Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 519.717

$L(2,1)$-РАСКРАСКА ПРЕДРАСКРАШЕННЫХ КАКТУСОВ [1]

П.А. Головач

$L(2,1)$-раскраска предраскрашенного графа G это функция f, действующая из множества вершин V в множество неотрицательных целых чисел, такая, что функция имеет заданные значения для некоторых вершин графа, и если $d(a,b) = 1$, то $|f(a) - f(b)| \geq 2$, а если $d(a,b) = 2$, то $|f(a) - f(b)| \geq 1$ для всех вершин a и b, где $d(a,b)$ — расстояние между вершинами. $L(2,1)$-раскраска f называется k-$L(2,1)$-раскраской, если $f(v) \leq k$ для каждой вершины v. Такие раскраски активно изучаются, поскольку они тесно связаны с задачей назначения частот. Мы исследуем $L(2,1)$-раскраски для кактусов. Главный результат заключается в том, что задача существования k-$L(2,1)$-раскраски для предраскрашенных графов оказывается NP-полной в сильном смысле для треугольных кактусов. Из этого немедленно следует, что задача существования k-$L(2,1)$-раскраски для предраскрашенных графов является NP-полной в сильном смысле для частичных k-деревьев при $k \geq 2$. Отметим, что задача для деревьев принадлежит классу P. Мы также даём некоторые оценки для $L(2,1)$-хроматического числа кактусов, а также описываем алгоритм, который проверяет существование k-$L(2,1)$-раскраски для треугольных кактусов.

1. Введение

Исследование $L(2,1)$-раскрасок обусловлено их тесной связью с так называемой задачей назначения частот. Задача состоит в том, чтобы назначить радиочастоты передатчикам, находящимся на некоторой территории, так, чтобы избежать помех, вызванных интерференцией.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01-01-00235

Для решения подобных задач оказалось очень удобным использовать модели, построенные с помощью графов. С такими подходами можно ознакомиться в обзоре [11]. Мы рассмотрим одну из таких моделей.

Как правило, частоты для передатчиков не выбираются произвольным образом из некоторого интервала, а берутся из конечного дискретного набора частот, элементы которого называют каналами. Соответственно, мы можем рассмотреть задачу назначения каналов. Эта задача тесно связана с раскрасками графов. Вершины графов соответствуют передатчикам, а рёбра — ближайшим передатчикам. Каналы обозначаются неотрицательными целыми числами и соответствуют цветам.

Задача о $L(2,1)$-раскраске была введена в [9]. Согласно условиям задачи передатчики, которые находятся близко (на расстоянии 2 в графе) должны использовать различные каналы, а передатчики, которые находятся очень близко (на расстоянии 1 в графе), должны получить каналы с номерами различающимися, по крайней мере, на 2. Задача заключается в том, чтобы минимизировать диапазон — разность между наибольшим и наименьшим номером канала.

Более точно, пусть $G = (V, E)$ — простой неориентированный граф. $L(2,1)$-раскраска G это функция $f\colon V \to \{0, 1, \ldots\}$ такая, что если $d(a,b) = 1$, то $|f(a) - f(b)| \geq 2$, а если $d(a,b) = 2$, то $|f(a) - f(b)| \geq 1$ для всех вершин a и b, где $d(a,b)$ расстояние (число рёбер в кратчайшем пути) между вершинами. $L(2,1)$-раскраска f называется k-$L(2,1)$-раскраской, если $f(v) \leq k$ для каждой вершины v. $L(2,1)$-хроматическим числом G, обозначаемым $\lambda(G)$, называется наименьшее число k, для которого существует k-$L(2,1)$-раскраска графа G.

Эта задача уже активно исследовалась (см. [3, 4, 6, 8, 10]). В частности, было доказано (см. [9]), что для дерева T с максимальной степенью вершины Δ выполнена оценка: $\Delta \leq \lambda(T) \leq \Delta + 2$. В работе [4] был построен полиномиальный алгоритм для вычисления $L(2,1)$-хроматического числа деревьев (более простую и общую версию алгоритма см. [5]). Для случая графов общего вида рассматриваемая задача NP-полна даже для фиксированных значений параметра k. Так, в [6] было показано, что задача проверки выполнения неравенства $\lambda(G) \leq k$ для фиксированного k является NP-полной для любого $k \geq 4$. Более общая задача $L(p,q)$-раскраски для $p \geq q \geq 1$ рассматривалась в [2, 5, 6, 7]. В соответствии с условием этой задачи смежные вершины должны иметь цвета, различающиеся, по крайней мере, на p, а вершины, находящиеся на расстоянии 2 должны иметь цвета, отличающиеся не менее чем на q. В [5] была введена задача $L(p,q)$-раскраски предраскрашенных графов. Предраскраска означает, что некоторые вершины графа имеют цвета с самого начала. В этой работе было показано, что задача существования k-$L(p,q)$-раскраски предраскрашенных деревьев является NP-полной для $p > q > 1$.

