Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 539.3

Элементы прикладного тензорного анализа в деформированных телах [1]

Михайловский Е.И., Ермоленко А.В., Миронов В.В.

Обсуждаются дополнительные возможности прикладного тензорного анализа в условиях одновременного рассмотрения исходной и актуальной конфигураций деформированной среды при лагранжевом описании движения. В частности, вводится четыре представления фундаментального тензора, получен ряд новых тождеств, применение которых проиллюстрировано на примере нелинейной квазикирхгофовской теории оболочек.

1. Рассмотрим евклидово пространство E_3. Пусть $\mathring{\mathbf{R}} = \mathring{\mathbf{R}}(\alpha)$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha)$ – радиусы-векторы материальной точки деформированного тела из этого пространства соответственно до и после деформации ($\alpha \triangleq (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ – лагранжевы координаты). В деформированном теле при лагранжевом описании движения материальных точек рассматривают два основных и два взаимных базиса

$$\{\mathring{\mathbf{R}}_1, \mathring{\mathbf{R}}_2, \mathring{\mathbf{R}}_3\}, \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\}, \{\mathring{\mathbf{R}}^1, \mathring{\mathbf{R}}^2, \mathring{\mathbf{R}}^3\}, \{\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3\}. \tag{1.1}$$

Ассоциированными назовем векторы и тензоры, которые, будучи отнесенными к разным базисам, имеют одинаковые компоненты. Например, ассоциированными являются векторы

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{R}_\alpha, \mathbf{u}' = u^\alpha \mathring{\mathbf{R}}_\alpha. \tag{1.2}$$

(По повторяющемуся в одночлене верхнему и нижнему греческим индексам в этом разделе следует суммировать от 1-го до 3-х, а в следующих – от 1-го до 2-х.)

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-96431.

Введем обозначения

$$\nabla_k u^i \stackrel{\Delta}{=} (\partial_k \mathbf{u}) \cdot \mathbf{R}^i = \partial_k u^i + G^i_{k\alpha} u^\alpha,$$

$$\mathring{\nabla}_k u^i \stackrel{\Delta}{=} (\partial_k \mathbf{u}') \cdot \mathring{\mathbf{R}}^i = \partial_k u^i + \mathring{G}^i_{k\alpha} u^\alpha, \qquad (1.3)$$

где $\partial_k u^i \stackrel{\Delta}{=} \dfrac{\partial u^i}{\partial \alpha^k}$; $\mathring{G}^k_{ij} = \partial_i \partial_j \mathring{\mathbf{R}} \cdot \mathring{\mathbf{R}}^k$, $G^k_{ij} = \partial_i \partial_j \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^k$, – символы Кристоффеля 2-го рода для исходной и актуальной конфигураций деформированной среды.

Впредь ковариантные производные контравариантной компоненты u^i вектора будем определять формулами (1.3) независимо от того, к какому базису эта компонента относится: если u^i – компонента вектора $\mathbf{u}$, то $\nabla_k u^i$ – действительно ковариантная производная, а $\mathring{\nabla}_k u^i$ – результат действия дифференциального оператора, определяемый формулой $(1.3)_2$. И, наоборот, если u^i – компонента вектора $\mathbf{u}'$, то $\mathring{\nabla}_k u^i$ – ковариантная производная, а $\nabla_k u^i$ – результат действия оператора в соответствии с формулой $(1.3)_1$.

В условиях этих договоренностей можно установить связь между ковариантными производными:

$$\nabla_k u^i - \mathring{\nabla}_k u^i - \mathring{A}^i_{k\alpha} u^\alpha = 0, \qquad (1.4)$$

где $\mathring{A}^i_{kj} = G^i_{kj} - \mathring{G}^i_{kj}$ – компоненты тензора 3-го ранга, что сразу следует из известных соотношений (см, например, [1])

$$G^i_{kj} = G^{\gamma'}_{\nu'\mu'} D^{\nu'}_k D^{\mu'}_j D^i_{\gamma'} + D^i_{\gamma'} \partial_k \partial_j \alpha^{\gamma'},$$

$$\mathring{G}^i_{kj} = \mathring{G}^{\gamma'}_{\nu'\mu'} D^{\nu'}_k D^{\mu'}_j D^i_{\gamma'} + D^i_{\gamma'} \partial_k \partial_j \alpha^{\gamma'} \qquad (1.5)$$

$$\left(D^{i'}_k \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^k},\ D^j_{i'} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \alpha^j}{\partial \alpha^{i'}}\right).$$

Инвариантный геометрический объект

$$\mathring{\mathbf{A}} = \mathring{A}^\gamma_{\alpha\beta} \mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta \otimes \mathring{\mathbf{R}}_\gamma \qquad (1.6)$$

уместно называть *тензором деформационного изменения связностей* (символов Кристоффеля).

Заметим, что в работе [2] (см. также [3]) объект $\mathring{\mathbf{A}}$ назван *тензором аффинной деформации* из-за того, что обращение этого тензора в нуль “характеризует аффинное преобразование пространства”. Однако в таком случае объект $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ следовало бы называть *тензором неаффинной деформации* по аналогии, например, с *тензором несовместности деформаций* [1]

$$\nabla \times \nabla \times e_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\alpha} \otimes \mathbf{e}^{\beta}$$

(e_{ij} – компоненты тензора малых деформаций Коши, $\mathbf{e}^i$ – орты декартовой системы координат), обращение которого в нуль характеризует совместные деформации. ■

Как известно (см., например, [3]), компоненты тензора $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ связаны с компонентами тензора деформации Грина-Лагранжа $\overset{\circ}{\Gamma} = \gamma_{\alpha\beta}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{\beta}$ легко устанавливаемыми формулами

$$\overset{\circ}{A}{}^{k}_{ij} = g^{\beta k}(\overset{\circ}{\nabla}_i\gamma_{j\beta} + \overset{\circ}{\nabla}_j\gamma_{i\beta} - \overset{\circ}{\nabla}_\beta\gamma_{ij}), \tag{1.7}$$

где

$$g^{ij} = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k\gamma_{ij} = \partial_k\gamma_{ij} - \overset{\circ}{G}{}^{\alpha}_{ki}\gamma_{\alpha i} - \overset{\circ}{G}{}^{\alpha}_{kj}\gamma_{i\alpha}. \tag{1.8}$$

Возвращаясь к соотношениям (1.3), следует отметить, что обе величины $\nabla_k u^i$ и $\overset{\circ}{\nabla}_k u^i$ являются смешанными компонентами тензора 2-го ранга независимо от того, к какому базису относится векторная компонента u^i. Это следует из равенства (1.4), где в любом случае два слагаемых являются компонентами тензора. Таким образом, операторы ∇_k и $\overset{\circ}{\nabla}_k$ не изменяют тензорной природы компоненты вектора, на которую они действуют, в чем заключается фундаментальное свойство ковариантной производной. ■

Перейдем теперь к рассмотрению тензоров 2-го ранга в деформированной среде, которые могут быть отнесены к любому базису таблицы

Таблица 1.

