Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 681.511.4

ДИНАМИКА ДВУМЕРНЫХ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Н.А. Антонова

Для импульсных систем управления второго порядка с широтно-импульсным модулятором первого рода получены необходимые и достаточные условия существования периодических колебаний с одним, двумя или тремя импульсами на периоде.

В данной работе исследуется задача существования периодических колебаний в широтно-импульсных системах управления второго порядка с широтной модуляцией заднего фронта импульса и постоянным внешним возмущением. Ранее задача решалась в [1], где для систем произвольного порядка были получены достаточные условия существования и устойчивости вынужденных периодических колебаний с наперед заданным числом импульсов на периоде. Но эти условия неэффективны для систем первого и второго порядков. В [2,3] с помощью вычислительных экспериментов была исследована одномерная система и выяснилось, что она может обладать множеством периодических решений, сколь бы велика не была частота импульсации. В [3] сформулированы и доказаны аналитические условия существования периодических колебаний в таких системах.

В данной статье для двумерных систем управления приводится аналитическое описание областей в пространстве параметров системы, где существуют устойчивые периодические колебания одним, двумя или тремя импульсами на периоде.

1. Описание системы.

Двумерная широтно-импульсная система управления описывается уравнением вида

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2U}{dt^2}+(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2})\frac{dU}{dt}+U=\varphi,\quad \sigma=\psi-U. \tag{1}$$

Здесь α_2, α_1 – положительные постоянные времени управляемого объекта, $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, U – состояние системы управления, φ – сигнал на выходе импульсного элемента, σ – ошибка управления объектом, ψ – постоянное внешнее воздействие на систему.

Рассматривается широтно-импульсная модуляция первого рода, для которой выход φ модулятора определяется как кусочно-постоянная функция вида

$$\varphi(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}\sigma(nT), & nT<t\le nT+\tau_n,\\ 0, & nT+\tau_n<t\le(n+1)T, n=0,1,2,\ldots\end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$\tau_n = T\cdot\min\{|\sigma(nT)|/\sigma_*;1\}, \tag{3}$$

σ_* – порог насыщения импульсного элемента, T – период модуляции импульсного элемента.

2. Формулировка результатов.

Пусть $m-$ заданное натуральное число. Будем исследовать $mT-$ периодические решения уравнения (1), для которых

$$\sigma(t+mT)=\sigma(t) \quad \text{для всех } t\ge 0, \tag{4}$$

$$\varphi(t+mT)=\varphi(t) \quad \text{для всех } t\ge 0. \tag{5}$$

Среди периодических решений выделим многотактные релейные периодические (МРП) режимы с насыщенными импульсами, для которых

$$\varphi(t)\ne 0, \quad \text{для всех } t\in[0,mT], \tag{6}$$

и простейшие нетривиальные колебания, для которых

$$\varphi(t)\ne 0,\ t\in[0,\tau];\quad \varphi(t)=0,\ t\in(\tau;T);\quad \varphi(t)\ne 0,\ t\in[T,mT]; \tag{7}$$

при этом все значения $\sigma(kT), k=3,4,...,m$ одного знака.

Здесь $\tau\in(0,T)$ – длительность первого ненасыщенного импульса, а остальные импульсы на периоде являются насыщенными. Известно, что все МРП режимы в системах с ШИМ-I устойчивые в малом.

Нас интересуют условия на параметры системы $\alpha_1, \alpha_2, \psi, T, \sigma_*$, при которых колебание с заданным числом импульсов реализуется.

Теорема 1($m = 1$).

1. *Устойчивый однотактный релейный периодический режим существует тогда и только тогда, когда*

$$|\psi| \geq \sigma_* + 1. \tag{8}$$

2. *Простейшее нетривиальное T—периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда*

$$0 < |\psi| < \sigma_* + 1. \tag{9}$$

Теорема 2($m = 2$).

