

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ¹

В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов

В первой части работы исследуется устойчивость закритической формы равновесия упругих стержней. В частности, рассматривается поведение гибкого стержня, нагруженного продольной сжимающей силой и поперечной нагрузкой. Приведены результаты вычислений полной энергии и максимального прогиба стержня при заданных значениях внешних сил. Во второй части работы рассматривается задача устойчивости сферической оболочки, испытывающей осесимметричную деформацию. В отличие от традиционных способов расчета в настоящей работе интегрируются точные уравнения равновесия оболочки. Проводится сравнительный анализ полученных результатов с результатами, известными в механике упругих систем.

1. Устойчивость закритической формы равновесия упругих стержней

Рассмотрим стержень длины l нагруженный продольной сжимающей силой P и поперечной силой $q < 0$. Пусть $w = w(s)$ $z = z(s)$ – координаты точек упругой линии (s – длина дуги, $w(s)$ – прогиб, ось z совпадает с первоначальной недеформированной осью стержня) (рис. 1).

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01-01-96431.

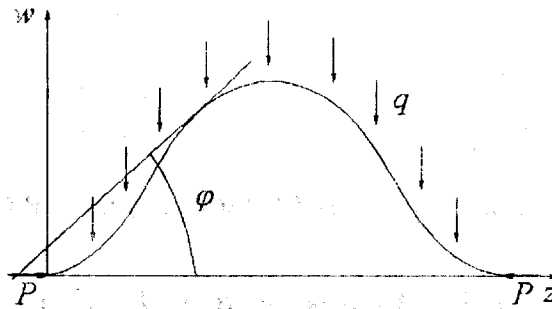


Рис. 1

Предположим, что прогиб стержня ограничен с одной стороны жестким препятствием, так что

$$w(s) \geq 0.$$

Обозначим через φ угол между касательной к упругой линии и осью z . Для определенности предположим, что выполнены граничные условия жесткой заделки. Определение упругой линии стержня сводится к вариационной проблеме

$$U(l; w) = \int_0^l \left(\frac{EJ}{2} \varphi_s'^2 - P(1 - \cos \varphi) - qw \right) ds \rightarrow \min_{w, \varphi}, \quad (1)$$

при условиях

$$w'_s = \sin \varphi, \quad z'_s = \cos \varphi,$$

$$\varphi = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } s = 0, l,$$

$$w(s) \geq 0, \quad s \in [0, l] \quad (2)$$

Предположим, что сила P больше первой критической силы Эйлера, и выполнено неравенство $4\pi^2 EJ/l^2 < P < 16\pi^2 EJ/l^2$, и пусть (l_1, l_2) -интервал максимальной длины, на котором $w(s) > 0$. Ясно, что $\varphi(l_1) = \varphi(l_2) = 0$, $w(l_1) = w(l_2) = 0$, и поэтому можно считать, что $l_1 = 0$, $l_2 > l/2$, и $w(s) \equiv 0$, $s \notin [0, l_2]$. Определение перемещений на интервале $[0, l_2]$ сводится к задаче изопериметрического типа

$$U(w, l_2) \rightarrow \min_{w, \varphi, l_2}, \quad \int_0^{l_2} \sin \varphi ds = 0$$

при условиях (2).

Составим по обычным правилам вариационного исчисления функционал Лагранжа

$$L(w, \varphi, l_2) = U(w, l_2) + \int_0^{l_2} (\lambda(w'_s - \sin \varphi) + m_1 \sin \varphi) ds.$$

Система уравнений Эйлера для функционала $L(w, \varphi, l_2)$ имеет вид

$$EJ\varphi''_{ss} + P \sin \varphi - m_1 \cos \varphi + \lambda \cos \varphi = 0, \quad \lambda' = -q. \quad (3)$$