Базис	Ковариантный	Контравариантный	Смешанный
Исходный	$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j$	$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j$	$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j$ $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j$
Актуальный	$\mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j$	$\mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j$	$\mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j$ $\mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j$
1–й двойной	$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \mathbf{R}_j$	$\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^i \otimes \mathbf{R}^j$	$\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \mathbf{R}^j$ $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^i \otimes \mathbf{R}_j$
2–й двойной	$\mathbf{R}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j$	$\mathbf{R}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j$	$\mathbf{R}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j$ $\mathbf{R}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j$

Пусть даны ассоциированные тензоры

$$\mathbf{T} = t^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta,\ \mathbf{T}' = t^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}_\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}_\beta,$$

$$\mathbf{T}'' = t^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta, \mathbf{T}''' = t^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}_\beta. \qquad (1.9)$$

Введем обозначения

$$\nabla_k t^{ij} \triangleq \partial_k(\mathbf{T}) : \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^i = \partial_k t^{ij} + G^i_{k\alpha}t^{\alpha j} + G^j_{k\alpha}t^{i\alpha},$$

$$\mathring{\nabla}_k t^{ij} \triangleq \partial_k(\mathbf{T}') : \mathring{\mathbf{R}}^j \otimes \mathring{\mathbf{R}}^i = \partial_k t^{ij} + \mathring{G}^i_{k\alpha}t^{\alpha j} + \mathring{G}^j_{k\alpha}t^{i\alpha},$$

$$\hat{\nabla}_k t^{ij} \triangleq \partial_k(\mathbf{T}'') : \mathbf{R}^j \otimes \mathring{\mathbf{R}}^i = \partial_k t^{ij} + \mathring{G}^i_{k\alpha}t^{\alpha j} + G^j_{k\alpha}t^{i\alpha},$$

$$\check{\nabla}_k t^{ij} \triangleq \partial_k(\mathbf{T}''') : \mathring{\mathbf{R}}^j \otimes \mathbf{R}^i = \partial_k t^{ij} + G^i_{k\alpha}t^{\alpha j} + \mathring{G}^j_{k\alpha}t^{i\alpha}. \qquad (1.10)$$

Здесь и ниже символ ":" означает *двойное скалярное произведение*, определяемое по схеме вида (см., например, [1, 4])

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = (t^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta) : (s_\nu^{\cdot\mu}\mathring{\mathbf{R}}^\nu \otimes \mathbf{R}_\mu) = t^{\alpha\beta}s_\nu^{\cdot\mu}(\mathbf{R}_\beta \cdot \mathring{\mathbf{R}}^\nu)(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\mu).$$

(Обобщение формул (1.9), (1.10) на случаи ассоциированных тензоров с ковариантными и смешанными компонентами очевидно.)

Как и в случае вектора, величины, стоящие в правых частях равенств (1.10), будем условно называть ковариантными производными, независимо от того согласуются ли операторы ∇_k, $\mathring{\nabla}_k$, $\hat{\nabla}_k$, $\check{\nabla}_k$ с базисами соответствующих тензоров или нет. При этом, если оператор согласуется с базисом тензора, то он действительно определяет ковариантную производную. Пусть, например, t^{ij} – компонента тензора $\mathbf{T}''$. Тогда $\hat{\nabla}_k t^{ij}$ – ковариантная производная, а $\nabla_k t^{ij}$, $\mathring{\nabla}_k t^{ij}$, $\check{\nabla}_k t^{ij}$ – результаты действия соответствующих дифференциальных операторов на функцию t^{ij}. Важным является то, что и в случае несоответствия оператора дифференцирования базису тензора, результат действия этого оператора является компонентой тензора 3-го ранга. Пусть t^{ij} – компонента тензора $\mathbf{T}$. Вычитая первое равенство (1.10) из остальных равенств этой системы, получим

$$\mathring{\nabla}_k t^{ij} = \nabla_k t^{ij} - \mathring{A}^i_{k\alpha}t^{\alpha j} - \mathring{A}^j_{k\alpha}t^{i\alpha},$$

$$\hat{\nabla}_k t^{ij} = \nabla_k t^{ij} - \mathring{A}^i_{k\alpha}t^{\alpha j},\ \check{\nabla}_k t^{ij} = \nabla_k t^{ij} - \mathring{A}^j_{k\alpha}t^{i\alpha}, \qquad (1.11)$$

откуда в силу того, что $\mathring{A}^i_{k\alpha}t^{\alpha j}$, $\mathring{A}^j_{k\alpha}t^{i\alpha}$ – тензорные компоненты, следует, что таковыми же являются и величины, стоящие в левых частях равенств (1.11). ■

Выявим некоторые дополнительные к известным свойства фундаментального тензора в условиях деформированного тела.

Используя обозначения

$$\hat{g}_{ij} = \mathring{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}_j = \check{g}_{ji}, \; \hat{g}^{ij} = \mathring{\mathbf{R}}^i \cdot \mathbf{R}^j = \check{g}^{ji},$$

$$\hat{g}_i^{\cdot j} = \mathring{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}^j = \check{g}^j_{\cdot i}, \; \hat{g}^i_{\cdot j} = \mathring{\mathbf{R}}^i \cdot \mathbf{R}_j = \check{g}_j^{\cdot i}, \tag{1.12}$$

нетрудно убедиться в справедливости формул

$$\mathring{\mathbf{R}}_i = \hat{g}_{i\nu}\mathbf{R}^\nu = \check{g}_{\nu i}\mathbf{R}^\nu, \; \mathring{\mathbf{R}}^j = \hat{g}^{j\mu}\mathbf{R}_\mu = \check{g}^{\mu j}\mathbf{R}_\mu,$$

$$\mathbf{R}_i = \hat{g}_{\nu i}\mathring{\mathbf{R}}^\nu = \check{g}_{i\nu}\mathring{\mathbf{R}}^\nu, \; \mathbf{R}^j = \hat{g}^{\mu j}\mathring{\mathbf{R}}_\mu = \check{g}^{j\mu}\mathring{\mathbf{R}}_\mu, \tag{1.13}$$

из которых следует, в частности, что

$$\hat{g}_{\alpha i}\hat{g}^{\alpha j} = \hat{g}_{i\alpha}\hat{g}^{j\alpha} = \hat{g}_i^{\cdot\alpha}\hat{g}^j_{\cdot\alpha} = \check{g}_{\alpha i}\check{g}^{\alpha j} = \delta_i^j. \tag{1.14}$$

Пусть даны тензоры

$$\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta, \; \mathring{\mathbf{G}} = \mathring{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta,$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta, \; \check{\mathbf{G}} = \check{g}_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta. \tag{1.15}$$

Здесь рассматриваются лишь контравариантные базисы. Переход к ковариантным и смешанным базисам осуществляется с использованием формул (1.12) и

$$\mathbf{R}_i = g_{i\alpha}\mathbf{R}^\alpha, \; \mathbf{R}^j = g^{j\beta}\mathbf{R}_\beta, \; \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}^j = g_{i\alpha}g^{j\alpha} = \delta_i^j. \tag{1.16}$$

Заметим также, что тензор $\check{\mathbf{G}}$ является сопряженным с тензором $\hat{\mathbf{G}}$. Действительно, имеем

$$\hat{\mathbf{G}}^* = \hat{g}_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\beta \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\alpha = \check{g}_{\beta\alpha}\mathbf{R}^\beta \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\alpha = \check{\mathbf{G}}. \tag{1.17}$$

Покажем, что формулы (1.15) представляют один и тот же тензор в разных базисах, т.е.

$$\mathbf{G} = \mathring{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}} = \check{\mathbf{G}} = \mathbf{1}. \tag{1.18}$$

Действительно, принимая во внимание соотношения (1.12)–(1.14), (1.16), будем иметь

