Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 519.652

Кратномасштабный анализ в пространстве квадратично суммируемых дискретных сигналов [1]

А.Б. Певный

Понятие кратномасштабного анализа играет важную роль в теории вейвлетов. В работе строится нестационарный кратномасштабный анализ в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$. Такой случай интересен с точки зрения цифровой обработки сигналов

1. Введение. Понятие кратномасштабного анализа (КМА) в $L^2(\mathbb{R})$ ввел и исследовал С. Малла в 1989 г. В настоящее время теория КМА в $L^2(\mathbb{R})$ приводится во многих статьях и книгах (см., например, [1, 2, 3]). Напомним определение КМА [3]: кратномасштабный анализ – это последовательность $\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ замкнутых подпространств $L^2(\mathbb{R})$ таких, что $V_k \subset V_{k+1}$; замыкание объединения всех V_k есть $L^2(\mathbb{R})$; пересечение всех V_k содержит только 0;

$$f(x) \in V_k \Longleftrightarrow f(2^{-k}x) \in V_0; \tag{1}$$

существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_0.

Ввиду (1) задание V_0 определяет все пространства V_k.

Нашей целью является построение КМА в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ всех последовательностей $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x(j)|^2 < \infty$. Здесь возникает сложность со свойством (1), ибо $2^{-k}j$ может быть не целым числом. Будет построен нестационарный КМА $\{V_k\}_{k\geq 0}$ в $\ell^2(\mathbb{Z})$, в котором подпространства V_k состоят из дискретных сплайнов. Нестационарность заключается в том, что в каждом V_k найдется своя функция φ_k такая, что система $\{\varphi_k(\cdot - l2^k) : \ l \in \mathbb{Z}\}$ образует базис Рисса

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 02-01-00084)

в V_k. Соответственно система вейвлетов $\psi_{kl}(j) = \psi_k(j - l2^k)$, $l \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots$, не порождается растяжениями и сдвигами одной функции. Для постранства $L^2(\mathbb{R})$ нестационарный КМА построен в [4], но наша основная идея другая – в качестве V_k брать пространства дискретных сплайнов $\mathbf{S}_{p,2^k}$ (определение пространств $\mathbf{S}_{p,n}$ см. в п. 5).

2. Дискретные B-сплайны определяются [5, 6, 7] на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Зафиксируем натуральные p, n. Определим дискретные B-сплайны $B_{1,n}(j), \ldots, B_{p,n}(j)$ $(j \in \mathbb{Z})$ следующим образом. Положим

$$B_{1,n}(j) = \begin{cases} 1, & j \in 0 : n-1, \\ 0, & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Здесь $0 : n-1$ — множество целых чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Далее используем рекуррентное определение $B_{r,n} = B_{1,n} * B_{r-1,n}$, $r \in 2 : p$, или $B_{r,n}(j) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{r-1,n}(j-k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $r = 2, \ldots, p$. Впервые такое определение появилось в работах [10, 11].

B-сплайн $B_{p,n}$ обладает свойствами: $B_{p,n}(\ p(n-1) - j\ ) = B_{p,n}(j)$ для любого целого j; $B_{p,n}(j) > 0$ при $j \in 0 : p(n-1)$, $B_{p,n}(j) = 0$ при остальных j. В частном случае $n = 1$ получаем

$$B_{p,1}(j) = \delta(j) := \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В дальнейшем понадобится также свойство

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{p,n}(j - kn) B_{p,n}(j - ln) = B_{2p,n}(\ p(n-1) - (k-l)n\ ). \qquad (2)$$

3. Полиномы Эйлера-Фробениуса. Определим тригонометрический полином, который будет играть важную роль в дальнейшем.

Предположим, что число $\nu = p(n-1)/2$ является целым (точка ν — это середина носителя B-сплайна $B_{p,n}$). Положим $b_p(k) = B_{p,n}(\nu + kn)$. Заметим, что $b_p(-k) = b_p(k)$ и $b_p(k)$ отлично от нуля если $|k| \le \mu := [\nu/n] = [p(n-1)/(2n)]$, где $[\alpha]$ означает целую часть α.

Четный тригонометрический полином

$$T_{p,n}(x) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} b_p(k) e^{ikx} = b_p(0) + 2 \sum_{k=1}^{\mu} b_p(k) \cos kx$$

называется полиномом Эйлера-Фробениуса (см. аналогичное определение в [12]). Основное свойство этих полиномов — положительность для всех x.

Лемма 1. *Полином $T_{p,n}(x)$ строго положителен для всех x. Полином $T_{2p,n}$ четного порядка $2p$ допускает оценку*

$$T_{2p,n}(x) \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p} n^{2p-1}, \ x \in (-\infty, \infty). \tag{3}$$

Первое утверждение установлено в [6, 7], второе— в [5].

4. Экспоненциальные сплайны. По-прежнему предполагаем число $\nu = p(n-1)/2$ целым. Рассмотрим экспоненциальные сплайны

$$E_{p,n}(x,j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilx} B_{p,n}(j - ln). \tag{4}$$

При каждом $j \in \mathbb{Z}$ в сумме (4) не более p ненулевых слагаемых, поэтому при фиксированном j функция $E_{p,n}(x,j)$ является тригонометрическим полиномом от x. При этом $|E_{p,n}(x,j)| \leq C_{p,n} := pB_{p,n}(\nu)$. Аналогичные сплайны непрерывного аргумента рассматривались И. Шенбергом в [12], с. 17. Отметим сдвиговое свойство

$$E_{p,n}(x, j - kn) = e^{ikx} E_{p,n}(x,j). \tag{5}$$

В точке $j = \nu := p(n-1)/2$ равенство (4) принимает вид

$$E_{p,n}(x,\nu) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_p(-l) e^{-ilx} = T_{p,n}(x) > 0. \tag{6}$$

В силу (2) $B_{p,n}(j + ln)$ является коэффициентом Фурье функции $E_{p,n}(\cdot, j)$, в частности (при $l = 0$)

$$B_{p,n}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{p,n}(x,j)\,dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

5. Дискретные сплайны. Дискретным сплайном порядка p назовем функцию

$$S(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l) B_{p,n}(j - ln), \tag{8}$$

где последовательность $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Множество таких сплайнов обозначим $\mathbf{S}_{p,n}$. При $n = 1$ будет $\mathbf{S}_{p,1} = \ell^2(\mathbb{Z})$.