Устойчивый 2—тактный релейный периодический режим существует тогда и только тогда, когда

$$|\psi| \leq \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{e^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1(e^{\alpha_1 T} + 1)} - \frac{e^{\alpha_2 T} - 1}{\alpha_2(e^{\alpha_2 T} + 1)}\right) - \sigma_*. \tag{10}$$

Теорема 3($m = 3$). *Устойчивый 3—тактный релейный периодический режим существует тогда и только тогда, когда*

$$1 + \sigma_* - 2\min(\kappa_2, \kappa_3) \leq |\psi| \leq 1 - 2\kappa_1 - \sigma_*. \tag{11}$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1(e^{2\alpha_1 T} + e^{\alpha_1 T} + 1)} - \frac{1}{\alpha_2(e^{2\alpha_2 T} + e^{\alpha_2 T} + 1)}\right),$$

$$\kappa_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{e^{\alpha_1 T}}{\alpha_1(e^{2\alpha_1 T} + e^{\alpha_1 T} + 1)} - \frac{e^{\alpha_2 T}}{\alpha_2(e^{2\alpha_2 T} + e^{\alpha_2 T} + 1)}\right),$$

$$\kappa_3 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{e^{2\alpha_1 T}}{\alpha_1(e^{2\alpha_1 T} + e^{\alpha_1 T} + 1)} - \frac{e^{2\alpha_2 T}}{\alpha_2(e^{2\alpha_2 T} + e^{\alpha_2 T} + 1)}\right),$$

Выводы теоремы 1 оказались такими же, как в [4], но здесь исследуется система второго порядка, а в [4] изучалась система управления первого порядка. Теоремы 2 и 3 дают аналитическое описание областей существования устойчивых периодических колебаний с двумя и тремя импульсами на периоде. Поскольку "цикл три рождает хаос", то в изучаемой системе возможны колебания с любым числом импульсов на периоде. Вычислительные эксперименты подтверждают это предположение, но аналитическое описание областей существования периодических колебаний с числом импульсов на периоде больше трех получить в явном виде пока не удается.

3. Доказательства

3.1. Вывод основных формул

Стандартной заменой переменной $v = u, w = \frac{du}{dt}$ уравнение (1) сведем системе двух уравнений

$$\frac{dv}{dt} = w, \quad \frac{dw}{dt} = -(\alpha_1 + \alpha_2)w - \alpha_1\alpha_2 v + \alpha_1\alpha_2\varphi.$$

Характеристическое уравнение левой части уравнения (1) имеет вещественные корни $-\alpha_1$ и $-\alpha_2$, поэтому заменой пременной

$$x = w + \alpha_2 v, \quad y = w + \alpha_1 v$$

последняя система дифференциальных уравнений преобразуется к системе уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha_1 x + \alpha_1\alpha_2\varphi, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha_2 y + \alpha_1\alpha_2\varphi, \quad \sigma = \psi - \frac{x-y}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{12}$$

Введем обозначения

$$x_n = x(nT), \quad y_n = y(nT), \quad \sigma_n = \sigma(nT), \quad \lambda_n = \mathrm{sign}\sigma(nT).$$

Решение системы линейных уравнений (12) с функцией $\varphi(t)$, определяемой (2), позволяет получить рекуррентные соотношения

$$x_{n+1} = \mathrm{e}^{-\alpha_1 T}[x_n + \lambda_n\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_1\tau_n} - 1)], y_{n+1} = \mathrm{e}^{-\alpha_2 T}[y_n + \lambda_n\alpha_1(\mathrm{e}^{\alpha_2\tau_n} - 1)]. \tag{13}$$

Приэтом

$$\sigma_n = \psi - \frac{x_n - y_n}{\alpha_2 - \alpha_1}, n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Величина τ_n определяется в соответствии с (3) по формуле

$$\tau_n = T \cdot \min\{\frac{\lambda_n\sigma_n}{\sigma_*}; \; 1\}, \tag{15}$$

3.2. Доказательство теоремы 1. Периодическим колебанием периода T может быть однотактный релейный периодический режим либо простейшее нетривиальное T- периодическое колебание. Начальную точку такого колебания определить нетрудно. Полагаем в формуле (13) значения $x_n = x, y_n = y, \lambda_n = \lambda$ для всех n, получаем

$$x = \lambda\alpha_2\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1\tau} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1}, \quad y = \lambda\alpha_1\frac{\mathrm{e}^{\alpha_2\tau} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1}. \tag{16}$$

Подставив это в (14), приходим к выражению для модуля начальной ошибки управления объектом σ в виде

$$|\sigma| = \lambda\psi - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1\tau} - 1}{\alpha_1(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)} - \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2\tau} - 1}{\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1)}\right). \qquad (17)$$