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_\gamma \otimes \mathbf{R}^\gamma = (\hat{g}_{\alpha\gamma}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha) \otimes (\hat{g}^{\beta\gamma}\mathring{\mathbf{R}}_\beta) = (\hat{g}_{\alpha\gamma}\hat{g}^{\beta\gamma})\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}_\beta =$$

$$= \mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}_\alpha = \mathring{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta = \mathring{\mathbf{G}};$$

$$\mathring{\mathbf{G}} = \mathring{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta = \mathring{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes (\hat{g}^{\beta\gamma}\mathbf{R}_\gamma) = \hat{\mathbf{G}};$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{g}^{\beta\gamma}\mathring{\mathbf{R}}_\beta \otimes \mathbf{R}_\gamma = \mathbf{R}^\gamma \otimes \mathbf{R}_\gamma = \check{g}_{\gamma\beta}\mathbf{R}^\gamma \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta = \check{\mathbf{G}}.$$

Нетрудно проверить, что любой из тензоров (1.15) является единичным. Убедимся, например, в справедливости равенств

$$\mathring{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \check{\mathbf{G}} = \mathbf{T},$$

где

$$\mathbf{T} = t^{\nu\mu}\mathbf{R}_\nu \otimes \mathbf{R}_\mu.$$

Действительно, имеем

$$\mathring{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{T} = (\mathring{g}^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}_\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}_\beta) \cdot (t^{\nu\mu}\mathbf{R}_\nu \otimes \mathbf{R}_\mu) =$$

$$= \mathring{\mathbf{R}}^\beta \otimes (\hat{g}_{\beta\nu}t^{\nu\mu}\mathbf{R}_\mu) = t^{\nu\mu}(\hat{g}_{\beta\nu}\mathring{\mathbf{R}}^\beta) \otimes \mathbf{R}_\mu = t^{\nu\mu}\mathbf{R}_\nu \otimes \mathbf{R}_\mu = \mathbf{T},$$

$$\mathbf{T} \cdot \check{\mathbf{G}} = (t^{\nu\mu}\mathbf{R}_\nu \otimes \mathbf{R}_\mu) \cdot (\check{g}_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta) =$$

$$= t^{\nu\alpha}\mathbf{R}_\nu \otimes (\check{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\beta) = t^{\nu\alpha}\mathbf{R}_\nu \otimes \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{T}. \text{ QED}$$

Замечание 1.1 По Трусделлу [4] тензоры $\hat{\mathbf{G}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ следует называть *двойными*. Однако в силу (1.18) правильнее говорить не о двойных тензорах, а о *двойных базисах* (см. (1.15)).

Замечание 1.2. В механике сплошной среды широко используется (двойной по Трусделлу) *тензор-градиент движения* (deformation gradient) $\mathbf{F} = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\alpha$, с помощью которого осуществляется связь между векторами исходного и актуального базисов

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F} \cdot \mathring{\mathbf{R}}_i, \; \mathbf{R}^j = \mathbf{F}^{-1*} \cdot \mathring{\mathbf{R}}^j, \; \mathring{\mathbf{R}}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{R}_i, \; \mathring{\mathbf{R}}^j = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{R}^j. \tag{1.19}$$

Сравнивая (1.19) и (1.13), убеждаемся, что компоненты $\hat{g}_{ij}$, $\check{g}^{kl}$ метрического тензора выполняют роль, аналогичную той, что и тензоры $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{F}^{*-1}$. На основании формул (1.13) получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\alpha = \hat{g}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{R}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{R}}^\beta,$$

т.е. тензоры $\mathbf{F}$ и $\hat{\mathbf{G}}$ являются ассоциированными.

Замечание 1.3. Компоненты метрического тензора в двойных базисах позволяют вычислять повороты и сдвиги, обусловленные деформацией тела. Так, например, косинус угла поворота касательной к координатной линии α^i при переходе тела от исходной конфигурации ($\overset{\circ}{\mathbf{R}}$) к актуальной ($\mathbf{R}$) определяется по формуле

$$\cos(\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_i) = \frac{\hat{g}_{ii}}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii}}\sqrt{g_{ii}}}.$$

Замечание 1.4. Справедливы следующие легко проверяемые соотношения:

$$g_{ij} = \hat{g}^{\alpha}_{\cdot i}\hat{g}_{\alpha j}, \quad g^{ij} = \hat{g}^{\cdot i}_{\beta}\hat{g}^{\beta j}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij} = \hat{g}^{\cdot\alpha}_{i}\hat{g}_{j\alpha}, \quad \overset{\circ}{g}^{ij} = \hat{g}^{i}_{\cdot\beta}\hat{g}^{j\beta}. \ \blacksquare \tag{1.20}$$

Как известно (см., например, [1, 4]), выполняются равенства

$$\nabla_k g_{ij} = \nabla_k g^j_i = \nabla_k g^{ij} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{g}^j_i = \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{g}^{ij} = 0. \tag{1.21}$$

На основании формул (1.10), (1.12) имеют место соотношения

$$\hat{\nabla}_k \hat{g}_{ij} = \hat{\nabla}_k \hat{g}^{\cdot j}_{i} = \hat{\nabla}_k \hat{g}^{j}_{\cdot i} = \hat{\nabla} \hat{g}^{ij} = 0,$$

$$\check{\nabla}_k \check{g}_{ij} = \check{\nabla}_k \check{g}^{\cdot j}_{i} = \check{\nabla}_k \check{g}^{j}_{\cdot i} = \check{\nabla} \check{g}^{ij} = 0. \tag{1.22}$$

Проверим, например, справедливость равенства $\check{\nabla}_k \check{g}^{\cdot j}_i = 0$. Имеем

$$\check{\nabla}_k \check{g}^{\cdot j}_i = \partial_k \check{g}^{\cdot j}_i - G^{\alpha}_{ki}\check{g}^{\cdot j}_{\alpha} + \overset{\circ}{G}{}^{j}_{k\alpha}\check{g}^{\cdot\alpha}_i =$$

$$= (\partial_k \mathbf{R}_i)\cdot\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j + \mathbf{R}_i\cdot\partial_k\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j - G^{\alpha}_{ki}\check{g}^{\cdot j}_{\alpha} + \overset{\circ}{G}{}^{j}_{k\alpha}\check{g}^{\cdot\alpha}_i = 0.$$

Здесь учтено, что

$$\partial_k \mathbf{R}_i = G^{\alpha}_{ki}\mathbf{R}_{\alpha}, \quad \partial_k \overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^j = -\overset{\circ}{G}{}^{j}_{k\alpha}\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^{\alpha}.$$

Свойства вида (1.21), (1.22) утрачиваются, если операторы ∇_k, $\overset{\circ}{\nabla}_k$, $\hat{\nabla}_k$, $\check{\nabla}_k$ не согласуются с базисами соответствующих форм представления метрического тензора. Например, нетрудно убедиться в том, что

$$\nabla_k \overset{\circ}{g}_{ij} = -\overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{ki}\overset{\circ}{g}_{\alpha j} - \overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{kj}\overset{\circ}{g}_{i\alpha},$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_k g_{ij} = \overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{ki} g_{\alpha j} + \overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{kj} g_{i\alpha},$$

$$\hat{\nabla}_k \check{g}_{ij} = \overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{ki}\check{g}_{\alpha j} - \overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{kj}\check{g}_{i\alpha},$$

$$\check{\nabla}_k \hat{g}_{ij} = -\overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{ki}\hat{g}_{\alpha j} + \overset{\circ}{A}{}^{\alpha}_{kj}\hat{g}_{i\alpha} \text{ и т.д. } \blacksquare$$

Наряду с известной формулой (см., например, [1, 4])

$$\nabla_\alpha t^{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha(\sqrt{g}t^{\alpha i}) + G^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta}, \tag{1.23}$$