Мы рассматриваем $L(2,1)$-раскраски кактусов. Напомним, что кактусом называют связный граф, каждое ребро которого принадлежит не более чем одному циклу. Отметим, что кактусы очень близки деревьям и интересно сравнить свойства раскрасок деревьев и кактусов. Во второй части работы даются оценки $\lambda(G)$ для кактусов. Далее рассматриваются треугольные кактусы. Кактус называется треугольным, если каждое ребро входит точно в один цикл длины три. В третьей части строиться алгоритм для вычисления $\lambda(G)$ для треугольных кактусов, являющийся полиномиальным в случае ограниченности степеней вершин, а также в случае, если параметр k фиксирован (не является частью входа). Главный результат приводится в четвёртой и пятой частях. Доказано, что задача существования k-$L(2,1)$-раскраски для предраскрашенных треугольных кактусов является NP-полной в сильном смысле. Немедленным следствием этого результата является NP-полнота задачи для внешнепланарных графов, хордальных графов, а также частичных k-деревьев даже для $k = 2$.

2. Оценки $\lambda(G)$ для кактусов

Известно (см. [9]) что для дерева T с максимальной степенью вершины Δ выполнено неравенство $\Delta \le \lambda(T) \le \Delta + 2$. Похожее неравенство выполняется для кактусов.

Теорема 1. *Пусть G — кактус с максимальной степенью вершины Δ. Тогда $\Delta + 1 \le \lambda(G) \le \Delta + \delta(\Delta) + 2$, где* $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 3,4, \\ 0, & x \ne 3,4. \end{cases}$

Доказательство. Если G граф с максимальной степенью вершины Δ, то легко показать, что $\Delta + 1 \le \lambda(G)$, и эта оценка хорошо известна. Таким образом, нам необходимо доказать только верхнюю оценку.

Если $\Delta \le 2$, то G это, либо путь, либо цикл. В этом случае нетрудно видеть, что $\lambda(G) \le \Delta + 2$. Предположим, что $\Delta \ge 3$. Докажем индукцией по числу вершин, что $\lambda(G) \le \Delta + \delta(\Delta) + 2$.

Если G имеет не более четырёх вершин, то $\lambda(G) \le 6$. Таким образом, база индукции проверена.

Положим $k = \Delta + \delta(\Delta) + 2$ Предположим, что в кактусе G имеется вершина u, имеющая единичную степень (висячая вершина). Удалим эту вершину (вместе с инцидентным ребром) и обозначим полученный граф через G'. Пусть f — k-$L(2,1)$-раскраска G', существующая по индукционному предположению. Обозначим через v вершину, смежную u (в графе G), а через $v_1, v_2, \ldots, v_r$ — вершины, смежные v в кактусе G'. Пусть $i = f(v)$, $i_1 = f(v_1), i_2 = f(v_2), \ldots, i_r = f(v_r)$. Поскольку $r \leq \Delta - 1$, а $k \geq \Delta + 2$, то среди чисел $\{0, 1, \ldots, k\}$ можно выбрать число s такое, что $s \neq i-1, i, i+1, i_1, i_2, \ldots, i_r$. Очевидно, что раскраску f можно продолжить на весь граф G, положив $f(u) = s$. Ясно, что f является k-$L(2,1)$-раскраской G и $\lambda(G) \leq k$.

Будем считать теперь, что в кактусе G нет висячих вершин. Назовём цикл C кактуса висячим, если он содержит не более одной вершины со степенью, большей двух. Легко видеть, что все рассматриваемые кактусы имеют висячие циклы.

Рассмотрим случай $\Delta = 3$ и покажем, что $\lambda(G) \leq 6$. Выберем в кактусе G висячий цикл C. Обозначим через u вершину C, имеющую степень 3. Удалим из G вершины C (вместе с инцидентными рёбрами) и обозначим полученный граф через G'. Обозначим через f k-$L(2,1)$-раскраску G', существующую по индукционному предположению. Пусть v — вершина G' смежная u (в графе G), а w и z — вершины, смежные v в кактусе G' (случай, если таких вершин меньше двух, рассматривается аналогично, а рассуждение упрощается). Положим $i = f(v)$, $j = f(w)$, $r = f(z)$. Заметим, что не умаляя общности можно считать, что $\{i,j\} \neq \{0,6\}$. Пусть $\{i_0, i_1, \ldots, i_4\} = \{0, 1, \ldots, 6\} \setminus \{i,j\}$. Нетрудно видеть, что вершины любого цикла можно окрасить, используя не более 5 красок. Окрасим вершины C, выбрав цвета $j_1, j_2, \ldots, j_s$ из множества $\{i_0, i_1, \ldots, i_4\}$. Если $s \geq 4$, то среди этих цветов найдётся цвет, отличающийся от $i-1, i+1, r$. В этом случае вершины C окрашиваются так, чтобы вершина u была окрашена именно в этот цвет. Если $s = 3$, то цвета j_1, j_2, j_3 всегда можно выбрать так, чтобы $\{j_1, j_2, j_3\} \neq \{i-1, i+1, r\}$, поскольку в качестве j_1, j_2, j_3 можно использовать любые цвета, для которых $|j_1 - j_2| \geq 2$, $|j_1 - j_3| \geq 2$, $|j_2 - j_3| \geq 2$. Среди этих цветов снова можно выбрать цвет, отличающийся от $i-1, i+1, r$. Вершины C также окрашиваются так, чтобы вершина u была окрашена именно в этот цвет. Остаётся заметить, что мы получили продолжение раскраски f на весь граф G, и f является k-$L(2,1)$-раскраской G. Таким образом, $\lambda(G) \leq k$.