Вопрос о сходимости ряда (8) не стоит, так как при каждом j в (8) не более p ненулевых слагаемых. Если $j \in kn : (k+1)n - 1$, то

$S(j)=\sum_{l=k-p+1}^{k} c(l)B_{p,n}(j-ln)$. Последнее выражение на $kn:(k+1)n-1$ совпадает с некоторым полиномом $P_k(j)$ степени $\le p-1$.

Определим функцию $C(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l)e^{ilx}$ из $L^2(0,2\pi)$. Тогда

$$S(j)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(x)E_{p,n}(x,j)\,dx. \qquad (9)$$

Такое интегральное представление сплайна будет систематически использоваться в дальнейшем. Функцию $C(x)$ будем называть *плотностью,* соответствующей сплайну $S(j)$.

6. Равенство Парсеваля.

Теорема 1. *Всякий сплайн $S\in \mathbb{S}_{p,n}$ принадлежит пространству $\ell^2(\mathbb{Z})$. Если есть два сплайна $S,R\in\mathbb{S}_{p,n}$ с плотностями $C(x),D(x)$ соответственно, то справедливо равенство Парсеваля*

$$\langle S,R\rangle:=\sum_{j\in\mathbb{Z}} S(j)\overline{R(j)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(x)\overline{D(x)}T_{2p}(x)\,dx, \qquad (10)$$

в частности

$$\|S\|^2:=\sum_{j\in\mathbb{Z}}|S(j)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|C(x)|^2T_{2p}(x)\,dx. \qquad (11)$$

Здесь T_{2p} — полином Эйлера-Фробениуса порядка $2p$.

Доказательство. Имеем

$$S(j)\overline{R(j)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{D(x)[\overline{E_{p,n}(x,j)}S(j)]}\,dx.$$

Для произвольного натурального N рассмотрим суммы

$$\sigma_N(x)=\sum_{j=-N}^{N}\overline{E_{p,n}(x,j)}S(j)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}c(l)\sum_{j=-N}^{N}\overline{E_{p,n}(x,j)}B_{p,n}(j-ln), \qquad (12)$$

где последовательность $\{c(l)\}$ коэффициентов сплайна $S(j)$ принадлежит $\ell^2(\mathbb{Z})$. Имеем

$$\overline{E_{p,n}(x,j)}B_{p,n}(j-ln)=\sum_{k=l-p}^{l+p}e^{ikx}B_{p,n}(j-kn)B_{p,n}(j-ln). \qquad (13)$$

Отметим, что $B_{p,n}(j-kn)B_{p,n}(j-ln)=0$ при $|kn-ln|>p(n-1)$. Это выполняется при $|k-l|>p$. Поэтому в (13) суммируем только по $k\in l-p:l+p$.

Просуммируем (13) по $j \in -N:N$. Получим

$$\sum_{j=-N}^{N} \overline{E_{p,n}(x,j)} B_{p,n}(j-ln) = \sum_{k=l-p}^{l+p} e^{ikx} A_N(k,l) = e^{ilx} \sum_{\lambda=-p}^{p} e^{i\lambda x} A_N(l+\lambda,l),$$

где

$$A_N(k,l) = \sum_{j=-N}^{N} B_{p,n}(j-kn) B_{p,n}(j-ln).$$

По свойству (2) $A_N(k,l) = b_{2p}(k-l)$, если $-N:N$ содержит носители B-сплайнов $B_{p,n}(j-kn)$ и $B_{p,n}(j-ln)$. Это будет выполнено при $N > \max\{(|l|+p)n, (|k|+p)n\}$.

В итоге получаем

$$\sigma_N(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c(l) e^{ilx} \sum_{\lambda=-p}^{p} e^{i\lambda x} A_N(l+\lambda,l).$$

При этом $A_N(l+\lambda,l) = b_{2p}(\lambda)$ при $N > (|l|+2p)n$.

Покажем, что $\sigma_N \to CT_{2p}$ при $N \to \infty$ по норме $L^2(0,2\pi)$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_N - CT_{2p}\|_{L^2(0,2\pi)} = \\
&= \left\| \sum_{l\in\mathbb{Z}} c(l) e^{ilx} \sum_{\lambda=-p}^{p} e^{i\lambda x} A_N(l+\lambda,l) - C(x) \sum_{\lambda=-p}^{p} e^{i\lambda x} b_{2p}(\lambda) \right\|_{L^2(0,2\pi)} = \\
&= \left\| \sum_{\lambda=-p}^{p} e^{i\lambda x} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c(l) e^{ilx} [A_N(l+\lambda,l) - b_{2p}(\lambda)] \right\|_{L^2(0,2\pi)} \le \\
&\le \sum_{\lambda=-p}^{p} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| e^{i\lambda x} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c(l) e^{ilx} [A_N(l+\lambda,l) - b_{2p}(\lambda)] \right|^2 dx \right\}^{1/2} = \\
&= \sum_{\lambda=-p}^{p} \left\{ 2\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c(l)|^2 [A_N(l+\lambda,l) - b_{2p}(\lambda)]^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Имеем $b_{2p}(\lambda) - A_N(l+\lambda,l) = 0$ при $N > (|l|+2p)n$, т.е. при $|l| < N/n - 2p$. Кроме того,

$$0 \le b_{2p}(\lambda) - A_N(l+\lambda,l) \le b_{2p}(\lambda) \le B_{2p}(p(n-1)) \quad \forall \lambda \in -p:p.$$