легко устанавливаются следующие:

$$\hat{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\mathring{g}}}\partial_\alpha(\sqrt{\mathring{g}}t^{\alpha i}) + G^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta},$$

$$\check{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha(\sqrt{g}t^{\alpha i}) + \mathring{G}^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta}, \tag{1.24}$$

где

$$\sqrt{\mathring{g}} = (\mathring{\mathbf{R}}_1 \times \mathring{\mathbf{R}}_2)\cdot\mathring{\mathbf{R}}_3, \ \sqrt{g} = (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)\cdot\mathbf{R}_3.$$

Покажем, что справедливы тождества

$$\hat{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = J\nabla_\alpha(J^{-1}t^{\alpha i}),$$

$$\check{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = J^{-1}\nabla_\alpha(Jt^{\alpha i}). \tag{1.25}$$

Действительно, учитывая, что [1]

$$J = \frac{dV}{d\mathring{V}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\mathring{g}}}, \tag{1.26}$$

находим

$$J\partial_\alpha J^{-1} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\mathring{g}}}\frac{\sqrt{g}\partial_\alpha\sqrt{\mathring{g}} - \sqrt{\mathring{g}}\partial_\alpha\sqrt{g}}{g} = \mathring{G}^\beta_{\alpha\beta} - G^\beta_{\alpha\beta},$$

$$J^{-1}\partial_\alpha J = -J\partial_\alpha J^{-1} = G^\beta_{\alpha\beta} - \mathring{G}^\beta_{\alpha\beta}. \tag{1.27}$$

Принимая во внимание $(1.27)_1$, получаем

$$J\nabla_\alpha(J^{-1}t^{\alpha i}) = J(\partial_\alpha J^{-1})t^{\alpha i} + \nabla_\alpha t^{\alpha i} =$$

$$= \mathring{G}^\beta_{\alpha\beta}t^{\alpha i} - G^\beta_{\alpha\beta}t^{\alpha i} + \partial_\alpha t^{\alpha i} + G^\alpha_{\alpha\beta}t^{\beta i} + G^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta} = \hat{\nabla}_\alpha t^\alpha.$$

Таким образом, справедливость первого тождества (1.25) установлена. Точно так же проверяется выполнение второго тождества (1.25). **QED**

Заметим, что каждое из соотношений (1.27) эквивалентно следующей формуле для сокращенных компонент тензора деформационного изменения связностей:

$$\mathring{A}^\alpha_{\alpha k} = \partial_k \ln J. \tag{1.28}$$

2. Рассмотрим поверхность в трехмерном евклидовом пространстве до и после деформации. Для поверхности, как двумерного риманова многообразия, утрачивается часть свойств дифференцирования, изложенных в разделе **1**.

Пусть

$$\{\mathring{\mathbf{r}}_1,\ \mathring{\mathbf{r}}_2,\ \mathring{\mathbf{n}}\},\ \{\mathring{\mathbf{r}}^1,\ \mathring{\mathbf{r}}^2,\ \mathring{\mathbf{n}}\},\ \{\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{n}\},\ \{\mathbf{r}^1,\ \mathbf{r}^2,\ \mathbf{n}\}\ -$$

основные и взаимные базисы, связанные с исходной и актуальной конфигурациями поверхности.

Рассмотрим ассоциированные векторы

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha,\ \mathbf{u}' = u^\alpha \mathring{\mathbf{r}}_\alpha. \tag{2.1}$$

На основании деривационных формул Гаусса и Вейнгартена

$$\partial_j \mathbf{r}_i = \Gamma^\alpha_{ij}\mathbf{r}_\alpha + b_{ij}\mathbf{n},\ \partial_i\mathbf{n} = -b_{i\alpha}\mathbf{r}^\alpha \tag{2.2}$$

($b_{ij} = \partial_i\partial_j\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ – компоненты тензора кривизны поверхности, $\Gamma^k_{ij} = \partial_i\partial_j\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}^k$ – символы Кристоффеля 2-го рода для поверхности), по аналогии с (1.3) можно записать

$$\nabla_k u^i \triangleq \partial_k\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}^i = \partial_k u^i + \Gamma^i_{k\alpha}u^\alpha,$$

$$\mathring{\nabla}_k u^i \triangleq \partial_k\mathbf{u}'\cdot\mathring{\mathbf{r}}^i = \partial_k u^i + \mathring{\Gamma}^i_{k\alpha}u^\alpha. \tag{2.3}$$

Ковариантными производными на поверхности от контравариантной компоненты вектора будем условно называть правые части равенств (2.3) независимо от того, к какому базису эта компонента относится. Если при этом u^i – компонента вектора $\mathbf{u}$, то $\nabla_k u^i$ – действительно ковариантная производная, а $\mathring{\nabla}_k u^i$ – результат действия линейного дифференциального оператора, и наоборот.

В условиях таких договоренностей справедлива формула

$$\nabla_k u^i = \mathring{\nabla}_k u^i + \mathring{A}^i_{k\alpha}u^\alpha, \tag{2.4}$$

где [3]

$$\mathring{A}^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \mathring{\Gamma}^i_{kj} = a^{\beta i}(\mathring{\nabla}_k\gamma_{j\beta} + \mathring{\nabla}_j\gamma_{k\beta} - \mathring{\nabla}_\beta\gamma_{kj}) \triangleq a^{\beta i}\mathring{P}_{\beta,kj},$$

$$\gamma_{ij} = {}^1\!/_2(a_{ij} - \mathring{a}_{ij}),\ a_{ij} = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j,\ a^{kl} = \mathbf{r}^k\cdot\mathbf{r}^l; \tag{2.4$'$}$$

$\mathring{A}^k_{ij}$, γ_{ij} – компоненты тензоров (соответственно) деформационного изменения связностей поверхности и деформации Грина-Лагранжа:

$$\mathring{\mathbf{A}} = \mathring{A}^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta} \otimes \mathring{\mathbf{r}}_{\gamma}, \ \ \mathring{\Gamma} = \gamma_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь ассоциированные тензоры

$$\mathbf{T} = t_{\alpha\beta}\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta}, \ \mathbf{T}' = t_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta},$$
$$\mathbf{T}'' = t_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta}, \ \mathbf{T}''' = t_{\alpha\beta}\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta}. \tag{2.6}$$

С использованием формул (2.2) и им аналогичных для исходной конфигурации получаем

$$\begin{aligned}
\partial_k\mathbf{T} &= (\nabla_k t_{\alpha\beta})\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta} + t_{\alpha\beta}(b^{\alpha}_{k}\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}^{\beta} + b^{\beta}_{k}\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}),\\
\partial_k\mathbf{T}' &= (\mathring{\nabla}_k t_{\alpha\beta})\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta} + t_{\alpha\beta}(\mathring{b}^{\alpha}_{k}\mathring{\mathbf{n}} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta} + \mathring{b}^{\beta}_{k}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{n}}),\\
\partial_k\mathbf{T}'' &= (\hat{\nabla}_k t_{\alpha\beta})\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta} + t_{\alpha\beta}(\mathring{b}^{\alpha}_{k}\mathring{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{r}^{\beta} + b^{\beta}_{k}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}),\\
\partial_k\mathbf{T}''' &= (\check{\nabla}_k t_{\alpha\beta})\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta} + t_{\alpha\beta}(b^{\alpha}_{k}\mathbf{n} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\beta} + \mathring{b}^{\beta}_{k}\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathring{\mathbf{n}}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\nabla_k t_{ij} &\stackrel{\Delta}{=} \partial_k\mathbf{T} : \mathbf{r}_j \otimes \mathbf{r}_i = \partial_k t_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{ki}t_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{kj}t_{i\alpha},\\
\mathring{\nabla}_k t_{ij} &\stackrel{\Delta}{=} \partial_k\mathbf{T}' : \mathring{\mathbf{r}}_j \otimes \mathring{\mathbf{r}}_i = \partial_k t_{ij} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{ki}t_{\alpha j} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{kj}t_{i\alpha},\\
\hat{\nabla}_k t_{ij} &\stackrel{\Delta}{=} \partial_k\mathbf{T}'' : \mathbf{r}_j \otimes \mathring{\mathbf{r}}_i = \partial_k t_{ij} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{ki}t_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{kj}t_{i\alpha},\\
\check{\nabla}_k t_{ij} &\stackrel{\Delta}{=} \partial_k\mathbf{T}''' : \mathring{\mathbf{r}}_j \otimes \mathbf{r}_i = \partial_k t_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{ki}t_{\alpha j} - \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{kj}t_{i\alpha},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