Предположим теперь, что $\Delta \geq 4$.

Допустим вначале, что в графе G существует висячий цикл C, имеющий более трёх вершин и рассмотрим два случая.

1. Цикл C имеет длину четыре. Обозначим через a, b, c и d вершины C (в той же последовательности, что и в цикле) таким образом, что

вершины b, c и d имеют степень два. Построим граф G' удалив из G вершину c (вместе с инцидентными рёбрами) и соединив b и d ребром. Поскольку граф G' имеет меньше вершин, чем граф G, то $\lambda(G') \leq k$ по индукционному предположению. Рассмотрим соответствующую k-$L(2,1)$-раскраску f кактуса G'. Предположим, что $i = f(b)$, $j = f(d)$ и $r = f(a)$. Так как $k \geq 7$, то легко видеть, что можно выбрать число s из множества $\{0, 1, \ldots, k\}$ таким образом, что $s \neq i-1, i, i+1, j-1, j, j+1, r$. Продолжим f, положив $f(c) = s$. Ясно, что f является k-$L(2,1)$-раскраской G и $\lambda(G) \leq k$.

2. Цикл C имеет длину не менее пяти. Обозначим через a, b, c, d, e и g вершины C (в том же порядке, что и в цикле, причём возможно, что $a = g$) таким образом, что b, c, d и e имеют степень два. Построим граф G' удалив вершины c и d (вместе с инцидентными рёбрами) и соединив b и e ребром. По индукционному предположению $\lambda(G') \leq k$. Рассмотрим соответствующую k-$L(2,1)$-раскраску f кактуса G'. Пусть $i = f(b)$, $j = f(e)$, $r = f(a)$, $s = f(g)$. Из неравенства $k \geq 7$ вытекает существование различных чисел x_1, x_2, x_3 из множества $\{0, 1, \ldots, k\}$, ни одно из которых не совпадает с $i-1, i, i+1, r, j$. Аналогично, существуют различные числа y_1, y_2, y_3 из множества $\{0, 1, \ldots, k\}$, которые отличаются от $j-1, j, j+1, s, i$. Теперь мы можем выбрать x из $\{x_1, x_2, x_3\}$ и y из $\{y_1, y_2, y_3\}$ так, что $|x - y| \geq 2$. Остаётся продолжить f положив $f(c) = x$ и $f(d) = y$. Очевидно, что f является k-$L(2,1)$-раскраской G и $\lambda(G) \leq k$.

Остаётся рассмотреть ситуацию, когда все висячие циклы кактуса G имеют длину три, и проанализировать соответствующие случаи.

1. Существуют два висячих цикла с общей вершиной. Обозначим вершины этих циклов через a, b, c и a, d, e соответственно (a — общая вершина). Построим граф G' удалив из G вершины b, c, d и e (вместе с инцидентными рёбрами). Предположим, что $v_1, v_2, \ldots, v_r$ — вершины, смежные a в G'. По индукционному предположению $\lambda(G') \leq k$. Пусть f соответствующая k-$L(2,1)$-раскраска G'. Положим $i_1 = f(v_1), i_2 = f(v_2), \ldots, i_r = f(v_r)$, $j = f(a)$. Поскольку $k \geq \Delta + 2$ и $r \leq \Delta - 4$, то существуют $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1, \ldots, k\}$ ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), отличные от $i_1, i_2, \ldots, i_r, j-1, j, j+1$. Продолжим f, положив $f(b) = x_1$, $f(c) = x_3$, $f(e) = x_2$ и $f(d_4) = x_4$. Очевидно, что f является k-$L(2,1)$-раскраской G и $\lambda(G) \leq k$.

2. Существует висячий цикл C, содержащий вершину степени 3 или 4. Обозначим вершины C через a, b и c (a имеет степень 3 или 4). Построим граф G' удалив из G вершины b и c (вместе с инцидентными рёбрами). Предположим, что вершина a имеет степень 4 (случай, ко-

гда она имеет степень 3, рассматривается аналогично). Пусть d и e — вершины, смежные a в кактусе G'. По индукционному предположению $\lambda(G') \leq k$. Следовательно, существует соответствующая k-$L(2,1)$-раскраска f кактуса G'. Пусть $i = f(d)$, $j = f(e)$ и $r = f(a)$. Так как $k \geq \Delta + 2$, то найдутся $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, \ldots, k\}$ $(x_1 < x_2 < x_3)$, которые отличаются от $i, j, r-1, r, r+1$. Продолжим f положив $f(c) = x_1$ и $f(d) = x_3$. Остаётся заметить, что f является k-$L(2,1)$-раскраской G и $\lambda(G) \leq k$.

Поскольку все возможные случаи рассмотрены, то теорема доказана.

Нетрудно проверить, что полученные нами оценки являются точными.

В заключение этой части отметим, что на основе доказательства теоремы можно построить полиномиальный алгоритм для построения $L(2,1)$-раскраски для кактусов, который будет давать почти оптимальные результаты.

3. Алгоритм вычисления $\lambda(G)$ для треугольных кактусов

В этой части работы описывается алгоритм, который проверяет существование k-$L(2,1)$-раскраски для данных треугольного кактуса G и положительного целого числа k.

