Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 532.135

Неоднородное течение Куэтта структурированной жидкости [1]

Н.А. Беляева, Д.Л. Горст, С.И. Худяев

В работе [1] был поставлен вопрос о возможности устойчивого неоднородного стационарного течения Куэтта псевдопластической жидкости в плоском зазоре с заданной скоростью подвижной стенки. В настоящей работе получен положительный ответ на этот вопрос с помощью численного анализа нестационарной системы уравнений.

1. Постановка задачи.

Следуя [1], будем считать, что двухкомпонентная структурированная система, в которой компоненты A_1 и A_2 способны взаимно превращаться друг в друга, влияя на вязкостные свойства, заполняет полосу между плоскостями $\xi = 0$ и $\xi = h$, последняя из которых движется с заданной скоростью u_0. В этом случае скорость жидкости $u = u(\xi, t)$ не зависит от других координат и подчиняется [1] уравнению движения

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu(a)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{1}$$

где ρ— плотность жидкости, $\mu = \mu(a)$— вязкость, зависящая от степени структурных превращений a(доля A_1 в смеси A_1 и A_2). Как и в работе [1] зависимость $\mu(a)$ будем определять равенством

$$\mu^{-1}(a) = \mu_1^{-1}a + \mu_2^{-1}(1-a), \tag{2}$$

где μ_1 и μ_2— вязкости структур A_1 и A_2 соответственно. В дальнейшем будем предполагать $\mu_1 > \mu_2$ $\left(-1 < \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 < 0\right)$, что соответствует псевдопластической жидкости: вязкость μ уменьшается с разрушением структуры A_1.

[1] Работа выполняется при поддержке РФФИ(грант 0001-00723).

Степень структурных превращений a подчиняем диффузионно-кинетическому уравнению [1]

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \Phi\left(a, \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{3}$$

в котором коэффициент диффузии D считается постоянным, а функцию Φ, по аналогии с химической реакцией первого порядка $A_1 \rightleftharpoons A_2$ определяем формулой

$$\Phi = k_2(1-a) - k_1 a. \tag{4}$$

"Константы скорости" k_1 и k_2 зависят, вообще говоря, от механических характеристик: напряжения σ и скорости деформации $\gamma = \partial u/\partial \xi$ [2], подчиняющихся определяющему реологическому закону

$$\sigma = \mu(a)\cdot\gamma, \tag{5}$$

поэтому в общем случае можно считать $\Phi = \Phi(a,\gamma)$. На стационарных решениях ($\Phi = 0$) существенны не k_1 и k_2 по отдельности, а лишь "константа равновесия" $k = k_1/k_2$. Поэтому для некоторых упрощений полагаем $k_2 = const, k_1 = k_0 exp(p\sigma + q\sigma^2)$ (ср.[2]), так что

$$k = \chi exp(p\sigma + q\sigma^2), \quad \chi = k_0/k_2, \tag{6}$$

где p, q, k_0 – некоторые параметры жидкости.

Система (1), (3) оказывается замкнутой системой нелинейных уравнений параболического типа. С уравнением (3) будем связывать граничные условия отсутствия потока вещества через стенки

$$\partial a/\partial \xi = 0, \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = h. \tag{7}$$

Уравнение (1) рассматривается при условии прилипания жидкости к стенкам:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad u = u_0 \quad \text{при} \quad \xi = h. \tag{8}$$

Вид начальных условий задается по мере надобности.

В силу (7),(8) однородные стационарные решения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \equiv \gamma \equiv \frac{u_0}{h}, \quad a = a_0\left(\frac{u_0}{h}\right) = const, \tag{9}$$

где $a_0 = a_0(\gamma)$ является корнем уравнения (см.(4)-(6))

$$k_2^{-1}\Phi(a,\gamma) \equiv (1-a) - a\chi exp(p\mu(a)\gamma + q\gamma^2) = 0. \tag{10}$$

Как было показано в [1], такое решение неустойчиво к неоднородным возмущениям при

$$h > \pi\left(\frac{\mu D}{\Phi_a \sigma_\gamma}\right)^{1/2} \equiv h_*. \tag{11}$$

Здесь $\Phi_a = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right|_{a=a_0(\gamma)} < 0$, $\sigma_\gamma = \frac{\partial}{\partial \gamma}(\gamma\mu(a_0(\gamma)))$. Конечно, здесь предполагается наличие убывающего участка на кривой $\sigma(\gamma) = \gamma\mu(a_0(\gamma))$ (сверханомалия вязкости [3]) и принадлежность $\gamma = u_0/h$ к интервалу убывания, где $\sigma(\gamma) < 0$.

Неустойчивость (9) означает, что течение происходит в неоднородном режиме при неоднородных начальных условиях. В работе [1] описано большое разнообразие неоднородных решений, зависящих от $h > h_*$ и удовлетворяющих интегральному соотношнию

$$\int_0^h a(\xi)d\xi = a_0\left(\frac{u_0}{h}\right). \tag{12}$$

Поскольку $a(\xi) \equiv a_0\left(\frac{u_0}{h}\right)$ неустойчиво даже к однородным возмущениям, то из (12) следует, что $a(\xi, t)$ не может выходить на константу при $t \to \infty$. Следовательно, $a(\xi, t)$ выходит при $t \to \infty$ либо на устойчивое неоднородное стационарное решение, либо в неоднородном режиме развивается нестационарное течение [1].

В настоящей работе численным методом показан выход на устойчивое неоднородное стационарное решение (диссипативную структуру). Однако, остается открытым вопрос об устойчивости описанного в [1] многообразия стационарных состояний и о стабилизирующей роли соотношения (12).

2. Численный алгоритм.

Построим неоднородное решение системы (1), (3), (7), (8) в области сверханомалии вязкости. Для этого заменим уравнения (1), (3) разностными соотношениями и находим значения $a_{i,j}$ и $u_{i,j}$ методом прогонки:

$$u_{i,j+1} = A_i u_{i+1,j+1} + B_{i,j+1}, \tag{13}$$

$$a_{i,j+1} = E_i a_{i+1,j+1} + F_{i,j+1}, \tag{14}$$

Обозначив τ– шаг по времени, Δh– шаг по пространственной координате, из (1), (13) имеем

$$\rho\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \mu_2\left[-\frac{\lambda}{(1+\lambda a_{i,j})^2}\cdot\frac{a_{i+1,j} - a_{i,j}}{\Delta h}\cdot\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta h} + \right.$$

$$+\frac{1}{1+\lambda a_{i,j}}\cdot\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{(\Delta h)^2}\Bigg]. \tag{15}$$

Из (15), используя прогоночное соотношение

$$u_{i-1,j+1}=A_{i-1}u_{i,j+1}+B_{i-1,j+1},$$

найдем прогоночные коэффициенты $A_i, B_{i,j+1}$ в (13):

$$A_i=\frac{1}{zu}\left[\frac{-\mu_2\lambda\Delta a}{(\Delta h)^2(1+\lambda a_{i,j})^2}+\frac{\mu_2}{(\Delta h)^2(1+\lambda a_{i,j})}\right],$$

$$B_{i,j+1}=\frac{1}{zu}\left[\frac{\mu_2 B_{i-1,j+1}}{(\Delta h)^2(1+\lambda a_{i,j})}+g_{i,j}\right] \tag{16}$$

где

$$zu=\left(\frac{\rho}{\tau}-\frac{-\mu_2\lambda\Delta a}{(\Delta h)^2(1+\lambda a_{i,j})^2}+\frac{\mu_2(2-A_{i-1})}{(\Delta h)^2(1+\lambda a_{i,j})}\right),$$

$$\Delta a=a_{i+1,j}-a_{i,j},\quad g_{i,j}=\frac{\rho}{\tau}u_{i,j}.$$

Начальные условия

$$t=0:\quad u=0\ \text{при}\ 0\le\xi<h;\quad u=u_0\ \text{при}\ \xi=h \tag{17}$$

и граничные условия (8) дают

$$A_0=0,\quad B_{0,j}=0. \tag{18}$$

Выражения (16) - (18) позволяют определить прогоночные коэффициенты $A_i, B_{i,j+1}$.

Из уравнений (3), (14) получаем следующие разностные соотношения

$$a_{i,j+1}=a_{i+1,j+1}\cdot\frac{D\tau}{za}+\frac{D\tau F_{i-1,j+1}+k_2\tau(\Delta h)^2+a_{i,j}(\Delta h)^2}{za}, \tag{19}$$

где

$$za=(\Delta h)^2+2D\tau+k_2\tau(\Delta h)^2(1+expo)-D\tau E_{i-1},$$

$$expo=\chi exp\left[\frac{x^*}{1+\lambda a_{i,j}}\cdot\frac{\Delta u}{u_0}\cdot n+\delta\cdot x^{*2}\left(\frac{\Delta u}{u_0}\right)^2 n^2\right],$$

$$\Delta u=u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1};$$

x^*– однородное стационарное решение в области сверханомалии вязкости, δ– некоторый параметр жидкости, n– число точек пространственной сетки.

С учетом начальных

$$a = a^{н} \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{20}$$

и граничных условий (7) получим

$$E_0 = 1, \quad F_{0,j} = 0 \tag{21}$$

Из (19) с учетом (20), (21) находим прогоночные коэффициенты $E_i, F_{i,j+1}$. Зная прогоночные коэффициенты $E_i, F_{i,j+1}, A_i, B_{i,j+1}$, из (13), (14) можно определить скорость $u_{i,j}$ и глубину превращения $a_{i,j}$ в каждой точке пространственно-временной сетки.