т.е.

$$(\nabla_k + \mathring{\nabla}_k - \hat{\nabla}_k - \check{\nabla}_k)t_{ij} = 0.$$

(Обобщение на случаи ассоциированных тензоров 2-го ранга с котравариантными и смешанными компонентами очевидно.)

Под ковариантными производными компонент тензоров 2-го ранга понимают правые части формул (2.8). Иными словами, ковариантными производными на поверхности компонент тензора 2-го ранга называют коэффициенты в частных производных вдоль координатных линий поверхности при тех диадах, которые сохраняют свой вид при частном дифференцировании.

При этом, как и ранее, будем соблюдать договоренность понимать под ковариантными производными ∇_k, $\mathring{\nabla}_k$, $\hat{\nabla}_k$, $\check{\nabla}_k$ правые части формул (2.8) независимо от того согласуются или нет эти операторы с базисами соответствующих тензоров. ■

Рассмотрим тензоры

$$\mathbf{A} = a_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta, \ \mathring{\mathbf{A}} = \mathring{a}_{\nu\mu}\mathring{\mathbf{r}}^\nu \otimes \mathring{\mathbf{r}}^\mu,$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{a}_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta, \ \check{\mathbf{A}} = \check{a}_{\nu\mu}\mathbf{r}^\nu \otimes \mathring{\mathbf{r}}^\mu, \tag{2.9}$$

где (см. также (2.4″))

$$\hat{a}_{ij} = \mathring{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_j, \ \check{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}. \tag{2.10}$$

(Во избежание недоразумений заметим, что с целью сохранения обозначений, принятых в оригиналах, символом $\mathring{\mathbf{A}}$ в разделе **1** обозначен тензор деформационного изменения связностей, а в формуле $(2.9)_2$ – метрический тензор исходной конфигурации поверхности.)

На основании (2.10) имеем

$$\mathring{\mathbf{r}}_i = \hat{a}_{i\nu}\mathbf{r}^\nu = \check{a}_{\nu i}\mathbf{r}^\nu, \ \mathbf{r}_i = \hat{a}_{\nu i}\mathring{\mathbf{r}}^\nu = \check{a}_{i\nu}\mathring{\mathbf{r}}^\nu. \tag*{$(2.11)_1$}$$

Аналогично получаются соотношения

$$\mathring{\mathbf{r}}^j = \hat{a}^{j\mu}\mathbf{r}_\mu = \check{a}^{\mu j}\mathbf{r}_\mu, \ \mathbf{r}^j = \hat{a}^{\mu j}\mathring{\mathbf{r}}_\mu = \check{a}^{j\mu}\mathring{\mathbf{r}}_\mu. \tag*{$(2.11)_2$}$$

Из соотношений (2.11) следуют равенства

$$\hat{a}_{\alpha i}\hat{a}^{\alpha j} = \hat{a}_{i\alpha}\hat{a}^{j\alpha} = \hat{a}_i^{\cdot\alpha}\hat{a}_{\cdot\alpha}^{j} = \hat{a}_\alpha^{\cdot j}\hat{a}_{\cdot i}^{\alpha} = \delta_i^j. \tag{2.12}$$

Покажем, что

$$\mathbf{A} = \mathring{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} = \check{\mathbf{A}} = \mathbf{1}. \tag{2.13}$$

Подобно тому, как устанавливались равенства (1.18), на основании (2.11), (2.12) получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}_\gamma \otimes \mathbf{r}^\gamma = (\hat{a}_{\nu\gamma}\mathring{\mathbf{r}}^\nu) \otimes (\hat{a}^{\mu\gamma}\mathring{\mathbf{r}}_\mu) = (\hat{a}_{\nu\gamma}\hat{a}^{\mu\gamma})\mathring{\mathbf{r}}^\nu \otimes \mathring{\mathbf{r}}_\mu = \delta_\nu^\mu\mathring{\mathbf{r}}^\nu \otimes \mathring{\mathbf{r}}_\mu = \mathring{\mathbf{A}},$$

$$\mathring{\mathbf{A}} = \mathring{\mathbf{r}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{r}}_\alpha = \mathring{\mathbf{r}}^\alpha \otimes \hat{a}_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\beta = \hat{\mathbf{A}}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathring{\mathbf{r}}^\alpha \otimes \mathring{\mathbf{r}}_\alpha = \check{a}^{\beta\alpha}\mathbf{r}_\beta \otimes \mathring{\mathbf{r}}_\alpha = \check{\mathbf{A}}.$$

Нетрудно убедиться, что любой из тензоров (2.9) является единичным. Пусть, например, $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta$. Проверим выполнение равенств

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \mathring{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}.$$

Имеем

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = (s_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta) \cdot (a_{\nu\mu}\mathbf{r}^\nu \otimes \mathbf{r}^\mu) =$$

$$= s_{\alpha\beta}(a^{\beta\nu}a_{\nu\mu})\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\mu} = s_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta} = \mathbf{S},$$

$$\mathring{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S} = (\mathring{a}_{\nu\mu}\mathring{\mathbf{r}}^{\nu} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^{\mu}) \cdot (s_{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta}) =$$

$$= s_{\alpha\beta}(\mathring{a}_{\nu\mu}\mathring{a}^{\mu\alpha})\mathring{\mathbf{r}}^{\nu} \otimes \mathbf{r}^{\beta} = \mathbf{S}.$$

Аналогично проверяются прочие комбинации умножения тензоров (2.9) на тензор **S**. QED

На поверхности утрачиваются свойства ковариантного дифференцирования, аналогичные (1.22). Действительно, с учетом (2.8) получаем

$$\hat{\nabla}_k \hat{a}_{ij} = \mathring{b}_{ki}\mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_j + b_{kj}\mathring{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n},$$

$$\check{\nabla}_k \check{a}_{ij} = b_{ki}\mathbf{n} \cdot \mathring{\mathbf{r}}_j + \mathring{b}_{kj}\mathbf{r}_i \cdot \mathring{\mathbf{n}},$$

$$\hat{\nabla}_k \hat{a}_i^{\cdot j} = \mathring{b}_{ki}\mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}^j + b_k^j\mathring{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n},$$

$$\check{\nabla}_k \check{a}_i^{\cdot j} = b_{ki}\mathbf{n} \cdot \mathring{\mathbf{r}}^j + \mathring{b}_k^j\mathbf{r}_i \cdot \mathring{\mathbf{n}}. \blacksquare$$

Имеют место формулы (см. (1.24))

$$\hat{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}}\partial_\alpha(\sqrt{\mathring{a}}t^{\alpha i}) + \Gamma^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta},$$

$$\check{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha i}) + \mathring{\Gamma}^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