Поэтому найдется константа K такая, что

$$\|\sigma_N - CT_{2p}\|^2 \le K \sum_{|l|\ge N/n-2p} |c(l)|^2 \to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Обратимся к равенству

$$\sum_{j=-N}^{N} S(j)\overline{R(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{D(x)}\sigma_N(x)\,dx.$$

Правая часть имеет предел при $N\to\infty$. Поэтому левая часть равенства также имеет предел:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} S(j)\overline{R(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(x)\overline{D(x)}T_{2p}(x)\,dx.$$

Получили (10). При $R = S$ получаем (11). По ходу доказательства установлено, что $S\in\ell^2(\mathbb{Z})$. ■

Замечание. Доказанное равенство Парсеваля для сплайнов в непрерывном случае установлено В.А. Желудевым [8] (в другой форме и с другим доказательством).

Следствие 1. Подпространство $\mathbf{S}_{p,n}$ замкнуто (по норме пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$).

Доказательство. Рассмотрим последовательность сплайнов $S_m\in\mathbf{S}_{p,n}$, $S_m\to f$ при $m\to\infty$. Нужно доказать, что $f\in\mathbf{S}_{p,n}$. Последовательность $\{S_m\}$ сходится в себе, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется N такое, что $\|S_l - S_m\| < \varepsilon$ при всех $l,m > N$. Поскольку S_m представляется в виде

$$S_m(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_m(x)E_{p,n}(x,j)\,dx, \quad C_m\in L^2(0,2\pi),$$

то по доказанному равенству Парсеваля

$$\|S_l - S_m\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C_l(x) - C_m(x)|^2 T_{2p}(x)\,dx.$$

Но $T_{2p}(x)\ge\delta>0$ для всех $x\in[0,2\pi]$, поэтому

$$\|S_l - S_m\|^2 \ge \frac{\delta}{2\pi}\|C_l - C_m\|^2_{L^2(0,2\pi)}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{C_m\}$ сходится в себе в $L^2(0,2\pi)$ и, значит, сходится: $C_m \to C_* \in L^2(0,2\pi)$. Введем сплайн

$$S_*(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_*(x)E_{p,n}(x,j)\,dx.$$

По определению $S_* \in \mathbf{S}_{p,n}$. По равенству Парсеваля

$$\|S_m - S_*\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C_m(x) - C_*(x)|^2 T_{2p}(x)\,dx \to 0$$

при $m \to \infty$. Отсюда $f = \lim_{m\to\infty} S_m = S_*$ принадлежит $\mathbf{S}_{p,n}$. ∎

7. ТВ-сплайны и двойственные к ним сплайны

Рассмотрим сплайн вида

$$\varphi(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(x)E_{p,n}(x,j)dx, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

где функция ξ предполагается бесконечно дифференцируемой и 2π-периодической, т.е. $\xi \in C_{2\pi}^\infty$. Как отмечалось выше, функция φ представляется в виде

$$\varphi(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi(l)B_{p,n}(j - ln), \tag{15}$$

где $\xi(l)$ — коэффициенты Фурье функции $\xi(x)$. Поскольку $\xi \in C_{2\pi}^\infty$, то коэффициенты $\xi(l)$ убывают при $l \to \infty$ быстрее любой степени $1/l$, а тогда и $\varphi(j)$ убывает при $j \to \infty$ быстрее любой степени $1/j$.

Сплайн φ называется ТВ-сплайном, если сдвиги $\{\varphi(\cdot - kn) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ образуют базис в пространстве сплайнов $\mathbf{S}_{p,n}$, т.е. всякий сплайн $S \in \mathbf{S}_{p,n}$ разлагается в ряд

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(j - kn),$$

сходящийся для каждого $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2 [5]. *Если $\xi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то сплайн φ является ТВ-сплайном.*

Справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\xi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда система $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в $\mathbf{S}_{p,n}$, т.е. выполнены следующие свойства:*

1) любой сплайн $S \in \mathbb{S}_{p,n}$ разлагается в ряд

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(\cdot - kn), \tag{16}$$

сходящийся в $\ell^2(\mathbb{Z})$. При этом последовательность $c = \{c(k)\}$ принадлежит $\ell^2(\mathbb{Z})$;

2)существуют числа $A, B > 0$ такие, что для любой последовательности $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ выполнены неравенства

$$A\|c\|^2 \le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k)\varphi(\cdot - kn) \right\|^2 \le B\|c\|^2, \tag{17}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Докажем сначала 2). Возьмем произвольную последовательность $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Ряд

$$C_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)e^{ikx}$$

сходится в $L^2(0, 2\pi)$. Элемент C_0 принадлежит $L^2(0, 2\pi)$, т.е. является классом эквивалентных функций. Будем рассматривать какую-нибудь конкретную функцию $C_0(x)$ из этого класса.

