и уровней сетевого взаимодействия, их наполнение определенным содержанием, формами позволяет проектировать различные модели сетевого взаимодействия. Приведем еще одну апробированную автором модель сетевой организации исследовательской и проектной деятельности обучающихся.

Объединяющей целью стала разработка научно обоснованного учебно-методического сопровождения проектной деятельности обучающихся и методической поддержки педагогов. Примечательно, что работа велась в формате сетевого проекта, предполагающего создание, наполнение, апробацию, тиражирование, внедрение, использование электронного образовательного ресурса «Азбука проектов» [10]. Данный ресурс уже на протяжении нескольких лет подкрепляет свое название и применительно к обучающимся, предлагая проекты для различных предметных областей, ребят разного возраста и уровня подготовки, последовательно формируя с помощью навигатора по проектной деятельности и рефлексивных технологий их компетентности выполнять различные виды проектов от информационных до исследовательских. И применительно к преподавателям, предлагая дифференцированные возможности организации проектно-исследовательской деятельности – от банка готовых методических разработок проектов, использования автоматизированных методических инструментов для учителей (конструктор разработки проектов, балльная оценка проекта, рефлексивная технология для самоанализа учителем организации им проектной деятельности), к созданию собственной системы проектов. Более детально структура и содержание ресурса представлены в [11].

Определение научно-методических основ и структурных идей данного ресурса выполнялось автором статьи. В разработке и руководстве отдельными проектами принимали участие как магистранты, так и практикующие учителя разных школ, объединенные форматом опытно-экспериментальной работы.

Созданные материалы включены в учебно-методическое обеспечение ряда дисциплин магистерских программ педагогического образования, в частности математического образования (Организация исследовательской деятельности учащихся при обучении математике, Руководство проектной деятельностью учащихся при изучении математики, Содержательно-методическое обеспечение проектной и исследовательской математической деятельности, Организация проектно-исследовательской деятельности школьников по математике и др.), педагогические практики, программы повышения квалификации педагогов, курирования проектной деятельностью учащихся школами-партнерами, экспертную оценку различных конкурсов проектов.

При этом важна не пассивная демонстрация материалов сайта, а включение по договоренности со школами-партнерами магистрантов в уже осуществляемые проекты, разработка студентами авторских краткосрочных экспресс-проектов для школьников и руководство ими, выполнение студентами собственных индивидуальных и групповых исследований по проблемам математического образования, супервизия учителей Санкт-Петербурга, Екатеринбурга, Чеченской Республики, Беларуси со стороны более опытных педагогов-руководителей проектов. О востребованности ресурса свидетельствуют и случайно обнаруженные нами независимые рекомендации на различных профессиональных порталах [12; 13].

3. Результаты

В ходе исследования мы пришли к выводам о том, что сетевое взаимодействие содержательно и организационно обогащает образовательный процесс, в частности математическое образование, но сопровождается проблемными зонами и рисками. Для усиления первых и минимизации последних целесообразно конструирование образовательной сети на основе системного подхода, определяющего концептуальный, структурный и элементный уровни сетевого взаимодействия. На базисе выделенных в статье положений смоделированы, апробированы, описаны online- и offline-сетевые сообщества организации исследовательской и проектной деятельности обучающихся.

Полученные результаты могут служить основой для построения эффективного сетевого взаимодействия в сфере образования.

Заключение

Достижение комплексных многофакторных образовательных результатов во всей их полноте для каждого обучающегося невозможно обеспечить силами только одного образовательного учреждения. Использование системного подхода в качестве методологической основы организации сетевого взаимодействия позволяет выстроить многомерное, полифункциональное образовательно-исследовательское пространство, в котором проявляется и усиливается влияние различных факторов и других пространств (предметного, информационного, социокультурного и пр.) на процесс личного и профессионального развития, самоопределения и самореализации не только обучающегося, но и всех участников сети.

Реализация такого сетевого взаимодействия в математической подготовке обучающихся содействует не только интенсификации и диверсификации математического образования, но и соблюдению важных в обучении математике принципов научности, последовательности, системности, индивидуализации, связи теории с практикой и других, поддерживающих качество математического образования.