Введем аналогичный (1.26) инвариант деформированной поверхности:

$$\mathcal{A} = \frac{dS}{d\mathring{S}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mathring{a}}}. \tag{2.15}$$

Покажем, что справедливы тождества (см. (1.25))

$$\hat{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = \mathcal{A}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}t^{\alpha i}),$$

$$\check{\nabla}_\alpha t^{\alpha i} = \mathcal{A}^{-1}\mathring{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}t^{\alpha i}). \tag{2.16}$$

Действительно, имеем

$$\mathcal{A}\partial_\alpha\mathcal{A}^{-1} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mathring{a}}}\frac{\sqrt{a}\partial_\alpha\sqrt{\mathring{a}} - \sqrt{\mathring{a}}\partial_\alpha\sqrt{a}}{a} = \mathring{\Gamma}^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{A}^{-1}\partial_\alpha\mathcal{A} = -\mathcal{A}\partial_\alpha\mathcal{A}^{-1} = \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \mathring{\Gamma}^\beta_{\alpha\beta}. \tag{2.17}$$

Принимая во внимание первую формулу из (2.17), получим

$$\mathcal{A}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}t^{\alpha i}) = \mathcal{A}(\partial_\alpha\mathcal{A}^{-1})t^{\alpha i} + \nabla_\alpha t^{\alpha i} =$$

$$= \mathring{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\beta} t^{\alpha i} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} t^{\alpha i} + \partial_\alpha t^{\alpha i} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} t^{\alpha i} + \Gamma^{i}_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} = \check{\nabla}_\alpha t^{\alpha i}.$$

Справедливость первого тождества (2.16) установлена. Выполнение второго тождества проверяется аналогично. **QED**

Заметим, что любое из соотношений (2.17) эквивалентно следующей формуле для сокращенных компонент тензора деформационного изменения связностей поверхности:

$$A^{\alpha}_{\alpha k} = \partial_k ln \mathcal{A}. \tag{2.18}$$

На основании формул (2.4′), (2.14) можно записать

$$\mathcal{A}^2 = \frac{a}{\mathring{a}} = 1 + 2I_{\mathring{\Gamma}} + 4II_{\mathring{\Gamma}}, \tag{2.19}$$

где $I_{\mathring{\Gamma}}$, $II_{\mathring{\Gamma}}$ – инварианты тензора Грина-Лагранжа деформации поверхности:

$$I_{\mathring{\Gamma}} = \gamma^{\alpha}_{\alpha}, \quad II_{\mathring{\Gamma}} = \gamma^1_1\gamma^2_2 - \gamma^1_2\gamma^2_1. \tag{2.20}$$

□ Ниже неоднократно будет использоваться дискриминантный тензор поверхности с ковариантными и контравариантными компонентами

$$\mathbf{C} = c_{\alpha\beta}\mathbf{r}^{\alpha} \otimes \mathbf{r}^{\beta} = c^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha} \otimes \mathbf{r}_{\beta},$$

где

$$c_{ij} = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}, \quad c^{ij} = (\mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j) \cdot \mathbf{n}, \tag{2.21$_1$}$$

$$c_{12} = -c_{21} \overset{(\cdot)}{=} \sqrt{a}, \quad c_{11} = c_{22} = 0,$$

$$c^{12} = -c^{21} \overset{(\cdot)}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad c^{11} = c^{22} = 0 \tag{2.21$_2$}$$

(символ "$\overset{(\cdot)}{=}$" означает "равно в точке").

На основании $(2.22)_1$ имеют место формулы

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = c_{ij}\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j = c^{ij}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = c_{i\alpha}\mathbf{r}^{\alpha}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{r}^i = c^{i\alpha}\mathbf{r}_{\alpha}. \tag{2.22}$$

Компоненты дискриминантных тензоров исходной и актуальной конфигураций связаны так:

$$c_{ij} = \varepsilon_{ij}\sqrt{a} = \mathcal{A}\varepsilon_{ij}\sqrt{\mathring{a}} = \mathcal{A}\mathring{c}_{ij},$$

$$c^{ij} = \varepsilon^{ij}\frac{1}{\sqrt{a}} = \mathcal{A}^{-1}\varepsilon^{ij}\frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}} = \mathcal{A}^{-1}\mathring{c}_{ij} \tag{2.23}$$

(ε_{ij}, ε^{ij} – символы Леви-Чивиты: $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -\varepsilon^{12} = \varepsilon^{12} = 1$, $\varepsilon_{11} = = \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$).

Полезными являются также формулы

$$c_{i\alpha}c^{\alpha j} = c_{i\alpha}c^{j\alpha} = \delta_i^j, \quad c_{\alpha\beta}c^{\alpha\beta} = 2. \blacksquare \tag{2.24}$$

Покажем, что формула (2.19) может быть получена из формулы (2.18), которую представим в виде (см. (2.4′))

$$\mathcal{A}^{-1}\partial_k\mathcal{A} = a^{\alpha\beta}\mathring{P}_{\beta,\alpha k}. \tag{2.25}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости равенства (см. $(2.21)_2$)

$$a^{ij} = c^{i\nu}c^{j\mu}a_{\nu\mu}. \tag{2.26}$$

На основании (2.26), (2.4′) и (2.23) можно записать

$$a^{ij} = \mathcal{A}^{-2}\mathring{c}^{i\nu}\mathring{c}^{j\mu}(\mathring{a}_{\nu\mu} + 2\gamma_{\nu\mu}) = \mathcal{A}^{-2}\mathring{a}^{ij} + 2\mathcal{A}^{-2}\mathring{c}^{i\nu}\mathring{c}^{j\mu}\gamma_{\nu\mu}. \tag{2.27}$$

Подставив a^{ij} из (2.27) в формулу (2.25), получим

$$\mathcal{A}\partial_k\mathcal{A} = U_k + 2V_k, \tag{2.28}$$

где

$$U_k = \mathring{a}^{\alpha\beta}\mathring{P}_{\beta,\alpha k}, \quad V_k = \mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\nu\mu}\mathring{P}_{\beta,\alpha k}. \tag{2.28′}$$

Преобразуем величины U_k и V_k. Имеем

$$\begin{aligned} U_k &= \mathring{a}^{\alpha\beta}(\mathring{\nabla}_\alpha\gamma_{\beta k} + \mathring{\nabla}_k\gamma_{\alpha\beta} - \mathring{\nabla}_\beta\gamma_{\alpha k}) = \\ &= \mathring{a}^{\alpha\beta}\mathring{\nabla}_\alpha\gamma_{\beta k} - \mathring{a}^{\beta\alpha}\mathring{\nabla}_\alpha\gamma_{\beta k} + \mathring{\nabla}_k(\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}) = \mathring{\nabla}_k\gamma_\alpha^\alpha = \partial_k I_{\Gamma}; \\ V_k &= \mathring{c}^{\alpha\nu}\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\nu\mu}(\mathring{\nabla}_\alpha\gamma_{\beta k} + \mathring{\nabla}_k\gamma_{\alpha\beta} - \mathring{\nabla}_\beta\gamma_{\alpha k}) = \\ &= \mathring{c}^{\alpha\nu}\gamma_{\nu\mu}\mathring{\nabla}_k(\mathring{c}^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}) = \mathring{\nabla}_k\frac{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}}{\mathring{a}} = \partial_k II_{\Gamma}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Подставив U_k и V_k из (2.29) в (2.28) и выполнив интегрирование, будем иметь

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{A}^2 = I_{\Gamma} + 2II_{\Gamma} + C.$$

Так как при отсутствии деформации $\mathcal{A} = 1$, то $C = \frac{1}{2}$. **QED**

При построении различных вариантов теории оболочек на основе вариационных принципов необходимо иметь формулы интегрирования по частям, связанные как с исходной, так и с актуальной конфигурациями срединной поверхности оболочки. Дадим краткий вывод таких формул.