Для дальнейшего потребуется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C_0(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 =: \|c\|^2. \tag{18}$$

Положим $C(x) = \xi(x)C_0(x)$. Тогда для сплайна $S(j) = \frac{1}{2\pi}\langle C, E_{p,n}(\cdot, j)\rangle$ по теореме 2 справедливо разложение в ряд

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(j - kn),$$

сходящийся для каждого $j \in \mathbb{Z}$. Нужно доказать, что найдутся $A, B > 0$ такие, что

$$A\|c\|^2 \le \|S\|^2 \le B\|c\|^2.$$

По равенству Парсеваля для сплайнов (11)

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C(x)|^2 T_{2p}(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\xi(x)|^2 T_{2p}(x)|C_0(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Положим

$$A = \min_{x\in[0,2\pi]} |\xi(x)|^2 T_{2p}(x), \quad B = \max_{x\in[0,2\pi]} |\xi(x)|^2 T_{2p}(x). \tag{19}$$

Очевидно, что $B \geq A > 0$ и

$$\frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C_0(x)|^2\,dx \leq \|S\|^2 \leq \frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C_0(x)|^2\,dx.$$

По равенству Парсеваля (18) $A\|c\|^2 \leq \|S\|^2 \leq B\|c\|^2$, что равносильно (17).

Докажем теперь сходимость ряда (16) в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Имеем

$$\varphi(j-kn) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\xi(x)E_{p,n}(x,j)\,dx.$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (10)

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_N(x)E_{p,n}(x,j)\,dx,$$

где

$$C_N(x) = \xi(x)\sum_{k=-N}^{N} c(k)e^{ikx}.$$

По равенству Парсеваля для сплайнов (11)

$$\begin{aligned}
\|S - S_N\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C(x) - C_N(x)|^2 T_{2p}\,dx = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{|k|>N} c(k)e^{ikx}\right|^2 |\xi(x)|^2 T_{2p}(x)\,dx \leq \\
&\leq \frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{|k|>N} c(k)e^{ikx}\right|^2 dx = B\sum_{|k|>N} |c(k)|^2 \to 0
\end{aligned}$$

при $N \to \infty$. ■

8. Двойственные ТВ-сплайны. ТВ-сплайны φ и ψ называются *двойственными*, если

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j-kn)\overline{\psi(j-qn)} = \delta(k-q), \quad k,q\in\mathbb{Z}, \tag{20}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Теорема 4 [5]. *Сплайны φ и ψ с плотностями $\xi(x)$ и $\eta(x)$ являются двойственными ТВ-сплайнами тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*

$$\xi(x)\overline{\eta(x)}T_{2p}(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Доказательство основано на равенстве Парсеваля (10).

Доказанная теорема позволяет легко строить пары двойственнных ТВ-сплайнов. Рассмотрим два важнейших случая.

1. *Самодвойственный ТВ-сплайн.* Получается при $\xi(x) = \eta(x) = 1/\sqrt{T_{2p}(x)}$. ТВ-сплайн $\varphi(j)$ получается вещественным и четным. Сдвиги $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис в $\mathbf{S}_{p,n}$.

2. *ТВ-сплайн, двойственный В-сплайну.* Согласно формуле (7) при $\xi(x) \equiv 1$ получаем $\varphi(j) = B_{p,n}(j)$. Двойственный ТВ-сплайн $\chi_{p,n}$ определяется формулой

$$\chi_{p,n}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{E_{p,n}(x,j)}{T_{2p}(x)}\,dx. \tag{22}$$

Здесь также $\chi_{p,n}$ веществен и четен относительно точки $\nu = p(n-1)/2$. Для любого сплайна $S \in \mathbf{S}_{p,n}$ справедливо разложение

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle S, \chi_{p,n}(\cdot - kn)\rangle B_{p,n}(j-kn), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для оценки коэффициентов этого ряда полезно оценить $\|\chi_{p,n}\|$. Воспользуемся равенством Парсеваля (11):

$$\|\chi_{p,n}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T_{2p}^2(x)} T_{2p}(x)\,dx.$$

В силу оценки (3)

$$\|\chi_{p,n}\| \le \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} n^{-2p+1}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p} n^{-p+1/2}. \tag{23}$$

9. Масштабирующее уравнение. Основой каждой вейвлетной конструкции является масштабирующее уравнение, связывающее сплайны с параметрами n и $2n$, а точнее связывающее $E_{p,2n}$ и $E_{p,n}$.

Теорема 5. *Справедливо тождество*

$$E_{p,2n}(x,j) = c\left(\frac{x}{2}\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2},j\right) + c\left(\frac{x}{2}+\pi\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2}+\pi,j\right), \tag{24}$$

где $c(x) = \frac{1}{2}(1+e^{ix})^p$.

Доказательство приведено в [9]. Оно основано на следующей лемме, имеющей самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$B_{p,2n}(j) = \sum_{r=0}^{p} C_p^r B_{p,n}(j-rn), \ j \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Доказательство приведено в [9].

Следствием из теоремы 5 является тождество

$$T_{2p,2n}(x) = 2\left|c\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2 T_{2p,n}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left|c\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|^2 T_{2p,n}\left(\frac{x}{2}+\pi\right). \tag{26}$$

(в обозначении полинома Эйлера-Фробениуса $T_{p,n}$ пишем теперь оба параметра p и n). Доказательство также приведено в [9].

Наряду с $\mathbf{S}_{p,n}$ рассмотрим пространство $\mathbf{S}_{p,2n}$ (с удвоенным n). Ввиду леммы 1 $\mathbf{S}_{p,2n}$ содержится в $\mathbf{S}_{p,n}$. По следствию 1 $\mathbf{S}_{p,2n}$ – замкнутое подпространство. Обозначим $\mathbf{W}_{p,2n}$ ортогональное дополнение к $\mathbf{S}_{p,2n}$ в пространстве $\mathbf{S}_{p,n}$. Тогда получим разложение $\mathbf{S}_{p,n} = \mathbf{S}_{p,2n} \oplus \mathbf{W}_{p,2n}$.

Наша ближайшая цель — получить представление элементов вейвлетного пространства $\mathbf{W}_{p,2n}$, а также получить конструктивный способ разложения сплайна $S_n \in \mathbf{S}_{p,n}$ на два ортогональных слагаемых.

10. Экспоненциальный вейвлет. Определим экспоненциальный вейвлет $W_{p,2n}$ по формуле

$$W_{p,2n}(x,j) = a\left(\frac{x}{2}\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2},j\right) + a\left(\frac{x}{2}+\pi\right) E_{p,n}\left(\frac{x+2\pi}{2},j\right), \tag{27}$$

где $a(x)$ выбирается так, чтобы $W_{p,2n}(x,\cdot)$ принадлежал пространству $\mathbf{W}_{p,2n}$ для всех x, т.е. чтобы для всех x выполнялись равенства

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} W_{p,2n}(x,j) B_{p,2n}(j-2kn) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

Вычисляя скалярные произведения по равенству Парсеваля (10), получим эквивалентное условие

$$a(x/2)I_0(x) + a(x/2+\pi)I_0(x+2\pi) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

где $I_0(x) = 2\overline{c(x/2)}T_{2p,n}(x/2)$. Положим $a(x) = e^{ix}I_0(2x+2\pi)$. Тогда (29) будет выполнено. Итак,

$$a(x) = 2e^{ix}\overline{c(x+\pi)}T_{2p,n}(x+\pi) = e^{ix}(1-e^{-ix})^p\, T_{2p,n}(x+\pi). \tag{30}$$

Экспоненциальный вейвлет (27) построен. Он обладает свойствами:

1. Для любого x сплайн $W_{p,2n}(x,\cdot)$ принадлежит $\mathbf{W}_{p,2n}$.

2. Для любого j функция $W_{p,2n}(\cdot,j)$ является бесконечно дифференцируемой 2π-периодической функцией.

3. $W_{p,2n}(x, j-2kn) = e^{ikx}W_{p,2n}(x,j) \quad \forall x, j, k.$

4. Всякая функция вида

$$R(j) = \int_0^{2\pi} D(x)W_{p,2n}(x,j)\,dx, \tag{31}$$

где $D \in L^2(0,2\pi)$, принадлежит пространству $\mathbf{W}_{p,2n}$.

Тот факт, что всякий элемент $R \in \mathbf{W}_{p,2n}$ представляется в виде (31), мы сможем доказать после того, как установим основную теорему о разложении $S_n \in \mathbf{S}_{p,n}$ на два ортогональных слагаемых.

11. Разложение пространства сплайнов

Теорема 6. *Пусть сплайн* $S_n \in \mathbf{S}_{p,n}$ *имеет вид*

$$S_n(j) = \langle C_n(x), E_{p,n}(x,j)\rangle := \int_0^{2\pi} C_n(x)E_{p,n}(x,j)\,dx,$$

где $C_n \in L^2(0,2\pi)$. *Тогда справедливо разложение*

$$S(j) = S_{2n}(j) + R_{2n}(j), \tag{32}$$

где $S_{2n} \in \mathbf{S}_{p,2n}$, $R_{2n} \in \mathbf{W}_{p,2n}$,

$$S_{2n}(j) = \langle C_{2n}(x), E_{p,2n}(x,j)\rangle, \quad R_{2n}(j) = \langle D_{2n}(x), W_{p,2n}(x,j)\rangle,$$

а плотности C_{2n}, D_{2n} *определяются по формулам*

$$C_{2n}(x) = \frac{C_n(\frac{x}{2})a(\frac{x}{2}+\pi) - C_n(\frac{x}{2}+\pi)a(\frac{x}{2})}{2\Delta(x/2)}, \tag{33}$$

$$D_{2n}(x) = \frac{-C_n(\frac{x}{2})c(\frac{x}{2}+\pi) + C_n(\frac{x}{2}+\pi)c(\frac{x}{2})}{2\Delta(x/2)}, \tag{34}$$

где $\Delta(x) = -e^{ix}T_{2p,2n}(2x)$, $a(x)$ *определено формулой (30), а* $c(x) = \frac{1}{2}(1+e^{ix})^p$. *При этом* $C_{2n}, D_{2n} \in L^2(0,2\pi)$. *По данным* C_{2n}, D_{2n} *плотность* $C_n(x)$ *определяется по формуле*

$$C_n(x) = 2[c(x)C_{2n}(2x) + a(x)D_{2n}(2x)]. \tag{35}$$

Доказательство. Запишем систему уравнений

$$E_{p,2n}(2x,j) = c(x)E_{p,n}(x,j) + c(x+\pi)E_{p,n}(x+\pi,j),$$
$$W_{p,2n}(2x,j) = a(x)E_{p,n}(x,j) + a(x+\pi)E_{p,n}(x+\pi,j),$$

вытекающие из (24) и (27). Найдем отсюда $E_{p,n}(x,j)$. Сначала вычислим определитель (используя (30) и (26))

$$\Delta(x) = c(x)a(x+\pi) - a(x)c(x+\pi) =$$
$$= -e^{ix}\left[2|c(x)|^2T_{2p,n}(x) + 2|c(x+\pi)|^2T_{2p,n}(x+\pi)\right] = -e^{ix}T_{2p,2n}(2x) \neq 0$$

для всех x. Отсюда

$$E_{p,n}(x,j) = \frac{a(x+\pi)}{\Delta(x)}E_{p,2n}(2x,j) - \frac{c(x+\pi)}{\Delta(x)}W_{p,2n}(2x,j). \qquad (36)$$

Рассмотрим сплайны

$$S_{2n}(j) = \langle C_{2n}(x), E_{p,2n}(x,j)\rangle, \quad R_{2n}(j) = \langle D_{2n}(x), W_{p,2n}(x,j)\rangle,$$

где C_{2n}, D_{2n} определены по формулам (33), (34) (очевидно, что C_{2n}, $D_{2n} \in L^2(0,2\pi)$). При этом $S_{2n} \in \mathbf{S}_{p,2n}$, $R_{2n} \in \mathbf{W}_{p,2n}$.

Осталось показать, что $S_{2n}(j) + R_{2n}(j) = S_n(j)$ для всех j. С помощью замены $x = 2t$ и свойства $\Delta(t+\pi) = -\Delta(t)$ получаем

$$\begin{aligned} S_{2n}(j) &= \int_0^{2\pi} \frac{C_n(\frac{x}{2})a(\frac{x}{2}+\pi) - C_n(\frac{x}{2}+\pi)a(\frac{x}{2})}{2\Delta(x/2)}E_{p,n}(x,j)\,dx = \\ &= \left\langle C_n(t), \frac{a(t+\pi)}{\Delta(t)}E_{p,2n}(2t,j)\right\rangle, \\ R_{2n}(j) &= \left\langle C_n(t), -\frac{c(t+\pi)}{\Delta(t)}W_{p,2n}(2t,j)\right\rangle. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, с учетом (36) получим $S_{2n}(j) + R_{2n}(j) = \langle C_n(x), E_{p,n}(x,j)\rangle = S_n(j)$. Если даны C_{2n} и D_{2n}, то из равенств (33), (34) можно выразить $C_n(x)$ по формуле (35). ■

Следствие 2. *Сплайн $R \in \mathbf{V}_{p,n}$ принадлежит $\mathbf{W}_{p,2n}$ тогда и только тогда, когда R представляется в виде*

$$R(j) = \int_0^{2\pi} D(x)W_{p,2n}(x,j)\,dx, \qquad (37)$$

где $D \in L^2(0, 2\pi)$.

Доказательство. Как уже отмечено выше, если R представлен в виде (37), то $R \in \mathbf{W}_{p,2n}$. Обратно, если $R \in \mathbf{W}_{p,2n}$, то по теореме 6 справедливо разложение вида $R = S_{2n} + R_{2n}$, где $S_{2n} \in \mathbf{S}_{p,2n}$, $R_{2n} \in \mathbf{W}_{p,2n}$ и R_{2n} имеет вид (37). Есть еще тривиальное разложение $R = 0 + R$. Поскольку $\mathbf{S}_{p,2n} \perp \mathbf{W}_{p,2n}$, то $S_{2n} = 0$, $R = R_{2n}$. ■

12. ТВ-вейвлеты. Будем рассматривать ТВ-вейвлеты вида

$$\psi(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) W_{p,2n}(x, j)\, dx, \tag{38}$$

где $\tau(x)$ — бесконечно дифференцируемая 2π-периодическая функция и $\tau(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Как отмечено выше, $\psi \in \mathbf{W}_{p,2n}$.

Теорема 7. *Всякий вейвлет (31) из* $\mathbf{W}_{p,2n}$ *разлагается в ряд*

$$R(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \psi(j - 2kn),$$

сходящийся по норме $\ell^2(\mathbb{Z})$. *Коэффициенты* $d(k)$ *являются коэффициентами Фурье функции* $D(x)/\tau(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\psi(j - 2kn) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \tau(x) W_{p,2n}(x, j)\, dx, \tag{39}$$

т.е. $\psi(j+2kn)$ является коэффициентом Фурье функции $\tau(x) W_{p,2n}(x, j)$. Отсюда

$$\tau(x) W_{p,2n}(x, j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j - 2kn) e^{-ikx}$$

(функция $\tau(x) W_{p,2n}(x, j)$ — гладкая и 2π - периодическая, поэтому ее ряд Фурье сходится равномерно).

Рассмотрим вейвлет (31) и запишем его в виде

$$\begin{aligned}
R(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D(x)}{\tau(x)} \tau(x) W_{p,2n}(x, j)\, dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D(x)}{\tau(x)} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j - 2kn) e^{-ikx} \right] dx = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j - 2kn) d(k),
\end{aligned}$$

где

$$d(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D(x)}{\tau(x)} e^{-ikx}\, dx.$$

Полученное разложение справедливо для всех $j \in \mathbb{Z}$. Установим сходимость в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Имеем

$$D(x) = \tau(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) e^{ikx}$$

(ряд сходится в $L^2(0, 2\pi)$. Рассмотрим частичные суммы

$$D_N(x) = \tau(x) \sum_{k=-N}^{N} d(k) e^{ikx},$$

$$R_N(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) W_{p,2n}(x, j)\, dx = \sum_{k=-N}^{N} d(k) \psi(j - 2kn).$$

С учетом определения $W_{p,2n}(x, j)$ имеем

$$R(j) - R_N(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D(x) - D_N(x)] W_{p,2n}(x, j)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D(x) - D_N(x)] \left[a\left(\frac{x}{2}\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2}, j\right) + \right.$$

$$\left. + a\left(\frac{x}{2} + \pi\right) E_{p,n}\left(\frac{x + 2\pi}{2}, j\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2[D(2t) - D_N(2t)] a(t) E_{p,n}(t, j)\, dt.$$

По равенству Парсеваля для сплайнов

$$\|R - R_N\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4|D(2t) - D_N(2t)|^2 |a(t)|^2 T_{2p,n}(t)\, dt.$$

Поскольку $|a(t)|^2 T_{2p,n}(t) \le B = const$ для всех t, то последнее выражение стремится к нулю при $N \to \infty$. ■

Замечание. Система $\{\psi(\cdot - 2kn) | k \in \mathbb{Z}\}$ образует базис Рисса в $\mathbf{W}_{p,2n}$. Действительно, для $R \in \mathbf{W}_{p,2n}$ с плотностью $D(x)$ для $\|R\|^2$ с помощью равенства Парсеваля можно получить выражение

$$\|R\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{D(x)}{\tau(x)} \right|^2 |\tau(x)|^2 \Omega(x)\, dx,$$

где $\Omega(x) = 4T_{2p,n}(x/2)T_{2p,n}(x/2+\pi)T_{2p,2n}(x)$. Поскольку найдутся константы A, B такие, что $0 < A \le |\tau(x)|^2\Omega(x) \le B$, то $A\|d\|^2 \le \|R\|^2 \le B\|d\|^2$, что и требовалось.

Если выбрать $\tau(x) = 1/\sqrt{\Omega(x)}$, то можно взять в качестве границ Рисса $A = B = 1$. Тогда по терминологии [3] систему $\{\psi(\cdot - 2kn) | k \in \mathbb{Z}\}$ можно назвать жестким фреймом в $\mathbf{W}_{p,2n}$.

13. Сходимость вейвлетного разложения сигнала

Сигнал $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ можно рассматривать как сплайн из пространства $\mathbf{S}_{p,1}$ (с шагом $n = 1$). Действительно, при $n = 1$ B-сплайн $B_{p,1}(j)$ совпадает с единичным импульсом $\delta(j)$. Запишем равенство

$$f(j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(l)\delta(j-l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(l)B_{p,1}(j-l),$$

так что роль коэффициентов B-сплайнового представления играют значения $f(l)$. Сигнал f можно записать в интегральной форме

$$f(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_1(x)E_{p,1}(x,j)\,dx,$$

где $E_{p,1}(x,j) = e^{-ijx}$, а $C_1(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(l)e^{ilx}$ (ряд сходится в $L^2(0,2\pi)$).

Начиная с пространства $\mathbf{S}_{p,1} = \ell^2(\mathbb{Z})$, через N шагов придем к разложению

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}) &= \mathbf{S}_{p,2} \oplus \mathbf{W}_{p,2} = \dots \\ &= \mathbf{S}_{p,2^N} \oplus \mathbf{W}_{p,2^N} \oplus \mathbf{W}_{p,2^{N-1}} \oplus \dots \mathbf{W}_{p,2}. \end{aligned}$$

Тем самым после N шагов декомпозиции любой сигнал $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ представляется в виде

$$f = S_{2^N} + \sum_{k=1}^{N} R_{2^k},$$

где $S_{2^N} \in \mathbf{S}_{p,2^N}$, $R_{2^k} \in \mathbf{W}_{p,2^k}$, причем слагаемые попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения в $\ell^2(\mathbb{Z})$). Параметр p – произвольное натуральное число. Он может быть выбран из разных соображений. Конструктивный алгоритм нахождения проекций S_{2^N} и R_{2^k} получен в [9] (это аналог каскадного алгоритма по терминологии [1], с. 29–31, или алгоритма разложения [2], с. 247).

Возникает вопрос, сходится ли S_{2^N} к нулю при $N \to \infty$? Ответ на него дает

Теорема 8. *Для любого сигнала* $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *справедливы соотношения*

$$\|S_{2^N}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \to 0 \text{ при } N \to \infty, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} R_{2^k}, \tag{40}$$

где ряд сходится по норме $\ell^2(\mathbb{Z})$. *Если* f *имеет конечный носитель, содержащийся в* $-m+1 : m-1$, *то*

$$\|S_{2^N}\| \le p\left(\frac{\pi}{2}\right)^p \sum_{j=-m+1}^{m-1} |f(j)| 2^{-N/2} \text{ при всех } N \ge \log_2 m. \tag{41}$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Выберем m, удовлетворяющее условиям

$$m \ge p, \qquad \left(\sum_{|j| \ge m} |f(j)|^2\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$\begin{aligned} f_0(j) &= f(j) \text{ при } j \in 0 : m-1 \text{ и } f_0(j) = 0 \text{ вне } 0 : m-1; \\ f_1(j) &= f(j) \text{ при } j \in -m+1 : -1 \text{ и } f_1(j) = 0 \text{ вне } -m+1 : -1; \\ f_2(j) &= f(j) \text{ при } |j| \ge m \text{ и } f_2(j) = 0 \text{ на } -m+1 : m-1. \end{aligned}$$

Тогда $f = f_0 + f_1 + f_2$ и $\|f_2\| < \varepsilon/2$.

Для краткости будем использовать обозначение $n = 2^N$. Тогда сплайн S_n можно рассматривать как ортогональную проекцию сигнала f на $\mathbf{S}_{p,n}$. Оператор проектирования обозначим P_n. Тогда

$$S_n = P_n f = P_n f_0 + P_n f_1 + P_n f_2. \tag{42}$$

Очевидно, что $\|P_n f_2\| \le \|f_2\| < \varepsilon/2$.

Оценим $\|P_n f_0\|$. Проекцию $P_n f_0$ можно представить в виде ряда

$$(P_n f_0)(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_0, B_{p,n}(\cdot - kn))\chi_{p,n}(j - kn), \tag{43}$$

где $\chi_{p,n}$—ТВ-сплайн, двойственный В-сплайну $B_{p,n}$ (определен интегральной формулой (22)).

Допустим, что $n = 2^N \ge m$. Тогда в сумме (43) остается только p слагаемых

$$(P_n f_0)(j) = \sum_{k=0}^{p-1} (f_0, B_{p,n}(\cdot + kn))\chi_{p,n}(j + kn), \tag{44}$$

Можно оценить $B_{p,n}(j)$. Из определения В-сплайнов сразу следует, что $B_{p,n}(j) \le n^{p-1}$ для всех j. Отсюда

$$|(f_0, B_{p,n}(\cdot + kn))| \le \sum_{j=0}^{m-1} |f_0(j)| n^{p-1} =: C_0 n^{p-1}.$$

Норма $\|\chi_{p,n}\|^2$ очененивается неравенством (23). Получаем оценку

$$\|P_n f_0\| \le pC_0 \left(\frac{\pi}{2}\right)^p n^{-1/2}$$

для всех $n \ge m$. Аналогичная оценка (с константой C_1) справедлива для $P_n f_1$. Из (41) получаем

$$\|S_{2^N}\| \le p(C_0 + C_1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^p 2^{-N/2} + \varepsilon/2$$

для всех N таких, что $2^N \ge m$. Отсюда следует (40). По ходу доказательства выведена оценка (41).∎

Замечание. Фактически при каждом p построен своеобразный кратномасштабный анализ (КМА) в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$. Чтобы выявить сходство с классической конструкцией КМА (см. [3], определение 11.1) введем обозначения $V_k = \mathbb{S}_{p,2^k}$, $W_k = \mathbb{W}_{p,2^k}$. Тогда выполнены соотношения $\ell^2(\mathbb{Z}) = V_0 \supset V_1 \supset \ldots$,

$$V_{k-1} = V_k \oplus W_k, \ k = 1, 2, \ldots, \quad \ell^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} W_k.$$

При $p = 1$ подпространства W_k являются "хааровскими", т.е. W_k состоит из функций $R(j)$, для которых $R(j) = -c(l)$ при $l2^k \le j \le l2^k + 2^{k-1} - 1$ и $R(j) = c(l)$ при $l2^k + 2^{k-1} \le j \le (l+1)2^k - 1$.

В каждом подпространстве V_k можно построить функцию φ_k такую, что система $\{\varphi_k(\cdot - l2^k)\}$ образует базис Рисса в V_k (в качестве φ_k можно взять любую функцию вида

$$\varphi_k(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_k(x) E_{p,2^k}(x, j)\, dx,$$

где $\xi_k(x)$ — бесконечно дифференцируемая 2π - периодическая функция, не обращающаяся в нуль).

Все это близко к классическому определению КМА. Но нет аналога свойства $f \in V_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0$ (формула (11.1) из [3]).

Литература

1. **Петухов А.П.** Введение в теорию базисов всплесков. СПб: Изд-во СПбГТУ, 1999. 132 с.

2. **Чуи К.** Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001. 413 с.

3. **Новиков И. Я., Стечкин С. Б.** Основы теории всплесков // *Успехи математических наук. 1998. Т. 53. №6 (324). С. 53–128.*

4. **Берколайко М.З., Новиков И.Я.** О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем//*Мат. заметки. 1994. Т. 56. №3. С. 3–12.*

5. **Желудев В.А., Певный А.Б.** Кардинальная интерполяция дискретными сплайнами//*Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 1999. Вып. 3. С. 159–172.*

6. **Pevnyi A.B., Zheludev V.A.** On wavelet analysis in the discrete splines space// *Proceedings Second Int. Conf. "Tools for Math. Modeling'99". St. Petersburg: SPTU, 1999. V. 4. P. 181–195.*

7. **Pevnyi A.B., Zheludev V.A.** On interpolation by discrete splines with equidistant nodes//*J. of Approx. Theory. 2000. V. 102. P. 286–301.*

8. **Zheludev V.A.** Integral representation of slowly growing equidistant splines//*Approximation Theory and Applications. 1998. V. 14. №4. P. 66–88.*

9. **Pevnyi A.B., Zheludev V.A.** Construction of wavelet analysis in the space of discrete splines using Zak transform// *J. Fourier Analysis and Application. 2002. V. 8. №1. P. 55–77.*

10. **Зюзин М.В.** О применении фильтров с постоянными коэффициентами// *Численные методы и математическое моделирование. Сб. научных трудов под ред. В.П. Ильина. Новосибирск: ВЦ СО АН, 1990. С. 73–84.*

11. **Ichige K., Kamada M.** An approximation for discrete B-splines in time domain//*IEEE Signal Processing Letters. 1997. V. 4. №3. P. 82–84.*

12. **Schoenberg I.J.** Cardinal spline interpolation. CBMS, V. 12. Philadelphia: SIAM, 1973.

Summary

Pevnyi A. B. Multiresolution analysis in the space of square summable discrete signals

A nonstationary multiresolution analysis $\{V_k\}_{k\geq 0}$ in the space $\ell^2(\mathbb{Z})$ is suggested. The space V_k is the space $S_{p,2^k}$ of discrete splines of the order p (this splines have equidistant knots with distance 2^k between knots). The wavelet space W_k is defined as the orthogonal complement of V_k in V_{k-1}. The orthogonal expansion $\ell^2(\mathbb{Z}) = \oplus_{k=1}^{\infty} W_k$ is obtained. The wavelets ψ_k whose shifts $\{\psi_k(j - l2^k),\ l \in \mathbb{Z}\}$ form bases of wavelet space W_k are constructed.

Сыктывкарский университет

Поступила 20.09.02