Пусть $G = (V, E)$ — треугольный кактус. Предположим, что C — цикл G с вершинами u, v и w, который имеет не более двух общих с другими циклами вершин. Мы будем называть этот цикл корневым циклом. Предполагается, что порядок вершин в корневом цикле фиксирован. Алгоритм строит множество троек

$$L(G) = \{\{i,j,r\}\colon i,j,r \in \overline{0,k} \text{ и существует } k{-}L(2,1){-}\text{раскраска } G,$$

$$\text{для которой } f(u) = i, f(v) = j, f(w) = r\}$$

для треугольного кактуса G с данными корневым циклом и числом k. Легко видеть, что k-$L(2,1)$-раскраска G существует тогда и только тогда, когда $L(G) \neq \emptyset$.

Алгоритм является рекурсивным.

1. Если G содержит ровно один цикл, то $L(G)$ строится прямым перебором всех возможных вариантов окраски вершин этого треугольника.

2. Если C содержит ровно две вершины, принадлежащие другим циклам, то G разбивается на два кактуса. Пусть u и v — вершины C,

принадлежащие другим циклам. Удалим рёбра C из G и обозначим через G'_1 и G'_2 компоненты получившегося графа, которые содержат u и v соответственно. Далее добавим цикл C к G'_1 и обозначим получившийся граф через G_1. Аналогично добавим C к G'_2 и построим граф G_2. Схема декомпозиции показана на Рис. 1. Цикл C считается корневым циклом G_1 и G_2. После этого алгоритм рекурсивно применяется к G_1 и G_2. Легко видеть, что в данном случае $L(G) = L(G_1) \cap L(G_2)$.

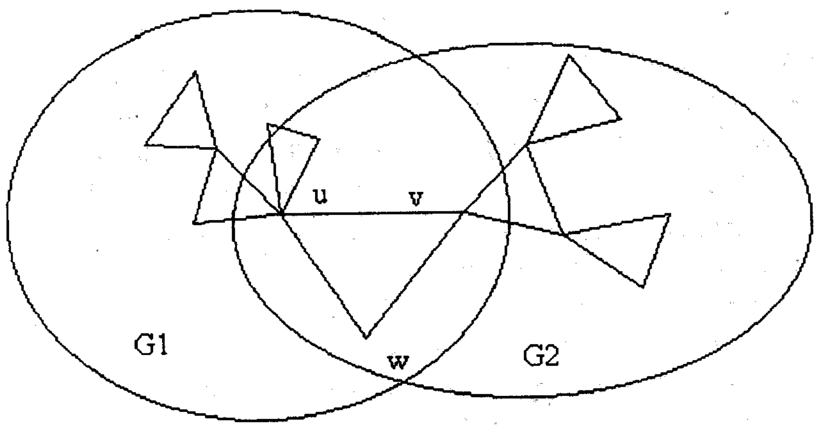

Рис. 1

3. Существует единственная вершина C, принадлежащая другим циклам. Пусть u является такой вершиной. Обозначим через u, v_i и w_i, где $i \in \overline{1,s}$, вершины других циклов, содержащих u. Удалим вершину u (вместе с инцидентными рёбрами) и обозначим через G'_i компоненту получившегося графа, содержащую v_i и w_i для $i \in \overline{1,s}$. Затем для каждого G'_i добавим к G'_i вершину u, а также рёбра (v_i, u) и (w_i, u). Обозначим получившийся граф через G_i. Будем считать цикл с вершинами u, v_i и w_i корневым циклом G_i. Процесс построения показан на Рис. 2. Применим алгоритм к G_i для $i \in \overline{1,s}$. Последний шаг состоит в построении $L(G)$ с использованием $L(G_i)$ при $i \in \overline{1,s}$. Для этого заметим, что тройка $\{i,j,r\}$, где $i,j,r \in \overline{0,k}$, $|i-j| \geq 2$, $|i-r| \geq 2$, $|j-r| \geq 2$, содержится в $L(G)$ тогда и только тогда, когда найдутся тройки $\{i,j_1,r_1\}, \{i,j_2,r_2\}, \ldots, \{i,j_s,r_s\}$ в $L(G_1), L(G_2), \ldots, L(G_s)$ соответственно, для которых все числа $j,r,j_1,r_1,j_2,r_2,\ldots,j_s,r_s$ различны. Пользуясь этим строится $L(G)$, например, с помощью полного перебора.

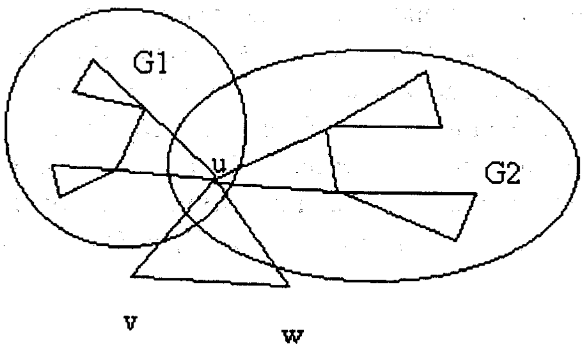

Рис. 2

Рассмотрим теперь свойства описанного алгоритма.

Теорема 2. *Пусть $G = (V, E)$ — треугольный кактус с n вершинами и максимальной степенью вершины Δ, k — положительное целое число. Описанный алгоритм корректно проверяет существование k-$L(2,1)$-раскраски G и имеет сложность $O(nk^{\frac{3\Delta}{2}})$.*

Доказательство. Корректность алгоритма немедленно вытекает из его описания. Оценим временную сложность.

Число элементов множества $L(G)$ составляет $O(k^3)$. Соответственно, для его просмотра необходимо выполнить $O(k^3)$ операций. Следовательно, число операций, выполняемых в случае 1, составляет $O(k^3)$. Построение пересечения множеств в случае 2 требует $O(k^6)$ операций. Построение множества $L(G)$ в случае 3 может быть выполнено с помощью $O(k^3(k^3)^s)$ операций. Поскольку $s \leq \frac{\Delta-2}{2}$, то число операций может быть записано как $O(k^{\frac{3\Delta}{2}})$. Заметим, что случаи 2 и 3 возникают только в случае, если $\Delta \geq 4$, и для таких Δ выполнено неравенство $k^{\frac{3\Delta}{2}} \geq k^6$. Действия, описанные во всех случаях, выполняются не более чем один раз для каждого цикла кактуса. Треугольный кактус с n вершинами содержит $\frac{n-1}{2}$ циклов. Из этого следует, что временная сложность алгоритма составляет $O(nk^{\frac{3\Delta}{2}})$.

Теорема доказана.

Легко видеть, что алгоритм является полиномиальным, если степени вершин ограничены сверху. Поскольку при $\Delta \geq k$ k-$L(2,1)$ раскраски не существует, то алгоритм также полиномиален в случае, если параметр k фиксирован (не является частью входа задачи).

Отметим, кроме того, что из теоремы 1 вытекает, что для вычисления $\lambda(G)$ алгоритм достаточно вызвать один раз. Если максимальная степень $\Delta = 2$, то $\lambda(G) = 4$. Если $\Delta = 4$, то $\lambda(G) = 5$ тогда и только тогда, когда кактус содержит ровно два цикла. Если G имеет более двух циклов, то алгоритм вызывается для $k = 6$. В случае, когда $\Delta > 4$, алгоритм вызывается для $k = \Delta + 1$.

Алгоритм является экспоненциальным, если ограничение на максимальную степень вершины и отсутствует, а k является частью входа. Мы не думаем, что алгоритм может быть улучшен, поскольку в случае 3 возникает задача, сводящаяся к задаче построения трёхмерного сочетания. Задача о существовании такого сочетания, как известно (см. [1]), является NP-полной. Мы полагаем, что задача о существовании k-$L(2,1)$-раскраски для произвольного треугольного кактуса NP-полна. Основой для такого предположения является NP-полнота соответствующей задачи для предраскрашенных кактусов. Эта задача будет рассмотрена ниже, но вначале удобнее рассмотреть задачу, которую мы назвали задачей о существовании системы пар 2-удалённых представителей.

4. Системы пар 2-удалённых представителей

Мы рассмотрим задачу, родственную известной задаче о системе различных представителей (трансверсалей).

Условие: Дана система пар множеств $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$, где $M_s, N_s \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ при $s \in \overline{1,n}$.

Вопрос: Возможно ли выбрать систему пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$, где $i_s \in M_s$, $j_s \in N_s$ для $s \in \overline{1,n}$, таким образом, что $i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n$ различны и $|i_s - j_s| \geq 2$ при $s \in \overline{1,n}$?

Систему пар чисел $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$ мы называем системой пар 2-удалённых представителей, а задачу, соответственно, задачей о существовании системы пар 2-удалённых представителей.

Хорошо известно, что задача о существовании системы различных представителей полиномиально разрешима. Наша задач более сложна.

Теорема 3. *Задача о существовании системы пар 2-удалённых представителей NP-полна в сильном смысле.*

Доказательство. Легко видеть, что достаточно доказать NP-полноту задачи для случая, когда максимальное число в условии задачи ограничено сверху полиномом от n. Мы докажем, что задача является NP-полной в случае, если максимальное число не превосходит $5n$.

Принадлежность задачи классу NP очевидна. Рассмотрим вариант задачи выполнимость булевых формул в конъюнктивной нормальной форме и сведём её к нашей задаче. Задача выполнимость формулируется следующим образом:

Условие: Даны булевы переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и C — булева формула в конъюнктивной нормальной форме от этих переменных.

Вопрос: Возможно ли придать значения переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таким образом, что значением C будет $true$?

Известно (см. [1]), что эта задача NP-полна, даже если ограничиться формулами, каждая элементарная дизъюнкция которых содержит не более трёх литералов и каждая переменная входит в не более чем три элементарных дизъюнкции. Очевидно, что можно дополнительно предположить, что каждая переменная встречается ровно один раз в положительной форме и один или два раза с отрицанием. Кроме того, без потери общности можно считать, что число элементарных дизъюнкций в C чётно. Если это не так, то добавим переменные $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ и построим формулу C' из C заменяя x_i на x'_i. Формула $C \wedge C'$ имеет чётное число элементарных дизъюнкций и является выполнимой тогда и только тогда, когда выполнима C. Мы будем предполагать, что C удовлетворяет всем перечисленным условиям.