Сетевое взаимодействие также способствует развитию академической мобильности обучающихся, целенаправленной подготовке их к получению многокомпонентного образования, непрерывного образования, самообразования. Академическая мобильность как характеристика личности предполагает готовность и способность обучающихся использовать различные ресурсы для удовлетворения своих познавательных потребностей и расширения образовательных возможностей, открытость к познанию, направленность на осознанное построение вариативного индивидуального образовательного маршрута.

Список источников

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№-287-от-31.05.2021-ФГОС_ООО.pdf (дата обращения: 15.02.2024).

2. Атлас новых профессий 3.0. / под ред. Д. Варламовой, Д. Судакова. М.: Интеллектуальная литература, 2020. 456 с.

3. **Коротаева Е. В.** Теория и практика педагогических взаимодействий : учебник и практикум для вузов. М: Юрайт, 2021. 241 с.

4. Образовательная динамика сетевой личности : сборник трудов IV научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 28 января 2021 г. / ред.: А. А. Ахаян, Е. В. Пискунова; Письма в Эмиссия.Оффлайн (The Emissia. Offline Letters). СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2021. Т. 2: Методическое приложение. 127 с.

5. **Швецов М. Ю., Алдар Л. Д.** Сетевое взаимодействие образовательных учреждений профессионального образования в регионе // *Ученые записки Забайкальского государственного университета. Сер.: Педагогика и психология.* 2012. С. 33–38.

6. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/ (дата обращения: 16.02.2024).

7. Об утверждении Порядка осуществления мероприятий по профессиональной ориентации обучающихся по образовательным программам основного общего и среднего общего образования: приказ Минпросвещения России от 31 августа 2023 г. № 650 [Электронныи ресурс]. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/53d3c69503ab48125815993c075256b0/ (дата обращения: 15.02.2024).

8. **Бугрова Н. С.** Сетевые модели как тенденция развития повышения квалификации педагогических кадров в современной России // *Известия Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена.* СПб., 2007. № 17 (43). Ч. 2: Педагогика и психология, теория и методика обучения. С. 50–53.

9. Об организации и осуществлении образовательной деятельности при сетевой форме реализации образовательных программ: приказ Министерства науки и высшего образования РФ и Министерства просвещения РФ от 5 августа 2020 г. № 882/391 [Электронный ресурс]. URL: https://base.garant.ru/74626602/ (дата обращения: 15.02.2024).

10. Азбука проектов [Электронный ресурс]. URL: http://azbukaproektov.ru (дата обращения: 15.02.2024).

11. **Клещева И. В., Микляева И. В., Овчинников Т. А.** Азбука проектов // *Петербургская школа: инновации.* СПб.: НКТ, 2019. С. 48–55.

12. Высшая лига образования «Саммит» [Электронный ресурс]. URL: https://sammitportal.ru/teachers/project/link.php?ELEMENT_ID=3156 (дата обращения: 14.03.2024).

13. Будни учителя начальных классов [Электронный ресурс]. URL: http://lapbook.sch66.minsk.edu.by/ru/main.aspx?guid=23631 (дата обращения: 14.03.2024).

References

1. *Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya* [Federal state educational standard of basic general education] [Electronic resource] Available at: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№-287-от-31.05.2021-ФГОС_ООО.pdf (accessed: 15.02.2024). (In Russ.)

2. *Atlas novykh professii 3.0* [Atlas of new professions 3.0]. Ed. D. Varlamova, D. Sudakova. Moscow: Intellectual literature, 2020. 456 p. (In Russ.)

3. **Korotayeva Ye. V.** *Teoriya i praktika pedagogicheskikh vzaimodeystviy : uchebnik i praktikum dlya vuzov* [Theory and practice of pedagogical interactions : textbook and workshop for universities]. Moscow: Yurayt, 2021. 241 p. (In Russ.)

4. *Obrazovatel'naya dinamika setevoy lichnosti : sbornik trudov IV nauchno-prakticheskoy konferentsii, Sankt-Peterburg, 28 yanvarya*

2021 goda [Educational dynamics of network personality: collection of proceedings of the IV scientific and practical conference, St. Petersburg, January 28, 2021]. Editors: A. A. Akhayan, E. V. Piskunova; Letters to The Emissia. Offline Letters. St. Petersburg: Publishing House of the Russian State Pedagogical University named after A. I. Herzen, 2021. Vol. 2: Methodological application. 127 p. (In Russ.)