Из второго уравнения получаем $\lambda = -qs + m_2$. Сделаем замену переменных $s = l_2\tau$, и введем обозначения

$$k^2 = \frac{Pl_2}{EJ}, \quad \rho = \frac{ql_2^3}{EJ}, \quad m = \frac{(m_1 - m_2)l_2^2}{EJ} + \frac{1}{2}\rho.$$

Первое из уравнений (3) записывается в виде

$$\varphi'' = -k^2 \sin \varphi + \rho\left(\tau - \frac{1}{2}\right) \cos \varphi + m \cos \varphi. \quad (4)$$

Из условия минимума функционала $L(w, \varphi, l_2)$ по l_2 , получаем при $l_2 < l$, еще одно граничное условие $\varphi'(1) = 0$. Уравнение (4) не интегрируется в квадратурах. Умножая обе части уравнения (4) на $\varphi'(\tau)$ и интегрируя в пределах от 0 до 1, получим $\varphi'^2(1) = \varphi'^2(0)$. Ясно, что $\varphi(0) \geq 0$ и $\varphi(1) \geq 0$, ибо, в противном случае, в достаточно малой окрестности концов интервала $[0, 1]$ прогиб будет принимать отрицательные значения. Но тогда $\varphi'(0) = \varphi'(1)$. Из последнего равенства следует, что функция $w(\tau)$ симметрична относительно середины интервала $[0, 1]$, т.е.

$$w\left(\frac{1}{2} - \tau\right) = w\left(\frac{1}{2} + \tau\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{2} - \tau\right) = -\varphi\left(\frac{1}{2} + \tau\right), \quad \tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Интегрируя уравнение (4) в пределах от 0 до 1, получим, что $m \int_0^1 \cos \varphi d\tau = 0$, а значит и $m = 0$. Пусть $\varphi(\alpha; \tau)$ — решение уравнения (4) (при $m = 0$) с начальными условиями $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \alpha$ (решение задачи Коши), и $w(\alpha; \tau) = \int_0^\tau \sin(\varphi(\alpha; t)) dt$. Обозначим $\xi(\alpha) = \varphi(\alpha; 1)$, и $\psi(\alpha) = w(\alpha; 1)$. При фиксированных значениях k и ρ находим все значения параметра α , при которых

$$\xi(\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(\alpha) = 0. \quad (5)$$

Если $w(\alpha; \tau) \geq 0$, $\tau \in [0, 1]$; то при заданных k и ρ найдено допустимое положение равновесия. Результаты вычислений для $k = 2.2\pi$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

ρ	0	5	$\rho_* = 8$	10	$\rho^* = 14.3445$
α_1	0	1.025	1.55	2.21	4.42
U_1	0	0.0763	0.1766	0.3119	0.6794
w_{max}	0	0.06143	0.0943	0.1285	0.2317
α_2	7.86	7.4	6.55	6.4	4.42
U_2	-1.542	-0.9459	-0.06245	0.04534	0.6794
w_{max}	0.3290	0.3223	0.2970	0.2967	0.2317

При $\rho > \rho^*$ уравнения (5) не имеют решений. При меньших значениях ρ имеются два корня α_1 и α_2 , $\alpha_1 < \alpha_2$, $(\alpha_2 - \alpha_1) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \rho^*$. В таблице приведены U_1 и U_2 - значения интеграла

$$U(w) = \int_0^1 \left(\varphi'^2 - k^2(1 - \cos \varphi) - \rho w \right) d\tau,$$

что с точностью до положительной константы совпадает с полной энергией системы. (U_1 - соответствует корню α_1 , U_2 - α_2 .) Корню α_1 соответствует положительное значение энергии. При $\rho_* < \rho < \rho^*$ положительное значение энергии соответствует также и корню α_2 . Если считать, что в устойчивом положении равновесия энергия должна быть отрицательной, то нетривиальные положения равновесия будут существовать лишь при $\rho < \rho_*$. При изменении k в пределах $2\pi < k < 4\pi$ поведение стержня будет аналогичным как и при $k = 2.2\pi$, меняются лишь значения α_1 , α_2 , ρ_* , ρ^* . В указанных пределах изменения сжимающей силы $\alpha = 0$ не является корнем уравнений (5); если $\rho \neq 0$, это означает, что при ненулевой силе q для всех нетривиальных положений равновесия $w(s) > 0$, $s \in (0, l)$. При силе $P > 16\pi^2$ при некоторых нагрузках стержень в своей средней точке будет касаться препятствия, и примет двухволновую форму равновесия, найти которую нетрудно, решая задачу для стержня длины $l/2$.