Построим систему пар 2-удалённых представителей. Положим $r_i = 5(i-1)$, $r'_i = 5(i-1)+2$, $\overline{r_i} = 5(i-1)+1$, $\overline{r_i}' = 5(i-1)+3$ для $i \in \overline{1,n}$. Наша система состоит из двух частей. Первая часть содержит пары $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$, где $M_i = \{r_i, \overline{r_i}'\}$, $N_i = \{r'_i, \overline{r_i}\}$. Пусть $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_{2m}$, где $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$ — элементарные дизъюнкции. Построим пары $(M'_1, N'_1), (M'_2, N'_2), \ldots, (M'_m, N'_m)$ просматривая элементарные дизъюнкции C. Множество M'_j строиться по C_{2j-1}, а N'_j — по C_{2j} для $j \in \overline{1,m}$. Правила построения одинаковы. Если элементарная дизъюнкция содержит x_i, то к множеству добавляется r'_i. Если же элементарная дизъюнкция содержит $\overline{x_i}$, то к множеству добавляется $\overline{r_i}$ для первого вхождения литерала $\overline{x_i}$ в C и $\overline{r_i}'$ — для второго литерала $\overline{x_i}$. Эта операция выполняется для всех литералов в элементарной дизъюнкции. Отметим, что согласно определению $r_i, r'_i, \overline{r_i}, \overline{r_i}'$, все числа, включаемые в множество, различны.

Общее число пар равняется $n + m$, и все множества являются подмножествами $\{0, 1, \ldots, 5n-2\}$. Из этого следует, что описанное построение может быть осуществлено с помощью полиномиального алгоритма. Заметим также, что максимальное число в множествах не превосходит $5n - 2 \leq 5(n+m)$.

Докажем, что формула C выполнима тогда и только тогда, когда можно выбрать систему пар 2-удалённых представителей из построенного набора пар множеств.

Предположим, что C является выполнимой и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $C = true$.

Если $z_i = true$, то выберем из множества M_i число $\overline{r_i}$, а из множества N_i — число $\overline{r_i}'$. Если $z_i = false$, то из M_i выбирается r_i, а из N_i — r_i' при всех $i \in \overline{1,n}$. Ясно, что $|r_i - r_i'| \geq 2$ и $|\overline{r_i} - \overline{r_i}'| \geq 2$. Кроме того, из $\{r_i, r_i', \overline{r_i}, \overline{r_i}'\} \cap \{r_j, r_j', \overline{r_j}, \overline{r_j}'\} = \emptyset$ для $i \neq j$ следует, что все выбранные числа различны.

Так как $C = true$, то каждая элементарная дизъюнкция C содержит литерал со значением $true$. Выберем в каждой элементарной дизъюнкции такой литерал и соответственно выберем из пар $(M_1', N_1'), (M_2', N_2'), \ldots, (M_m', N_m')$ числа, соответствующие этим литералам. Нетрудно видеть, что все эти числа отличаются от чисел, уже выбранных из пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$. Пусть s и t — два выбранных числа. Предположим, что s соответствует литералу, построенному над x_i, а t — литералу над x_j. Если $i \neq j$, то из определения чисел $r_i, r_i', \overline{r_i}, \overline{r_i}', r_j, r_j', \overline{r_j}, \overline{r_j}'$ следует, что $|s - t| \geq 2$. Если $i = j$, то, поскольку литералы имеют одинаковые значения, литералы равны. Так как C содержит два одинаковых литерала, то эти литералы равны $\overline{x_i}$. Таким образом, s и t суть числа $\overline{r_i}$ and $\overline{r_i'}$ и $|s - t| \geq 2$. Мы получаем, что все числа, выбранные из пар $(M_1', N_1'), (M_2', N_2'), \ldots, (M_m', N_m')$ различаются, по крайней мере, на 2, и система пар 2-удалённых представителей получена.

Предположим теперь, что из набора пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n), (M_1', N_1'), (M_2', N_2'), \ldots, (M_m', N_m')$ выбрана система пар 2-удалённых представителей. Рассмотрим пары (M_i, N_i) при $i \in \overline{1,n}$. Возможны только два случая: либо число r_i выбрано из M_i, а число r_i' — из N_i, либо число $\overline{r_i}$ выбрано из M_i, а число $\overline{r_i'}$ — из N_i. В первом случае положим $x_i = false$, а во втором — $x_i = true$. Заметим теперь, что числа, выбранные из $(M_1', N_1'), (M_2', N_2'), \ldots, (M_m', N_m')$ соответствуют литералам со значением $true$. Поскольку каждая элементарная дизъюнкция C содержит литерал со значением $true$, то C выполнена.

Теорема доказана.

5. $L(2,1)$-раскраска предраскрашенных кактусов

В данном разделе будет рассмотрена задача о существовании k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных треугольных кактусов.

Задача о существовании k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных графов формулируется следующим образом:

Условие: Даны граф $G = (V, E)$, положительное целое число k, $U \subset V$ и функция $g\colon U \to \{0, 1, \ldots, k\}$.

Вопрос: Существует ли k-$L(2,1)$-раскраска f графа G, для которой $f(v) = g(v)$ при $v \in U$?