5. **Shvetsov M. Yu., Aldar L. D.** Network interaction of educational institutions of vocational education in the region. *Uchenyye zapiski Zabaykal'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika i psikhologiya* [Scientific notes of the Transbaikal State University. Ser.: Pedagogy and psychology]. 2012. Pp. 33–38. (In Russ.)

6. *Kontseptsiya razvitiya matematicheskogo obrazovaniya v Rossiyskoy Federatsii* [Concept of development of mathematical education in the Russian Federation] [Electronic resource]. Available at: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/ (accessed: 16.02.2024). (In Russ.)

7. *Ob utverzhdenii Poryadka osushchestvleniya meropriyatiy po professional'noy oriyentatsii obuchayushchikhsya po obrazovatel'nym programmam osnovnogo obshchego i srednego obshchego obrazovaniya: prikaz Minprosveshcheniya Rossii ot 31 avgusta 2023 g. № 650* [On approval of the Procedure for implementing activities for professional guidance of students in educational programs of basic general and secondary general education: Order of the Ministry of Education of Russia dated August 31, 2023 No 650] [Electronic resource]. Available at: https://docs.edu.gov.ru/document/53d3c69503ab48125815993c075256b0/ (accessed: 15.02.2024). (In Russ.)

8. **Bugrova N. S.** Network models as a trend in the development of advanced training of teaching staff in modern Russia. *Izvestiya Rossiyskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni A. I. Gertsena* [News of the Russian State Pedagogical University named after A. I. Herzen]. St. Petersburg, 2007. No 17 (43). Part 2: Pedagogy and psychology, theory and teaching methods. Pp. 50–53. (In Russ.)

9. *Ob organizatsii i osushchestvlenii obrazovatel'noy deyatel'nosti pri setevoy forme realizatsii obrazovatel'nykh programm: prikaz Ministerstva nauki i vysshego obrazovaniya RF i Ministerstva*

prosveshcheniya RF ot 5 avgusta 2020 g. № 882/391 [On the organization and implementation of educational activities in the network form of implementation of educational programs: Order of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation and the Ministry of Education of the Russian Federation of August 5, 2020 No 882/391] [Electronic resource]. Available at: https://base.garant.ru/74626602/ (accessed: 15.02.2024). (In Russ.)

10. *Azbuka proyektov* [ABC of projects] [Electronic resource]. Available at: http://azbukaproektov.ru (accessed: 15.02.2024). (In Russ.)

11. **Kleshcheva I. V., Miklyaeva I. V., Ovchinnikov T. A.** ABC of projects. *Peterburgskaya shkola: innovatsii* [Petersburg school: innovations]. St. Petersburg: NKT, 2019. Pp. 48–55. (In Russ.)

12. *Vysshaya liga obrazovaniya "Sammit"* [Major League of Education "Summit"] [Electronic resource]. Available at: https://sammitportal.ru/teachers/project/link.php?ELEMENT_ID=3156 (accessed: 14.03.2024). (In Russ.)

13. *Budni uchitelya nachal'nykh klassov* [Everyday life of a primary school teacher] [Electronic resource]. Available at: http://lapbook.sch66.minsk.edu.by/ru/main.aspx?guid=23631 (accessed: 14.03.2024). (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Клещева Ирина Валерьевна / Irina V. Kleshcheva
к.пед.н., доцент кафедры методики обучения математике и информатике / PhD (Pedagogics), Associate Professor of the Department of Teaching Methods in Mathematics and Computer Science
Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена / Herzen State Pedagogical University of Russia
191186, Россия, Санкт-Петербург, набережная реки Мойки, 48 / 191186, Russia, St. Petersburg, embankment of the Moika River, 48

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 19.02.2024
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 17.03.2024
Принято к публикации / Accepted for publication 20.03.2024

Contents

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 1 (50) 2024

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет Е. Н. Старцевой
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 12.04.2024. Дата выхода в свет 15.05.2024.
Формат $70 \times 108 \frac{1}{16}$.
Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 11.1
Тираж 30 экз. Заказ № 31.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru