*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003*

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ УЧЕТА ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН [1]

Е.И. Михайловский, В.Л. Никитенков, К.Ф. Черных

Предложен алгоритм уточнения кирхгофовских моделей механики тонких упругих оболочек за счет учета трансверсальных деформаций. Алгоритм проиллюстрирован на примере построения нелинейной теории пологих оболочек типа Маргера-Тимошенко-Нагди. Показано, что вывод, сделанный В.В. Пикулем [10] о несостоятельности оценки гипотез Кирхгофа-Лява, предложенной В.В. Новожиловым и Р.М. Финкельштеймом, является ошибочным.

1. Алгоритм учета трансверсальных деформаций на основе кирхгофовских вариантов теории оболочек

В работе [1] (см. также монографию [2]) предложена нелинейная теория жесткогибких (гибких по традиционной терминологии) оболочек, учитывающая по линейной теории поперечные сдвиги и эффективно (в отличие от квазикирхгофовской теории [3]) поперечное обжатие. Уравнения равновесия этой теории приведены к следующему виду:

$$\nabla_\alpha \widetilde{T}^{\alpha i} - b^i_\alpha \widetilde{T}^{\alpha}_{\cdot n} + q^i = 0,$$

$$\nabla_\alpha \widetilde{T}^{\alpha}_{\cdot n} + b_{\alpha\beta} \widetilde{T}^{\alpha\beta} + q_n = 0,$$

$$\nabla_\alpha \widetilde{M}^{\alpha i} - \widetilde{T}^{i}_{\cdot n} = 0, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" (НШ - 2180.2003.1) и грантов РФФИ 01-01-96431, 02-01-01258.

где

$$\widetilde{T}^{ij} = \mathcal{A}^{-1}T^{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{ij}m_n,$$

$$\widetilde{M}^{ij} = \mathcal{A}^{-1}M^{ij}_K + \mathcal{A}^{-1}M^{ij}_T + \lambda_\xi h^2_\lambda \mathring{a}^{ij}q_n,$$

$$\widetilde{T}^{i}_{\cdot n} = \mu h\mathcal{A}^{-1}\mathring{a}^{i\beta}\psi_\beta; \tag{1.2}$$

$$\lambda_\xi = \frac{h}{\mathring{h}}, \quad \mathcal{A} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mathring{a}}}, \quad h^2_\lambda = \frac{\nu\mathring{h}^2}{8(1-\nu)}. \tag{1.3}$$

(Индексы “K”и “T”связаны с фамилиями “Кирхгоф”и “Тимошенко”. Здесь и ниже по индексам α, β, повторенным в одночлене дважды, следует суммировать от 1-го до 2-х. Ряд непоясненных здесь обозначений станут понятными из дальнейшего изложения.)

Граничные величины можно принять в виде следующей таблицы:

$\widetilde{T}_{\nu\nu}$	$\widetilde{T}_{\nu t}$	$\widetilde{T}_{\nu n} - \widetilde{T}_{\nu\nu}\vartheta_\nu - \widetilde{T}_{\nu t}\vartheta_t$	$\widetilde{M}_{\nu\nu}$	$\widetilde{M}_{\nu t}$
u_ν	u_t	w	$\vartheta_\nu + \psi_\nu$	$\vartheta_t + \psi_t$

(1.4)

Сравнивая уравнения (1.1) и (6.81) [4] убеждаемся, что они формально отличаются лишь тильдами в (1.1) над искомыми статическими величинами. Это соответствие позволяет применить простой алгоритм построения уравнений, учитывающих трансверсальные деформации, на основе кирхгофовских вариантов теории оболочек. Сказанное относится как к линейным теориям, так и к теориям, частично учитывающим геометрическую нелинейность. Алгоритм заключается в снабжении усилий и моментов знаком “тильда”и последующим их исключением с использованием формул (1.2). Проиллюстрируем этот алгоритм на примере уточнения нелинейной теории пологих оболочек Маргера путем учета трансверсальных деформаций. Как известно, в названной теории кроме допущений, связанных с пологостью оболочки, учитываются в формулах для тангенциальных компонент тензора Грина-Лагранжа (γ^ξ_{ij}, $i,j = 1,2$) квадратичные слагаемые относительно производных от функции прогиба. В конечном счете, названные формулы принимают вид

$$\gamma^\xi_{ij} = \gamma_{ij} + \xi\,\text{æ}_{ij}, \tag{1.5}$$

где

$$\gamma_{ij} = e_{ij} - \mathring{b}_{ij}w + \tfrac{1}{2}w_{,i}\,w_{,j}, \quad \text{æ}_{ij} = -w_{,ij},$$

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} \triangleq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \tag{1.6}$$

$\overset{\circ}{b}_{ij}$ – компоненты тензора кривизны срединной поверхности оболочки до деформации.

За исходные примем уравнения равновесия из монографии [5] (обозначения приведены в соответствие с используемыми в данной статье; статические величины сразу помечены тильдами, чтобы не выписывать систему дважды):

$$\widetilde{T}_{i\alpha,\alpha} = 0, \quad i = 1,2; \tag{1.7$_1$}$$

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta})\widetilde{T}_{\alpha\beta} + q_n = 0; \tag{1.7$_2$}$$

$$\widetilde{T}_{in} = \widetilde{M}_{i\alpha,\alpha}, \quad i = 1,2. \tag{1.7$_3$}$$

Формулы (1.2) в рамках принятых допущений имеют вид

$$\widetilde{T}_{ij} = T_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} m_n \delta_{ij},$$

$$\widetilde{M}_{ij} = M_{ij}^K + M_{ij}^T + h_\lambda^2 q_n \delta_{ij},$$

$$\widetilde{T}_{in} = \mu \overset{\circ}{h} \psi_i, \quad i,j = 1,2, \tag{1.8}$$

где

$$M_{11}^K = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}), \quad M_{22}^K = (1 \rightleftarrows 2) M_{11}^K,$$

$$M_{12}^K = -(1-\nu) D\, w_{,12}^K;$$

$$M_{11}^T = D(\psi_{1,1} + \nu\, \psi_{2,2}), \quad M_{22}^T = (1 \rightleftarrows 2) M_{11}^T,$$

$$M_{12}^T = \tfrac{1}{2}(1-\nu) D(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}); \tag{1.9}$$

(ν – коэффициент Пуассона; μ – модуль сдвига; $D = E\overset{\circ}{h}{}^3/12(1-\nu^2)$; E – модуль Юнга).

Очевидно, что уравнения $(1.7)_1$ удовлетворяются при

$$\widetilde{T}_{11} = \Phi_{,22}, \quad \widetilde{T}_{22} = \Phi_{,11}, \quad \widetilde{T}_{12} = -\Phi_{,12}, \tag{1.10}$$

т.е.

$$T_{11} = \Phi_{,22} - \frac{\nu}{1-\nu} m_n, \quad T_{22} = \Phi_{,11} - \frac{\nu}{1-\nu} m_n, \quad T_{12} = -\Phi_{,12}.$$

С учетом формул (1.9), (1.10) получаем

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -D\Delta^2 w + D\Delta\psi_{\alpha,\alpha} + h_\lambda^2 \Delta q_n,$$

$$(\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta})\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \Delta_B \Phi + \Lambda(w,\Phi), \tag{1.11}$$

где $\Lambda(w,\Phi)$ – билинейная форма Ка́рмана:

$$\Lambda(w,\Phi) = w_{,11}\Phi_{,22} - 2w_{,12}\Phi_{,12} + w_{,22}\Phi_{,11}; \tag{1.11$'$}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_B = \mathring{b}_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\mathring{b}_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mathring{b}_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{1.11$''$}$$

Уравнение $(1.7)_2$ при этом приводится к виду

$$D\Delta^2 w = q_n + h_\lambda^2 \Delta q_n + \Delta_B \Phi + \Lambda(w,\Phi) + D\Delta\psi_{\alpha,\alpha}. \tag{1.12}$$

Дифференцируя уравнения $(1.7)_3$, будем иметь

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta} = \mu\mathring{h}\psi_{\alpha,\alpha}$$

или

$$\psi_{\alpha,\alpha} = -\frac{1}{\mu\mathring{h}}(q_n + \Delta_B\Phi + \Lambda(w,\Phi)). \tag{1.13}$$

Исключив теперь с помощью (1.13) $\psi_{\alpha,\alpha}$ из уравнения (1.12), получим следующее основное уравнение теории пологих оболочек типа Маргера-Тимошенко-Нагди (квадратичная нелинейность-поперечные сдвиги-поперечное обжатие):

$$D\Delta^2 w = q_n - (h_\psi^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n + (I - h_\psi^2\Delta)(\Delta_B\Phi + \Lambda(w,\Phi)), \tag{1.14}$$