В правой части (17) стоит монотонно убывающая функция аргумента τ на отрезке $[0, T]$. Это легко проверяется с помощью производной этой функции при условии $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Наибольшее значение функции $\lambda\psi$, а наименьшее - $(\lambda\psi - 1)$. Поскольку в левой части (17) стоит неотрицательная величина, то необходимо выбрать $\lambda = \mathrm{sign}\psi$. Подставляем (17) в формулу (15), приходим к уравнению для определения длительности импульса τ простейшего нетривиального T- периодического колебания

$$\frac{\sigma_*}{T}\tau = |\psi| - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1\tau} - 1}{\alpha_1(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)} - \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2\tau} - 1}{\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1)}\right). \qquad (18)$$

Левая часть этого уравнения монотонно возрастает, а правая часть монотонно убывает по аргументу τ на отрезке $[0, T]$. Следовательно, необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (18) на интервале $(0, T)$ являются неравенства $|\psi| > 0$ и $\sigma_* > |\psi| - 1$, эквивалентные условию (9). Определив корень уравнения (18), подставим его в (16), найдем начальные условия для простейшего нетривиального T- периодического колебания.

Неравенство $\sigma_* \leq |\psi| - 1$ влечет к отсутствию решения уравнения (18) на интервале $(0, T)$, поэтому из (15) заключаем, что длительность импульса $\tau = T$. Из (16) находим начальные условия $x = \alpha_2\mathrm{sign}\psi$, и $y = \alpha_1\mathrm{sign}\psi$, отвечающие за однотактный релейный периодический режим. Теорема 1 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 2. Для двухтактного релейного периодического режима все импульсы на периоде являются насыщенными, т.е. $\tau_n = T$. Знаки импульсов будут чередоваться

$$\lambda_{2n+1} = \lambda, \quad \lambda_{2n} = -\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Значения сигналов x и y будут периодическими с периодом $2T$. Можно считать

$$x_{2n+1} = x_1, \quad y_{2n+1} = y_1, \quad x_{2n} = x_2, \quad y_{2n} = y_2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Из рекуррентных соотношений (13) находим

$$x_2 = \mathrm{e}^{-\alpha_1 T}[x_1 + \lambda\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)], \quad y_2 = \mathrm{e}^{-\alpha_2 T}[y_1 + \lambda\alpha_1(\mathrm{e}^{1T} - 1)],$$

$$x_1 = \mathrm{e}^{-\alpha_1 T}[x_2 - \lambda\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)], \quad y_1 = \mathrm{e}^{-\alpha_2 T}[y_2 - \lambda\alpha_1(\mathrm{e}^{1T} - 1)].$$

Решение этой системы уравнений относительно x_1, y_1, x_2, y_2 имеет вид

$$x_1 = -\lambda\alpha_2 \frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} + 1}, \quad y_1 = -\lambda\alpha_1 \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} + 1}, \tag{19}$$

$$x_2 = \lambda\alpha_2 \frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} + 1}, \quad y_2 = \lambda\alpha_1 \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} + 1}.$$

Для исследуемого колебания из (15) вытекают неравенства

$$\frac{\lambda\sigma_1}{\sigma_*} \geq 1, \quad \frac{-\lambda\sigma_2}{\sigma_*} \geq 1.$$

Заменяя σ_1 и σ_2 по формуле (14), приходим к неравенствам

$$\lambda\psi + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} + 1)} - \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1}{\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_2 T} + 1)}\right) \geq \sigma_*,$$

$$-\lambda\psi + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} + 1)} - \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 T} - 1}{\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_2 T} + 1)}\right) \geq \sigma_*.$$

Считаем $\lambda = \mathrm{sign}\psi$, тогда последние два неравенства легко преобразуются к виду (10).

Начальное условие для двухтактного релейного периодического режима определяется парой x_1, y_1 из уравнения (19). Теорема 2 доказана.