2. Устойчивость сферической оболочки в случае осесимметричной деформации

При расчете на устойчивость оболочек обычно используют приближенные уравнения равновесия. При этом остается открытым вопрос

о точности используемых моделей. В настоящей работе делается попытка анализа точных уравнений равновесия сферической оболочки в случае осесимметричной деформации.

Предположим, что оболочка, срединную поверхность которой обозначим через S , в результате деформации принимает форму поверхности \tilde{S} . Пусть $x = x(u_1, u_2)$, $y = y(u_1, u_2)$, $z = z(u_1, u_2)$ – уравнения поверхности S , а $x = \tilde{x}(u_1, u_2)$, $y = \tilde{y}(u_1, u_2)$, $z = \tilde{z}(u_1, u_2)$ – уравнения поверхности \tilde{S} . Обозначим g_{ij} , \tilde{g}_{ij} , $i, j = 1, 2$ – коэффициенты первой h_{ij} , \tilde{h}_{ij} , $i, j = 1, 2$ – коэффициенты второй квадратичных форм поверхностей S и \tilde{S} соответственно. Пусть ϵ_1 и ϵ_2 экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^2 (\tilde{g}_{ij} - g_{ij}) du_i du_j}{\sum_{i=1}^2 g_{ij} du_i du_j}, \quad (6)$$

а κ_1 и κ_2 экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^2 (\tilde{h}_{ij} - h_{ij}) du_i du_j}{\sum_{i=1}^2 g_{ij} du_i du_j}. \quad (7)$$

Тогда энергия деформации U , связанная с переходом оболочки из формы S в \tilde{S} , вычисляется по формуле [3]

$$U = \int_S \int \left[\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2) \right] ds \quad (8)$$

В результате осесимметричной деформации поверхность \tilde{S} представляет собой поверхность вращения вокруг оси Z некоторой кривой γ , задаваемой уравнениями $x = \varphi(\theta)$, $z = \psi(\theta)$, расположенной в плоскости XOZ , а уравнения поверхности вращения будут иметь вид

$$x = \varphi(\theta) \cos \lambda, \quad y = \varphi(\theta) \sin \lambda, \quad z = \psi(\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \lambda \in [0, 2\pi]. \quad (9)$$

Угол θ отсчитывается по меридиану от северного полюса $z = R$, $y = 0$, $x = 0$, R – радиус недеформированной сферы.

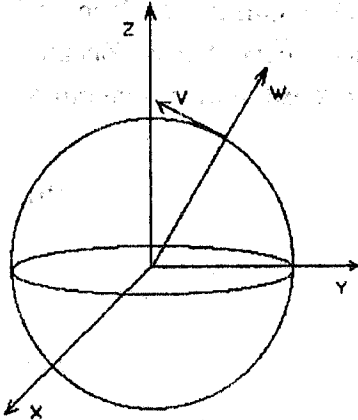
В случае поверхности вращения первая и вторая квадратичные формы будут иметь вид ([1])

$$I = (\varphi'^2 + \psi'^2) d\theta^2 + \varphi^2 d\lambda^2, \quad (10)$$

$$II = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} d\theta^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} d\lambda^2. \quad (11)$$

Уравнения сферы запишем в виде

$$x = R \sin \theta \cos \lambda, \quad y = R \sin \theta \sin \lambda, \quad z = R \cos \theta. \quad (12)$$