где I – тождественный оператор;

$$h_\psi^2 = \frac{\mathring{h}^2}{6(1-\nu)}. \tag{1.14$'$}$$

Далее, принимая во внимание формулы

$$T_{11} = C(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}), \quad T_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)T_{11},$$
$$T_{12} = (1-\nu)C\gamma_{12}, \quad C = E\mathring{h}/(1-\nu^2), \tag{1.15}$$

а также равенства (1.6) и (1.10), получаем

$$e_{11} = \frac{1}{E\mathring{h}}(\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11}) + \mathring{b}_{11}w - \tfrac{1}{2}w_{,1}^2 - \frac{\nu}{Eh}m_n,$$
$$e_{12} = -\frac{1+\nu}{Eh}\Phi_{,12} + \mathring{b}_{12}w - \tfrac{1}{2}w_{,1}w_{,2}, \quad e_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)e_{11}. \tag{1.16}$$

Подставляя компоненты тензора малых деформаций Коши из (1.6) в очевидное тождество

$$e_{11,22} + e_{22,11} - 2e_{12,12} = 0,$$

придем к следующему уравнению (неразрывности):

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = \frac{\nu}{Eh}\Delta m_n - \tfrac{1}{2}\Lambda(w,w) - \Delta_B w - \beta w, \tag{1.17}$$

где

$$\beta = \mathring{b}_{11,22} - 2\mathring{b}_{12,12} + \mathring{b}_{22,11}. \tag{1.17'}$$

□ Заметим, что параметр β для гладкой пологой оболочки равен нулю. В работе [5] это слагаемое не появляется вследствие допущения, что $\mathring{b}_{ij} \triangleq k_i\delta_{ij} = const$. Уравнения рассматриваемой теории имеют наиболее компактную форму записи (смотри ниже), если уравнение срединной поверхности до деформации может быть представлено в виде $z = z(x_1, x_2)$. В этом случае $\mathring{b}_{ij} = z_{,ij}$ и $\beta \equiv 0$ для $z \in C^{(4)}(\Omega)$. ■

Полевые уравнения (1.14), (1.17) не зависят от поперечных сдвигов ψ_1, ψ_2. Простейшим уравнением, связывающим эти функции, является формула для дивергенции вектора поперечных сдвигов (1.13). Из уравнения $(1.7)_3$ с учетом (1.8) следуют еще два уравнения, связывающие поперечные сдвиги с основными искомыми функциями:

$$D[\Delta\psi_i - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_{i,j} - \psi_{j,i})] - \mu\mathring{h}\psi_i =$$

$$= D\frac{\partial\Delta w}{\partial x_i} - h_\lambda^2\frac{\partial q_n}{\partial x_i}, \quad i \neq j. \tag{1.18}$$

Если уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид $z = z(x_1, x_2) \in C^{(4)}(\Omega)$, то

$$\Delta_B\Phi = \Lambda(z,\Phi), \quad \Delta_B w = \Lambda(z,w)$$

и уравнения (1.14), (1.17) можно записать так:

$$D\Delta^2 w = q_n - (h_\psi^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n + (I - h_\psi^2\Delta)\Lambda(z+w,\Phi); \tag*{$(1.19)_1$}$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = \underline{\frac{\nu}{Eh}\Delta m_n} - \Lambda(z + \tfrac{1}{2}w, w). \tag*{$(1.19)_2$}$$

Уравнения (1.18), (1.19) идентичны, выведенным в работе [6] непосредственно для пологой оболочки на основе принципа Лагранжа.
Замечание 1.1. Система уравнений типа Маргера-Тимошенко-Нагди (1.18)-(1.19) переходит в уравнения:

- типа Маргера-Тимошенко при исключении из уравнения $(1.19)_2$ подчеркнутого слагаемого и принятии $h_\lambda^2 = 0$;
- типа Маргера-Нагди при $h_\psi^2 = 0$ и исключении из рассмотрения уравнений (1.18). ■

2. Вывод полевых уравнений линейной теории пластин по алгоритму Новожилова-Финкельштейна

2.1. В статье [7] (см. также сокращенный вариант [8]) реализован алгоритм (по своей идее близкий к работе Бассета [9]) вывода уравнений линейной теории оболочек без использования гипотез Кирхгофа с удовлетворением всем граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки. Для целей, которые будут раскрыты в разделе **3**, ниже реализуется алгоритм Новожилова-Финкельштейна (алгоритм Н-Ф) вывода уравнений линейной теории плоских пластин.

Квадратичную аппроксимацию трансверсальных напряжений с учетом граничных условий на лицевых поверхностях пластины можно представить так (сравни с формулами (11) [7]):

$$\sigma_{i3}^{\xi} = \frac{m_i}{\mathring{h}} + \frac{q_i}{\mathring{h}}\xi + \tfrac{1}{2}\gamma_i(\xi^2 - \tfrac{1}{4}\mathring{h}^2), \quad i = 1, 2; \tag{2.1}$$

$$\sigma_{33}^{\xi} = \frac{m_n}{\mathring{h}} + \frac{q_n}{\mathring{h}}\xi + \tfrac{1}{2}\gamma(\xi^2 - \tfrac{1}{4}\mathring{h}^2), \tag{2.2$_1$}$$

где

$$q_i^{\pm} = \sigma_{i3}^{\xi}(\pm\tfrac{\mathring{h}}{2}), \quad q_n^{\pm} = \sigma_{33}^{\xi}(\pm\tfrac{\mathring{h}}{2}), \tag{2.2$'$}$$

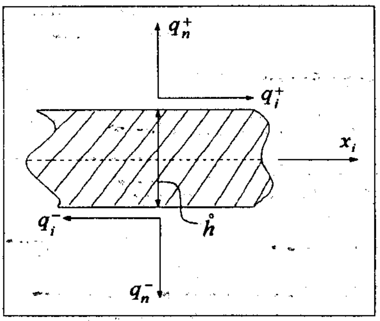

Рис. 2.1

$$q_i = q_i^+ - q_i^-, \quad m_i = \tfrac{1}{2}\mathring{h}(q_i^+ + q_i^-),$$

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = \tfrac{1}{2}\mathring{h}(q_n^+ + q_n^-),$$

С учетом обозначения

$$\gamma_i = -\frac{8\mu}{\mathring{h}^2}\psi_i \tag{2.2$''$}$$

формулу (2.1) можно записать в виде

$$\sigma_{i3}^{\xi} = \mu\psi_i + \frac{m_i}{\mathring{h}} + \frac{q_i}{\mathring{h}}\xi - \frac{4\mu}{\mathring{h}^2}\psi_i\xi^2. \tag{2.2$_2$}$$

На основании (2.2)$_2$ и закона Гука имеем

$$\sigma_{i3}^{\xi} = 2\mu e_{i3}^{\xi} = \mu\left(\frac{\partial u_i^{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial w^{\xi}}{\partial x_i}\right) = \mu\psi_i + \frac{m_i}{\mathring{h}} + \frac{q_i}{\mathring{h}}\xi - \frac{4\mu}{\mathring{h}^2}\psi_i\xi^2.$$

Отсюда, ограничиваясь параболическим законом изменения перемещений по толщине пластины, находим

$$u_i^{\xi} = u_i + \left(\psi_i - w_{,i} + \frac{m_i}{\mu\mathring{h}}\right)\xi + \left(\frac{q_i}{\mu\mathring{h}} - w_{,i}^{(1)}\right)\frac{\xi^2}{2}. \tag{2.3}$$

Здесь учтено, что

$$w^{\xi}=w+w^{(1)}\xi+w^{(2)}\frac{\xi^{2}}{2}. \tag{2.3'}$$

Далее на основании закона Гука можно записать

$$\sigma^{\xi}_{\alpha\alpha}=\frac{E}{1-\nu}e^{\xi}_{\alpha\alpha}+\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma^{\xi}_{33}.$$

С учетом этой формулы уравнение закона Гука

$$e^{\xi}_{33}=\frac{1}{E}\sigma^{\xi}_{33}-\frac{\nu}{E}\sigma^{\xi}_{\alpha\alpha}$$

принимает вид

$$e^{\xi}_{33}=\frac{\nu}{\lambda(1-\nu)}\sigma^{\xi}_{33}-\frac{\nu}{1-\nu}e^{\xi}_{\alpha\alpha} \tag{2.4}$$

(λ – параметр Ламе).