Предположим, что поверхности $\mathring{\Omega}$, Ω с кусочно-гладкими границами $\partial\mathring{\Omega}$, $\partial\Omega$ топологически (взаимно однозначно и непрерывно) отображаются на замкнутую область $\Omega(\alpha)$ плоскости α^1, α^2 (рис.1). Аналогичное предположение делаем и относительно границ этих поверхностей: $\partial\mathring{\Omega} \xrightarrow{top} \partial\Omega(\alpha), \partial\Omega \xrightarrow{top} \partial\Omega(\alpha)$.

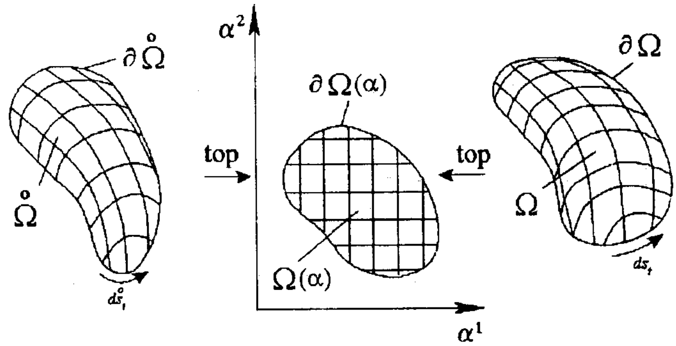

Рис. 1.

На основании формул Грина имеем

$$\int_{\Omega(\alpha)} \partial_1 u d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\Omega(\alpha)} u d\alpha^2,$$

$$\int_{\Omega(\alpha)} \partial_2 u d\alpha^1 d\alpha^2 = -\oint_{\partial\Omega(\alpha)} u d\alpha^1. \tag{2.30}$$

Свяжем с граничным контуром $\partial\Omega$ правую тройку ортов $\{\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{n}\}$, где $\mathbf{t}$ - орт касательной, $\mathbf{n}$ - орт нормали к поверхности Ω, $\boldsymbol{\nu}$ - орт тангенциальной нормали. Из очевидных соотношений

$$\mathbf{t} \stackrel{\Delta}{=} t^\beta \mathbf{r}_\beta = \frac{d\mathbf{r}}{ds_t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\beta} \frac{d\alpha^\beta}{ds_t} = \frac{d\alpha^\beta}{ds_t} \mathbf{r}_\beta,$$

$$\boldsymbol{\nu} \stackrel{\Delta}{=} \nu_\alpha \mathbf{r}^\alpha = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = t^\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{n} = t^\alpha c_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\beta$$

следует, что

$$t^i = \frac{d\alpha^i}{ds_t}, \quad \nu_i = t^\alpha c_{i\alpha}. \tag{2.31}$$

Умножая вторую формулу из (2.31) на c^{jk} и свертывая полученное равенство по индексам i и j, получим

$$t^i = c^{\beta i} \nu_\beta. \tag{2.32}$$

На основании $(2.31)_1$, (2.32) приходим к известным формулам (см., например, [1, 4])

$$d\alpha^1 = t^1 ds_t = c^{\beta 1}\nu_\beta ds_t = -\frac{1}{\sqrt{a}}\nu_2 ds_t,$$

$$d\alpha^2 = t^2 ds_t = c^{\beta 2}\nu_\beta ds_t = \frac{1}{\sqrt{a}}\nu_1 ds_t, \qquad (2.33)$$

с помощью которых равенства (2.30) можно записать так:

$$\int_{\Omega(\alpha)} \partial_i u d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\sqrt{a}}\nu_i u ds_t, \quad i = 1, 2. \qquad (2.34)$$

Выполнив аналогичные преобразования для контура $\partial\mathring{\Omega}$, получим

$$\int_{\Omega(\alpha)} \partial_i u d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}}\mathring{\nu}_i u d\mathring{s}_t, \quad i = 1, 2. \qquad (2.35)$$

В равенстве правых частей формул (2.34) и (2.35) можно убедиться, если учесть, что $(ds_t = \lambda_t d\mathring{s}_t)$

$$t^i = \frac{d\alpha^i}{ds_t} = \lambda_t^{-1}\frac{d\alpha^i}{d\mathring{s}_t} = \lambda_t^{-1}\mathring{t}^i,$$

$$\nu_i = t^\alpha c_{i\alpha} = \lambda_t^{-1}\mathring{t}^\alpha \mathcal{A}\mathring{c}_{i\alpha} = \mathcal{A}\lambda_t^{-1}\mathring{\nu}_i. \qquad (2.36)$$

По ходу вывода видно, что u – необязательно скалярная функция. Заменив в (2.35) u на $\sqrt{\mathring{a}}u^j$ и свернув полученное равенство по индексам i, j, будем иметь

$$\int_{\Omega(\alpha)} \partial_\beta(\sqrt{\mathring{a}}u^\beta) d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\beta u^\beta d\mathring{s}_t. \qquad (2.37)$$

Интегрируя тождество

$$\sqrt{\mathring{a}}u^\beta \partial_\beta v = \partial_\beta(\sqrt{\mathring{a}}vu^\beta) - v\partial_\beta(\sqrt{\mathring{a}}u^\beta)$$

по области $\Omega(\alpha)$ плоскости α^1, α^2, с учетом формулы (2.37), получим $(d\mathring{\Omega} = \sqrt{\mathring{a}}d\alpha^1 d\alpha^2)$

$$\int_{\mathring{\Omega}} u^\beta \partial_\beta v d\mathring{\Omega} = -\oint_{\Omega(\alpha)} \partial_\beta(\sqrt{\mathring{a}}u^\beta) v d\alpha^1 d\alpha^2 + \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\beta u^\beta v d\mathring{s}_t. \qquad (I)$$

Используя формулу Фосса-Вейля для сокращенных символов Кристоффеля (см., например, [1, 4])

$$\mathring{\Gamma}^{\beta}_{\beta i} = \frac{1}{\mathring{a}}\partial_i\sqrt{\mathring{a}} \tag{2.38}$$

и правило ковариантного дифференцирования произведения, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\underline{\sqrt{\mathring{a}}\mathring{\nabla}_\alpha(\frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}}u^\alpha)} = \sqrt{\mathring{a}}(\partial_\alpha\frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}})u^\alpha + \mathring{\nabla}_\alpha u^\alpha =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}}(\partial_\alpha\sqrt{\mathring{a}})u^\alpha + \partial_\alpha u^\alpha + \mathring{\Gamma}^{\beta}_{\beta\alpha}u^\alpha = \underline{\partial_\alpha u^\alpha}. \tag{2.39}$$

По аналогии с (2.39) получается следующее тождество:

$$\sqrt{a}\nabla_\alpha(\frac{1}{\sqrt{a}}u^\alpha) = \partial_\alpha u^\alpha. \tag{2.40}$$

Из сравнения (2.39) и (2.40) следует, что

$$\mathring{\nabla}_\alpha(\frac{1}{\sqrt{\mathring{a}}}u^\alpha) = \mathcal{A}\nabla_\alpha(\frac{1}{\sqrt{a}}u^\alpha). \tag{2.41}$$

Принимая во внимание известную формулу, также вытекающую из (2.38),

$$\partial_\alpha(\sqrt{\mathring{a}}u^\alpha) = \sqrt{\mathring{a}}\mathring{\nabla}_\alpha u^\alpha, \tag{2.42}$$