Известно, что эта задача полиномиально разрешима для деревьев (см. [4]). Алгоритм, описанный в третьей части (с незначительной модификацией) решает задачу для треугольных кактусов. Модификация состоит в том, что следует учитывать цвета предраскрашенных вершин при построении множества $L(G)$. Однако, как было замечено, алгоритм не является полиномиальным.

Теорема 4. *Задача существования k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для треугольных кактусов.*

Доказательство. Принадлежность задачи классу NP очевидна. Докажем, что задача является NP-полной при $k \leq p$ и $g(v) \leq p$ для $v \in U$, где p — число вершин графа. Рассмотрим ограниченную версию задачи о существовании системы пар 2-удалённых представителей с параметром $m \leq 5n$. Как было показано в предыдущем разделе, эта задача NP-полна. Сведём эту задачу к задаче о существовании k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных треугольных кактусов.

Предположим без потери общности, что все множества из системы пар $(M_1, N_1), (M_2, N_2), \ldots, (M_n, N_n)$ являются подмножествами $\{4, 5, \ldots, m\}$.

Положим $k = m + 4$ и построим предраскрашенный треугольный кактус G. Процесс построения довольно сложен, поэтому его удобнее описать по частям.

Пусть X — конечное множество положительных целых чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p$, где $p \geq 4$ и p являются чётными. Построим треугольный кактус $G(X)$ с раскрашенными вершинами. Множество $\{v, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_q, b_q\}$, где $q = \frac{p}{2}$, является множеством вершин кактуса, а $\cup_{j=1}^{q}\{(v, a_j), (a_j, b_j), (v, b_j)\}$ — множество рёбер. Вершину v мы будем называть корнем $G(X)$. Обозначим через g раскраску вершин кактуса и положим $g(v) = 0$, $g(a_j) = i_{2j-1}$, $g(b_j) = i_{2j}$ при $j \in \overline{1, q}$. Очевидно, что g является $L(2,1)$-раскраской.

Рассмотрим пару множеств (M_i, N_i). Одно из множеств $\{4, 5, \ldots, m+4\} \setminus M_i$, $\{4, 5, \ldots, m+3\} \setminus M_i$ имеет чётную мощность. Обозначим это множество через X_i при $i \in \overline{1, m}$. Аналогично, для каждого i одно из множеств $\{4, 5, \ldots, m+4\} \setminus N_i$, $\{4, 5, \ldots, m+3\} \setminus N_i$ имеет чётную мощность. Обозначим его через Y_i. Построим кактусы $G(X_i)$ и $G(Y_i)$ с корнями x и y. Следующий шаг состоит в добавлении к кактусам $G(X_i)$ и $G(Y_i)$ вершин $a, b, c, d, u, v, u, z, t$ и рёбер $(u, v), (v, w), (u, w)$, $(v, x), (x, z), (v, z)$,

$(a,b),(a,z),(b,z)$, $(w,t),(w,y),(t,y)$, $(c,d),(c,t),(d,t)$ (см. Рис. 3). Раскраска g кактусов $G(X_i)$ и $G(Y_i)$ продолжается следующим образом: $g(u)=1$, $g(z)=g(t)=2$, $g(a)=g(c)=m+2$, $g(b)=g(d)=m+4$. Отметим, что вершины v и w не раскрашены. Обозначим полученный кактус через G_i. Вершина u считается корнем G_i.

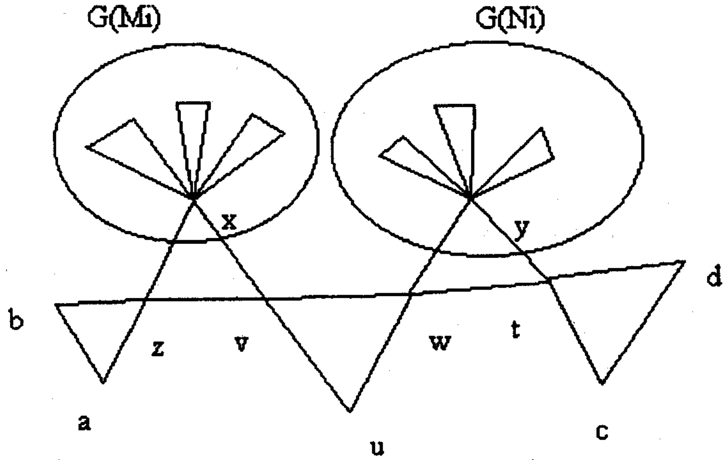

Рис. 3

Из определения k-$L(2,1)$-раскраски следует, что вершина v может быть окрашена только цветом из множества M_i, а w — только цветом из N_i. Более того, $r \in M_i$ и $r' \in N_i$ могут быть цветами v и w тогда и только тогда, когда $|r-r'| \geq 2$.

Последний шаг состоит в построении кактуса G из кактусов G_i при $i \in \overline{1,n}$ объединением корней всех этих кактусов.

Легко видеть, что k-$L(2,1)$-раскраска кактуса G с предраскрашенными вершинами существует тогда и только тогда, когда можно выбрать систему пар 2-удалённых представителей из пар множеств $(M_1,N_1),(M_2,N_2),\dots,(M_n,N_n)$.