Вычислив на основании формулы (2.3) $e^{\xi}_{ii}=u^{\xi}_{i,i}$ и положив $i=\alpha$, получим $e^{\xi}_{\alpha\alpha}$. Исключив затем $e^{\xi}_{\alpha\alpha}$ и σ^{ξ}_{33} (см. форм. $(2.2)_1$) из (2.4), придем к выражению $dw^{\xi}/d\xi=e^{\xi}_{33}$, откуда после интегрирования следует формула

$$w^{\xi}=w+\frac{\nu}{\lambda(1-\nu)}(\frac{m_n}{\mathring{h}}-\gamma\frac{\mathring{h}^2}{8}-\lambda u_{\alpha,\alpha})\xi+$$

$$+\frac{\nu}{\lambda(1-\nu)}[\frac{q_n}{\mathring{h}}-\lambda(\psi_{\alpha,\alpha}-\Delta w+\frac{m_{\alpha,\alpha}}{\mu\mathring{h}})]\frac{\xi^2}{2}, \tag{2.5}$$

т.е.

$$w^{(1)}=-\frac{\nu}{1-\nu}u_{\alpha,\alpha}+\frac{\nu}{\lambda(1-\nu)}(\frac{m_n}{\mathring{h}}-\gamma\frac{\mathring{h}^2}{8}). \tag{2.6}$$

Функцию $\gamma(x_1,x_2)$ определим из т.н. шестого уравнения равновесия

$$\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}(\sigma^{\xi}_{3\alpha,\alpha}+\frac{\partial\sigma^{\xi}_{33}}{\partial\xi})\xi d\xi=0.$$

На основании формул (2.2) находим

$$\gamma=-\frac{1}{\mathring{h}}q_{\alpha,\alpha}. \tag{2.7}$$

Таким образом, формула (2.6) окончательно принимает следующий вид:

$$w^{(1)}=-\frac{\nu}{1-\nu}u_{\alpha,\alpha}+\frac{\nu}{\lambda(1-\nu)\mathring{h}}(m_n+\tfrac{1}{8}\mathring{h}^2q_{\alpha,\alpha}). \tag{2.8}$$

2.2. Усилия и моменты введем по формулам

$$T_{ij}=\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}(\sigma_{ij}^{\xi}-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij})d\xi,\quad M_{ij}=\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}(\sigma_{ij}^{\xi}-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij})\xi d\xi. \qquad (2.9)$$

С учетом того, что

$$\sigma_{11}^{\xi}-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33}^{\xi}=\frac{E}{1-\nu^2}(e_{11}^{\xi}+\nu e_{22}^{2})=$$

$$=\frac{E}{1-\nu^2}\Big[e_{11}+\nu e_{22}^2+\big(\psi_{1,1}+\nu\psi_{2,2}-w_{,11}-\nu w_{,22}+$$

$$+\frac{m_{1,1}+\nu m_{2,2}}{\mu\mathring{h}}\big)\xi+\big(\frac{q_{1,1}+\nu q_{2,2}}{\mu\mathring{h}}-w_{,11}^{(1)}-\nu w_{,22}^{(1)}\big)\frac{\xi^2}{2}\Big],$$

получаем

$$T_{11}=C(e_{11}+\nu e_{22})-\tfrac{1}{2}D(w_{,11}^{(1)}+\nu w_{,22}^{(1)})+$$

$$+\tfrac{1}{2}h_{\psi}^2(q_{1,1}+\nu q_{2,2}),\quad T_{22}=(1\rightleftharpoons 2)T_{11}. \qquad (2.10)_1$$

Далее на основании (2.3) имеем

$$e_{12}^{\xi}=\tfrac{1}{2}(u_{1,2}^{\xi}+u_{2,1}^{\xi})=e_{12}+\Big[\tfrac{1}{2}(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})-$$

$$-w_{,12}+\frac{1}{2\mu\mathring{h}}(m_{1,2}+m_{2,1})\Big]\xi-\Big[w_{,12}^{(1)}-\frac{1}{2\mu\mathring{h}}(q_{1,2}+q_{2,1})\Big]\frac{\xi^2}{2}, \qquad (2.10')$$

откуда следует, что

$$T_{12}=\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}\sigma_{12}^{\xi}d\xi=2\mu\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2}e_{12}^{\xi}d\xi=(1-\nu)Ce_{12}-$$

$$-\tfrac{1}{2}(1-\nu)Dw_{,12}^{(1)}+\frac{\mathring{h}^2}{24}(q_{1,2}+q_{2,1}). \qquad (2.10)_2$$

Из формул (2.9), (2.10′) находим

$$M_{11}=-D(w_{,11}+\nu w_{,22})+D(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})+$$

$$+h_{\psi}^2(m_{1,1}+\nu m_{2,2}),\quad M_{22}=(1\rightleftharpoons 2)M_{11},$$

$$M_{12} = 2\mu \int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} e_{12}^{\xi}\xi\, d\xi = -(1-\nu)Dw_{,12}+$$

$$+\tfrac{1}{2}(1-\nu)D(\psi_{1,2}+\psi_{2,1}) + \frac{\mathring{h}^2}{12}(m_{1,2}+m_{2,1}). \qquad (2.11)$$

Вводя дополнительные обозначения

$$T_{in} \triangleq \int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} \sigma_{i3}^{\xi}\, d\xi \ (= \tfrac{2}{3}\mu\mathring{h}\psi_i + m_i), \ i = 1,2, \qquad (2.12)$$

на основании уравнений равновесия линейной теории упругости получаем

$$\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (\sigma_{i\alpha,\alpha}^{\xi} + \frac{\partial\sigma_{i3}^{\xi}}{\partial\xi})\, d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{i\alpha,\alpha} + q_i + \frac{\nu}{1-\nu}m_{n,i} + \tfrac{2}{3}h_{\lambda}^2\frac{\partial q_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} = 0; \qquad (2.13)_1$$

$$\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (\sigma_{i\alpha,\alpha}^{\xi} + \frac{\partial\sigma_{i3}^{\xi}}{\partial\xi})\xi\, d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{i\alpha,\alpha} - T_{in} + m_i + \tfrac{2}{3}h_{\lambda}^2 q_{n,i} = 0; \qquad (2.13)_2$$

$$\int\limits_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} (\sigma_{3\alpha,\alpha}^{\xi} + \frac{\partial\sigma_{33}^{\xi}}{\partial\xi})\, d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\alpha n,\alpha} + q_n = 0. \qquad (2.13)_3$$

Исключив перерезывающие силы T_{in} из уравнения $(2.13)_3$ с помощью уравнения $(2.13)_2$, будем иметь

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = q_n + \tfrac{2}{3}h_{\lambda}^2\Delta q_n + m_{\alpha,\alpha}. \qquad (2.14)$$

Используя формулы (2.11), этому уравнению можно придать вид

$$D\Delta^2 w - D\Delta\psi_{\alpha,\alpha} = q_n + \tfrac{2}{3}h_{\lambda}^2\Delta q_n + m_{\alpha,\alpha} + h_{\psi}^2\Delta m_{\alpha,\alpha}. \qquad (2.15)$$

Дифференцируя далее уравнение $(2.13)_2$ по x_j и свертывая полученное равенство по индексам i, j, получаем

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -T_{\alpha n,\alpha} + \tfrac{2}{3}h_\lambda^2 q_n + m_{\alpha,\alpha}. \tag{2.16}$$

Из сравнения уравнений (2.14) и (2.16) следует, что (см. форм. (2.12))

$$\psi_{\alpha,\alpha} = -\frac{3}{2\mu \mathring{h}}(q_n + m_{\alpha,\alpha}). \tag{2.17}$$

Исключив с помощью этой формулы $\psi_{\alpha,\alpha}$ из (2.15), придем к следующему разрешающему уравнению относительно функции прогиба:

$$D\Delta^2 w = q_n - \left(\underline{\tfrac{3}{2}h_\psi^2} - \tfrac{2}{3}h_\lambda^2\right)\Delta q_n + (I - \tfrac{1}{2}h_\psi^2\Delta)m_{\alpha,\alpha}. \tag{2.18}$$

И наконец, после подстановки выражений для M_{ij} и T_{in}, соответствующих формулам (2.11), (2.12), в уравнение $(2.13)_2$ в результате несложных преобразований получим следующую систему уравнений (сравни с (1.18)):

$$D[\Delta\psi_i - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_{i,j} - \psi_{j,i})] - \tfrac{2}{3}\mu\mathring{h}\psi_i = D\frac{\partial \Delta w}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3}h_\lambda^2\frac{\partial q_n}{\partial x_i} +$$

$$+h_\psi^2[\Delta m_i - \frac{1+\nu}{2}(m_{i,j} - m_{j,i})], \quad i \neq j. \tag{2.19}$$

Так как поперечные сдвиги необходимы в первую очередь для удовлетворения граничным условиям (см. табл. (1.4)), то, вообще говоря, их приходится находить из уравнений (2.17), (2.19) на основе *интеграла* уравнения (2.18).

Уравнения относительно тангенциальных перемещений u_1, u_2 выводятся из соотношений (2.8), (2.10), $(2.13)_1$ и имеют вид

$$\underline{C[\Delta u_i - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_{i,j} - u_{j,i})]} + \frac{\nu D}{2(1-\nu)}\frac{\partial \Delta u_{\alpha,\alpha}}{\partial x_i} =$$

$$= \underline{-q_i} - \frac{\nu}{1-\nu}m_{n,i} - \frac{h_\psi^2}{2}[\Delta q_i - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(q_{i,j} - q_{j,i}) -$$

$$-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}(\Delta m_{n,i} - \frac{\mathring{h}^2}{8}\frac{\partial \Delta q_{\alpha,\alpha}}{\partial x_i})] - \frac{2}{3}h_\lambda^2\frac{\partial q_{\alpha,\alpha}}{\partial x_i}, \quad i \neq j. \tag{2.20}$$

Таким образом, выполненное уточнение уравнений линейной теории пластин сохраняет взаимную независимость тангенциальной и изгибной деформаций. Уравнения тангенциальной деформации, соответствующие теории Кирхгофа, получаются из (2.20), если там отбросить неподчеркнутые слагаемые.

3. В статье [7], основываясь на допущениях вида (2.1), $(2.2)_1$ (т.е. менее жестких, чем гипотезы Кирхгофа-Лява), построена теория оболочек, анализ зависимостей которой привел авторов к фундаментальному результату: "... гипотезам Кирхгофа-Лява в теории оболочек соответствует (вообще говоря) погрешность, имеющая величину порядка h/R_1, h/R_2 по сравнению с единицей".

Однако этот широко цитируемый вывод нужно правильно понимать, а именно: в уравнениях теории оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява, нет смысла удерживать слагаемые порядка h/R_i, так как они в этих уравнениях представлены не полностью.

Поясним сказанное подробнее. С использованием гипотез Кирхгофа-Лява получают (в частности) соотношения

$$\sigma_{11}^{\xi} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{11}^{\xi} + \nu e_{22}^{\xi}), \quad \sigma_{22}^{\xi} = (1 \rightleftharpoons 2)\sigma_{11}^{\xi}; \tag{3.1}$$

$$e_{11}^{\xi} = \frac{1}{1+\frac{\xi}{R_1}}(e_{11} + \xi æ_{11}), \quad e_{22}^{\xi} = (1 \rightleftharpoons 2)e_{11}^{\xi}; \tag{3.2}$$

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}^{\xi}(1 + \frac{\xi}{R_2})\xi\, d\xi. \tag{3.3}$$

Разложив подынтегральное выражение в (3.3) по степеням ξ вплоть до ξ^3 и выполнив интегрирование, получим

$$M_{11} = D(æ_{11} + \nu æ_{22}) + \underline{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)De_{11}}. \tag{3.4}$$

Если же использовать более точные уравнения, основанные на допущениях (2.1), $(2.2)_1$ то получим формулу для M_{11}, содержащую наряду с подчеркнутым в (3.4) слагаемым еще два слагаемых того же порядка. Отсюда авторы статьи [7] делают естественный вывод, что подчеркнутое в (3.4) слагаемое "сохранять нет никакого смысла, поскольку данная формула не в состоянии учесть все члены одинакового порядка, как этот член"[7]. Из сказанного следует, что (в частности) формулы (3.2) следует брать в виде

$$e_{11}^{\xi} = e_{11} + \xi æ_{11}, \quad e_{22}^{\xi} = (1 \rightleftharpoons 2)e_{11}^{\xi},$$

т.е. отбрасывать слагаемые порядка h/R_1, h/R_2 по сравнению с единицей.

Время от времени делаются попытки уточнить оценку погрешности гипотез Кирхгофа-Лява (что можно только приветствовать) или даже объявить ее несостоятельной (в чем нужно проявлять осторожность, учитывая "почтенный возраст"работы [7]). Так В.В. Пикуль, реализовав алгоритм Н-Ф применительно к плоской пластине, испытывающей, действие нормальной нагрузки, получил уравнение "d"таблицы (3.1) [10]. После сравнения этого уравнения с уравнением Е. Рейсснера [11] (табл. 3.1, "c") автор работы [10] пришел к "фундаментальному"выводу: "В.В. Новожилов и Р.М. Финкельштейн для оценки погрешности гипотез Кирхгофа в качестве базы сравнения выбрали уравнения, погрешность которых выше, чем уравнений, построенных на основе гипотез Кирхгофа. Поэтому предложенная ими оценка является несостоятельной". Однако этот сенсационный вывод основан на ошибке, допущенной при проведении элементарных выкладок. Правильное уравнение, полученное по алгоритму Н-Ф в разделе **2** для произвольной нагрузки, приведено при $q_{\alpha,\alpha} = 0$ в табл. 3.1 под индексом "b". Оно качественно согласуется с уравнением Е. Рейсснера (см. табл. 3.1, "c"). С последним уравнением вполне согласуется и линеаризованное уравнение теории пологих оболочек типа Маргера-Тимошенко-Нагди (1.14) при $z = const$ (см. табл. 3.1, "a").

Таблица 3.1

Индекс	Вид уравнения	Источник
a	$D\Delta^2 w = q_n - (h_\psi^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n$	Линеаризированное уравнение (1.14)
b	$D\Delta^2 w = q_n - (\frac{3}{2}h_\psi^2 - \frac{2}{3}h_\lambda^2)\Delta q_n$	Ур-е (2.18) при $q_{\alpha,\alpha} = 0$ (алгоритм Н-Ф)
c	$D\Delta^2 w = q_n - (\frac{6}{5}h_\psi^2 - \frac{4}{5}h_\lambda^2)\Delta q_n$	Уравнение Е. Рейсснера
d	$D\Delta^2 w = q_n - (0 - \frac{2}{3}h_\lambda^2)\Delta q_n$	Уравнение (2.18) при $q_{\alpha,\alpha} = 0$ по версии В.В. Пикуля

В соответствии с замечанием **1.1** автору работы [10] “удалось” исключить из рассмотрения поперечные сдвиги, определяющие знак коэффициента при Δq_n.

Литература

1. **Михайловский Е.И.** Некоторые модели и методы нелинейной механики упругих оболочек//*Сб.: Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела/Тр. научной школы акад. В.В. Новожилова. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. С. 42–56.*

2. **Кабриц С.А., Михайловский Е.И., Товстик П.Е., Черных К.Ф., Шамина В.А.** Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.

3. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория изотропных упругих тонких оболочек//*Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №3. С. 148–159.*

4. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

5. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

6. **Михайловский Е.И., Ермоленко А.В.** Полудеформационный вариант граничных условий нелинейной теории пологих оболочек//*Сб.: Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела/ Тр. научной школы акад. В.В. Новожилова. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. Вып. 3. С. 60–76.*

7. **Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М.** О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек//*ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5. С. 331–340.*

8. **Новожилов В.В** О погрешности одной из гипотез Кирхгофа в теории оболочек//*Доклады АН СССР. 1943. Т.38. №5-6. С. 174 – 179.*

9. **Basset A.B.** On the extension and flexure of cyllindrical and spherical thin elastic shells/*Phil. Trans. Roy. Soc. 1890. Vol. 181(A). P. 433 – 480.*

10. **Пикуль В.В.** К оценке погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек//*В сб. докладов XX Международной конференции по теории оболочек и пластин: Механика оболочек и пластин. Изд-во Нижегородск. ун-та. 2002. С. 244–249.*

11. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. С. 190–199.

Summary

Mikhailovskii E.I., Nikitenkov V.L., Chernykh K.F. On some aspects of the account of transversal deformations in the theory of shells and plates

In this paper algorithm precising Kirchhoff's models of mechanics of thin elastic shells due to register of transversal deformations is proposed. The algorithm is illustrated on the example of building of nonlinear theory of shallow shells of the Marguerre-Timoshenko-Nagdhi type. It is shown that V.V. Pikul's conclusion (V.V. Pikul. On error estimation of Kirchhoff's hypotheses in the shell theory//Transactions of XX Int. Conf. on Theory of Shells and Plates. September 17-19. 2002. P. 244–249.) about unfoundedness of estimate of the Kirgoff-Love hypotheses, proposed by V.V. Novozilov and R.M. Finkelshtain, is wrong.

Сыктывкарский университет *Поступила 10.08.2003*