3.4. Доказательство теоремы 3. Для трехтактного релейного периодического режима все импульсы на периоде являются насыщенными, т.е. $\tau_n = T$. Знаки импульсов будут чередоваться в цикле три, т.е.

$$\lambda_{3n+1} = \lambda, \quad \lambda_{3n+2} = \lambda, \quad \lambda_{3n} = -\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Значения сигналов x и y будут периодическими с периодом $3T$. Можно считать

$$x_{3n+1} = x_1, \quad y_{3n+1} = y_1, \quad x_{3n+2} = x_2, \quad y_{3n+2} = y_2,$$

$$x_{3n} = x_3, \quad y_{3n} = y_3, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Из рекуррентных соотношений (13) находим

$$x_2 = \mathrm{e}^{-\alpha_1 T}[x_1 + \lambda\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)], y_2 = \mathrm{e}^{-\alpha_2 T}[y_1 + \lambda\alpha_1(\mathrm{e}^{1T} - 1)],$$

$$x_3 = \mathrm{e}^{-\alpha_1 T}[x_2 + \lambda\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)], y_3 = \mathrm{e}^{-\alpha_2 T}[y_2 + \lambda\alpha_1(\mathrm{e}^{1T} - 1)].$$

$$x_1 = \mathrm{e}^{-\alpha_1 T}[x_3 - \lambda\alpha_2(\mathrm{e}^{\alpha_1 T} - 1)], y_1 = \mathrm{e}^{-\alpha_2 T}[y_3 - \lambda\alpha_1(\mathrm{e}^{1T} - 1)].$$

Решение этой системы уравнений относительно $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ имеет вид

$$x_1 = \lambda\alpha_2 \frac{1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} - \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}, \quad y_1 = \lambda\alpha_1 \frac{1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} - \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}, \tag{20}$$

$$x_2 = \lambda\alpha_2 \frac{1 - \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}, \quad y_2 = \lambda\alpha_1 \frac{1 - \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}},$$

$$x_3 = \lambda\alpha_2 \frac{-1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}, \quad y_3 = \lambda\alpha_1 \frac{-1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}.$$

Для исследуемого колебания из (15) вытекают неравенства

$$\frac{\lambda\sigma_1}{\sigma_*} \geq 1, \quad \frac{\lambda\sigma_2}{\sigma_*} \geq 1, \quad \frac{-\lambda\sigma_3}{\sigma_*} \geq 1.$$

Заменяя σ_1, σ_2, и σ_3 по формуле (14), приходим к неравенствам

$$\lambda\psi - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} - \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}{\alpha_1(1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T})} - \frac{1 + \mathrm{e}^{1T} - \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}{\alpha_2(1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T})}\right) \geq \sigma_*,$$

$$\lambda\psi - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}{\alpha_1(1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T})} - \frac{1 - \mathrm{e}^{1T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}{\alpha_2(1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T})}\right) \geq \sigma_*,$$

$$-\lambda\psi + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{-1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T}}{\alpha_1(1 + \mathrm{e}^{\alpha_1 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_1 T})} - \frac{-1 + \mathrm{e}^{1T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T}}{\alpha_2(1 + \mathrm{e}^{\alpha_2 T} + \mathrm{e}^{2\alpha_2 T})}\right) \geq \sigma_*.$$

Пользуясь обозначениями $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, из формулировки теоремы 3, неравенства преобразуем к виду

$$\lambda\psi - \kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 \geq \sigma_*,$$

$$\lambda\psi - \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 \geq \sigma_*,$$

$$-\lambda\psi - \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \geq \sigma_*.$$

Так как имеет место соотношение

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1,$$

то последние три неравенства преобразуем к виду

$$\lambda\psi \geq 1 + \sigma_* - 2\kappa_3,$$

$$\lambda\psi \geq 1 + \sigma_* - 2\kappa_2,$$

$$\lambda\psi \leq 1 - \sigma_* - 2\kappa_1.$$

Если положить $\lambda = \mathrm{sign}\psi$, то приходим к неравенствам (11).

Начальное условие для трехтактного релейного периодического режима определяется значениями x_1, y_1 из (20). Теорема 3 доказана.

Литература

1. **Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.** Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1993. 268 с.

2. **Кипнис М.М.** Символическая и хаотическая динамика широтно - импульсных систем управления//*Докл. РАН. 1992. Т. 324. №2. С. 273–276.*

3. **Кипнис М.М.** Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления//*Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. №1. С. 108–112.*

4. **Антонова Н.А.** Динамика одномерных широтно-импульсных систем управления//*Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер.1: мат., мех., инф. 1999. Вып.3. С. 127–144.*

Summary

Antonova N.A. Dynamics of two demensional pulse-width modulated control systems

Nesessary and sufficient conditions are obtained for existence of mT - periodic modes (m=1,2,3) in two dimensional control systems employing pulse-width modulation of the first kind.

Сыктывкарский университет *Поступила 30.09.2003*