Отметим, что графы $G(X_i)$, $G(Y_i)$ имеют не более m вершин. Из этого следует, что G_i имеет не более $2m+9$ вершин, а G — не более $n(2m+8)+1$ вершин. Так как $m \leq 5n$, то общее число вершин не превосходит $n(10n+8)+1$. Из этой оценки вытекает, что кактус G может быть построен с помощью полиномиального алгоритма.

С другой стороны, кактус G имеет не менее $10n$ вершин. Максимальный числовой параметр не превосходит $m+4 \leq 5n+4 \leq 10n$. Следовательно, условие для k и значений $g(v)$ при $v \in U$ выполнены.

Теорема доказана.

Множество треугольных кактусов составляет подмножество различных классов графов. Пользуясь этим получим ряд следствий.

Очевидно, что если задача NP-полна для треугольных кактусов, то она NP-полна для кактусов общего вида.

Следствие 1. *Задача существования k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для кактусов.*

Поскольку кактусы являются внешнепланарными графами, то мы получаем второе следствие.

Следствие 2. *Задача существования k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для внешнепланарных графов.*

Граф называется хордальным, если он не содержит циклов длины, большей 3, в качестве порождённых подграфов. Треугольные кактусы являются хордальными графами, и мы получаем очередное следствие.

Следствие 3. *Задача существования k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для хордальных графов.*

Напомним определение k-деревьев. Оно является индукционным. Клика с $k+1$ вершинами является k-деревом. k-дерево с $n+1$ вершинами может быть получено из k-дерева с n вершинами с помощью добавления новой вершины и соединения её с вершинами некоторой k-клики. Подграфы k-деревьев называют частичными k-деревьями. Очевидно, что треугольные кактусы являются частичными 2-деревьями и мы получаем заключительное следствие.

Следствие 4. *Задача существования k-$L(2,1)$-раскраски предраскрашенных графов NP-полна в сильном смысле для частичных k-деревьев при $k \geq 2$.*

Заметим, что при $k = 1$ (т.е. для обычных деревьев) задача решается полиномиальным алгоритмом. Отметим также, что задача для 2-деревьев NP-полна. Доказательство этого факта может быть получено аналогично доказательству теоремы 4.

Литература

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. **Battiti R., Bertossi A.A., Bonuccelli M.A.** Assigning codes in wireless network: Bounds and scaling properties// *Wireless Networks. 1999. V.5, №3. P. 195–209.*

3. **Bodlaender H.L., Kloks T., Tan R.B., Leeuwen J** Approximation for λ-coloring of Graphs//*LNCS. 2000. V.1770. P. 395–409.*

4. **Chang G.H. Kuo D.** The $L(2,1)$-labeling problem on graphs//it SIAM J. Disk. Math. 1996. V. 9. P. 309-316.

5. **Fiala J., Kratochvil J., Proskurowski A.** Distance constrained labeling of precoloring trees//*ICTCS. 2001. P. 285–292.*

6. **Fiala J., Kloks T., Kratochvil J.** Fixed-parameter complexity of λ-coloring//*In: Graph Theoretic Concepts in Computer Science, WG'99. 1999. LNCS. V. 1665. P. 350–363.*

7. **Fotakis D., Pantziou G., Pentaris G., Spirakis P.** Frequency assignment in mobile and radio networks//*In: Networks in distributed computing, DIMACS workshop, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 1997. V. 45. P. 73–90.*

8. **Georges J.P., Mauro D.W.** On the size of gtaphs labeled with a condition at distance two//*Journal of Graph Theory. 1996. V. 22. P. 47-57.*

9. **Griggs J.R., Yeh R.K.** Labelling graphs with a condition at distance 2//*SIAM J. Disk. Math. 1992. V. 5. P. 586–595.*

10. **Liu D.D.-F., Yeh R.K.** On distance two labelling of graphs// *ARS Combinatorica. 1997. V. 47. P. 13–22.*

11. **Murphey R.A., Pardalos P.M., Resende M.G.** Frequency assignment problems. AT&T Labs Research Technical Report 98.16.1.

Summary

Golovach P.A. $L(2,1)$-coloring of precolored cacti

An $L(2,1)$-coloring of precolored graph G is a function f from the vertex set V to the set of nonnegative integers such that this function has given values for some vertices of the graph, and if $d(a,b) = 1$, then $|f(a) - f(b)| \geq 2$, and if $d(a,b) = 2$, then $|f(a) - f(b)| \geq 1$ for all vertices a and b, where $d(a,b)$ is the distance between vertices. An $L(2,1)$-coloring f is called k-$L(2,1)$-coloring if $f(v) \leq k$ for every vertex v. Investigation of such colorings is motivated by the frequency assignment problem. We investigate a $L(2,1)$-coloring problem for cacti. The main result is that the existence problem for the k-$L(2,1)$-coloring of precolored graphs is NP-complete in the strong

sense for triangle cacti. From this it is immedially follows that the existence problem for k-$L(2,1)$-coloring of precolored graphs is NP-complete in the strong sense for partial k-trees for $k \geq 2$. Note that this problem for trees is in P. We also give some estimations for the $L(2,1)$-coloring number of cacti, and construct an algorithm, that tests the existense of the k-$L(2,1)$-coloring for triangle cacti.

Сыктывкарский университет *Поступила 1.09.2002*