равенство (2.37) можно записать в следующем виде:

$$\int_{\mathring{\Omega}} \mathring{\nabla}_\alpha u^\alpha d\mathring{\Omega} = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\alpha u^\alpha d\mathring{s}_t. \tag{2.43}$$

Заменив в (2.41) $u^\alpha/\sqrt{\mathring{a}}$ на $t^{\alpha\beta}u_\beta$ и выполнив ковариантное дифференцирование произведения получим

$$\mathring{\nabla}_\alpha(t^{\alpha\beta}u_\beta) = \mathcal{A}\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}t^{\alpha\beta}u_\beta) = \mathcal{A}u_\beta\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}t^{\alpha\beta}) + t^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u_\beta.$$

Интегрируя это тождество по области $\mathring{\Omega}$ и принимая во внимание формулу (2.43), придем к следующей формуле интегрирования по частям:

$$\int_{\mathring{\Omega}} t^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u_\beta d\mathring{\Omega} = -\int_{\mathring{\Omega}} \mathcal{A}u_\beta\nabla_\alpha(\mathcal{A}^{-1}t^{\alpha\beta})d\mathring{\Omega} + \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \mathring{\nu}_\alpha u_\beta t^{\alpha\beta} d\mathring{s}_t. \tag{II}$$

3. Поясним результаты раздела **2** на примере уравнений равновесия т.н. квазикирхгофовской теории оболочек К.Ф.Черныха. Эти уравнения в монографии [5] записаны в следующем виде ($j = 1, 2$):

$$\partial_\gamma(\sqrt{\mathring{a}}T^{\gamma j}) + \Gamma^j_{\gamma\beta}\sqrt{\mathring{a}}T^{\gamma\beta} - b^j_\gamma\sqrt{\mathring{a}}T^{\gamma}_{\cdot n} + q^j\sqrt{a} = 0,$$

$$\partial_\gamma(\sqrt{\mathring{a}}M^{\gamma j}) + \Gamma^j_{\gamma\beta}\sqrt{\mathring{a}}M^{\gamma\beta} - \sqrt{\mathring{a}}T^{j}_{\cdot n} = 0,$$

$$\partial_\gamma(\sqrt{\mathring{a}}T^{j}_{\cdot n}) + b_{\gamma\beta}\sqrt{\mathring{a}}T^{\gamma\beta} + q_n\sqrt{a} = 0. \qquad (3.1)$$

На основании тождества $(2.14)_1$ первые два уравнения (3.1) можно представить так:

$$\hat{\nabla}_\gamma T^{\gamma j} - b^j_\gamma T^{\gamma}_{\cdot n} + \mathcal{A}q^j = 0,$$

$$\hat{\nabla}_\gamma M^{\gamma j} - T^{j}_{\cdot n} = 0. \qquad (3.2)_1$$

Третье уравнение из (3.1) с учетом тождества (2.42) приводится к виду

$$\mathring{\nabla}_\gamma T^{\gamma}_{\cdot n} + b_{\gamma\beta}T^{\gamma\beta} + \mathcal{A}q_n = 0. \qquad (3.2)_2$$

Покажем, что в уравнениях (3.2) $\hat{\nabla}_\gamma T^{\gamma j}$, $\hat{\nabla}_\gamma M^{\gamma j}$, $\mathring{\nabla}_\gamma T^{\gamma}_{\cdot n}$ – действительно ковариантные производные, а не результаты действия операторов в соответствии с принятой выше договоренностью.

Уравнения (3.1) выведены из условий равновесия элемента срединной поверхности оболочки. При этом использовались следующие "двойные" тензоры:

$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta$ – тензор усилий,

$\mathbf{M} = M^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_\beta)$ – тензор моментов,

$\mathbf{T}_n = T^{\alpha}_{\cdot n}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes \mathbf{n}$ – тензор перерезывающих сил.

Частные производные от этих тензоров вдоль координатной линии α^k имеют вид

$$\partial_k\mathbf{T} = (\hat{\nabla}_k T^{\alpha\beta})\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta +$$

$$+T^{\alpha\beta}(\mathring{b}_{k\alpha}\mathring{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{r}_\beta + b_{k\beta}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes \mathbf{n}),$$

$$\partial_k\mathbf{M} = (\hat{\nabla}_k M^{\alpha\beta})\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_\beta) +$$

$$+M^{\alpha\beta}[\mathring{b}_{k\alpha}\mathring{n} \otimes (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_\beta) + b_{k\gamma}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes (\mathbf{r}_\beta \times \mathbf{r}^\gamma)],$$

$$\partial_k\mathbf{T}_n = (\mathring{\nabla}_k T^{\alpha}_{\cdot n})\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes \mathbf{n} + T^{\alpha}_{\cdot n}(\mathring{b}_{k\alpha}\mathring{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n} - b_{k\gamma}\mathring{\mathbf{r}}_\alpha \otimes \mathbf{r}^\gamma), \qquad (3.3)$$

т.е. (сравни с (2.7), 2.8))

$$\partial_k T : \mathbf{r}^j \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i = \hat{\nabla}_k T^{ij},$$
$$\partial_k M : (\mathbf{n} \times \mathbf{r}^j) \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i = \hat{\nabla}_k M^{ij},$$
$$\partial_k \mathbf{T}_n : \mathbf{n} \otimes \mathring{\mathbf{r}}^i = \mathring{\nabla}_k T^{j}_{\cdot n}. \quad \mathbf{QED}$$

На основании тождеств (2.16) и (2.41) уравнениям (3.2) можно придать вид (сравни с уравнениями (6.81) [6])

$$\nabla_\gamma(\mathcal{A}^{-1}T^{\gamma j}) - b^j_\gamma \mathcal{A}^{-1}T^{\gamma}_{\cdot n} + q^j = 0,$$
$$\nabla_\gamma(\mathcal{A}^{-1}T^{\gamma}_{\cdot n}) + b_{\gamma\beta}\mathcal{A}^{-1}T^{\gamma\beta} + q_n = 0,$$
$$\nabla_\gamma(\mathcal{A}^{-1}M^{\gamma j}) - \mathcal{A}^{-1}T^{\gamma}_{\cdot n} = 0. \qquad (3.4)$$

Здесь ∇_γ – операторы дифференцирования, раскрываемые по тем же формулам, что и соответствующие ковариантные производные, в итоге чего получаются уравнения (3.1).

Таким образом, запись уравнений с использованием традиционных символов ковариантного дифференцирования ∇_k, $\mathring{\nabla}_k$ вполне уместна независимо от того, соответствуют или нет эти операторы базису тензора.

Литература

1. **Михайловский Е.И., Торопов А.В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та, 1995. 251 с. ISBN 5-87237-079-2.

2. **Норден А.П.** К вопросу о геометрической теории конечных деформаций // *Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 2. 1950.*

3. **Галимов К.З.** Основы нелинейной теории пологих оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. 326 с.

4. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

5. **Кабриц С.А., Михайловский Е.И., Товстик П.Е., Черных К.Ф., Шамина В.А.** Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388с.

6. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Summary

Mikhailovskii E.I., Ermolenko A.V., Mironov V.V. Elements of the applied tensor analysis in the deformed bodies

The additional possibilities of the applied tensor analysis are discussed in conditions of simultaneous consideration of initial and actual configurations of deformed body. To describe movement the Lagrange method is used. In particular, four forms of the fundamental tensor are entered; several new identities are received. An application of the identities is illustrated with the quasi-Kirchhoffian shell theory.

Сыктывкарский университет *Поступила 12.07.2003*