3. Основной результат.

На рис. 1, 2 представлены кривые пространственно-временного распределения степени структурных превращений a псевдопластической жидкости ($\lambda = -0.5$) в области сверханомалии вязкости. Как показали расчеты, при данном значении λ область сверханомалии представляет интервал $(5.05; 5.9)$ изменения безразмерной скорости деформации x. Выберем $x^* = 5.8$. Тогда соответствующее однородное стационарное решение в области сверханомалии $a_0 = 0.54$ (на рисунках оно изображено пунктирной линией). Ширина зазора h, в котором находится структурированная жидкость, определяется условием (11); в представленных примерах $h = 100$. Скорость подвижной стенки $u_0 = 300$. Параметры задачи p, q определяются через выбранные значения x^*, h, u_0.

При проведении численного эксперимента, в частности, варьировались начальные условия (20) - на рисунках кривая 1. Как показано в [1], течение в области сверханомалии вязкости должно происходить в неоднородном режиме при неоднородных начальных условиях (однородное стационарное решение неустойчиво).

Представленная на рис.1:

$$t(\text{сек}) : 2(10), 3(100), 4(200), 5(300), 6(400),$$

$$7(500), 8(600), 9(700), 10(800), 11(900)$$

и рис.2:

$$t(\text{сек}) : 2(100), 3(200), 4(300), 5(500), 6(700), 7(900)$$

динамика поведения кривых степени структурных превращений a свидетельствует о выходе течения на устойчивое неоднородное стационарное решение (диссипативную структуру). Причем следует отметить, что во всех проведенных расчетах наблюдался убывающий характер такого решения, подобный представленному на рис. 1, 2. Было бы интересно убедиться, что немонотонные, а также возрастающие стационарные решения [1] неустойчивы.

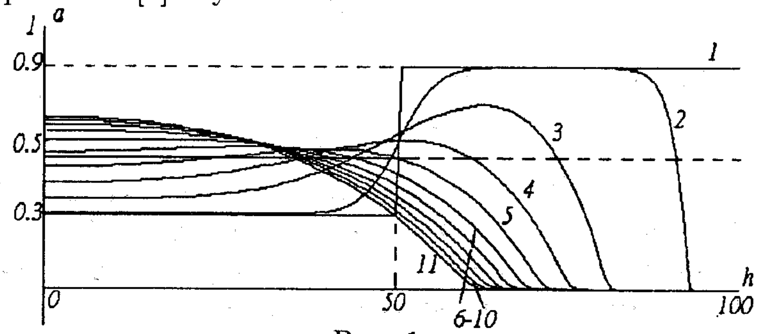

Рис. 1.

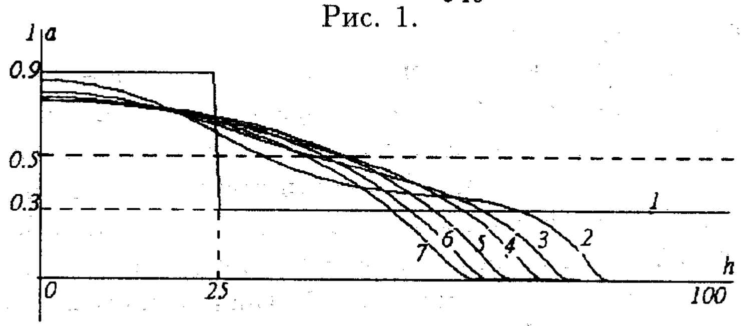

Рис. 2.

Литература

1. **Худяев С.И., Ушаковский О.В.** Пространственная неоднородность и автоколебания при течении структурированной жидкости //*Матем. моделирование. 2002. Т. 14. №7. С. 53–73.*

2. **Бучацкий Л.М., Манелис Г.Б., Столин А.М., Худяев С.И.** К теории процессов структурных превращений в текучих системах //*Инж.-физич. ж. 1981. Т. XLI. №6. С. 1032–1039.*

3. **Столин А.М., Худяев С.И., Бучацкий Л.М.** К теории сверханомалии вязкости структурированных систем //*Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. №2. С. 430–433.*

Summary

N.A.Belyaeva, D.L.Gorst, S.I.Khudaev Cuat nonuniform flow of the structured liquid.

The question about opportunity of steady nonuniform stationary Cuat flow of a pseudo-plastic liquid in a flat gap with the fixed speed of a mobile plate was formulated in work [1]. The positive answer to this question is received in the numerical analysis of non-stationary equations system.

Сыктывкарский университет *Поступила 30.09.2002*