Обозначим через $w(\theta)$ и $v(\theta)$ нормальное и касательное перемещения точек сферы (рис.2). Тогда декартовы координаты кривой γ определяются выражениями

$$\begin{cases} x = (R + w) \sin \theta - v \cos \theta, \\ z = (R + w) \cos \theta + v \sin \theta. \end{cases} \quad (13)$$

Дифференцируя (13), получаем

$$\begin{cases} x' = (R + w - v') \cos \theta + (w' + v) \sin \theta, \\ z' = -(R + w - v') \sin \theta + (w' + v) \cos \theta. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x'' = (2w' - v'' + v) \cos \theta + (w'' - R - w + 2v') \sin \theta, \\ z'' = (w'' - R - w + 2v') \cos \theta - (2w' - v'' + v) \sin \theta. \end{cases} \quad (15)$$

Используя формулы (6) и (7), вычислим коэффициенты квадратичных форм недеформированной и деформированной сферы:

$$h_{ij} = \tilde{h}_{ij} = 0, \quad g_{ij} = \tilde{g}_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= R^2, \quad g_{22} = R^2 \sin^2 \theta, \quad h_{11} = -R, \quad h_{22} = -R \sin^2 \theta, \\ \tilde{g}_{11} &= x'^2 + z'^2 = (R - v')^2 + (v + w')^2 + 2w(R - v') + w^2, \\ \tilde{g}_{22} &= x''^2 + z''^2 = (R + w)^2 \sin^2 \theta - (R + w)v \sin 2\theta + v^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= \frac{z''x' - z'x''}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} = \frac{(R + w)(3v' + w'' - R - w)}{\sqrt{(R + w)(R + w - 2v') + (v + w')^2 + v'^2}} + \\ &+ \frac{v''(w' + v) - v(v + 3w') - 2(v'^2 + w'^2) - w''v'}{\sqrt{(R + w)(R + w - 2v') + (v + w')^2 + v'^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{22} = \frac{z'x}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} = \frac{(R+w)(v-R-w)\sin^2\theta}{\sqrt{(R+w)(R+w-2v') + (v+w')^2 + v'^2}} + \\ + \frac{\frac{1}{2}(R(w'+2v) + w(v+w') - v'v)\sin 2\theta - v(w'+v)\cos\theta}{\sqrt{(R+w)(R+w-2v') + (v+w')^2 + v'^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда из формул (11), (12) получаем выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{(w-v')(w-v'+2R) + (v+w')^2}{R^2}, \\ \varepsilon_2 &= 2\frac{w-v\operatorname{ctg}\theta}{R} + \frac{(w-v\operatorname{ctg}\theta)^2}{R^2}, \\ \kappa_1 &= \frac{1}{R} + \frac{(R+w)(3v'+w''-R-w)}{\sqrt{(R+w)(R+w-2v') + (v+w')^2 + v'^2}R^2} + \\ &+ \frac{v''(w'+v) - v(v+3w') - 2(v'^2 + w'^2) - w''v'}{\sqrt{(R+w)(R+w-2v') + (v+w')^2 + v'^2}R^2}, \\ \kappa_2 &= \frac{(R+w)(R+w-v' - (2v+w')\operatorname{ctg}\theta) + vv'\operatorname{ctg}\theta + v(w'+v)\operatorname{ctg}^2\theta}{\sqrt{(R+w)(R+w-2v') + (v+w')^2 + v'^2}R^2} \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае осесимметричной деформации оболочки выражение для упругой энергии можно записать в виде

$$U_s = 2\pi \int_0^\pi \Phi_1(\theta, w, w', w'', v, v', v'')d\theta, \quad (19)$$

где функция

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \left[\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) + \right. \\ \left. + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) \right] R^2 \sin\theta. \end{aligned}$$

Для внешнего нормального давления в соответствии с теоремой Эйлера-Бернулли работа внешних сил равна

$$A = P\Delta V, \quad (20)$$

где ΔV – изменение объёма. Для вычисления объёма \tilde{V} , ограниченного поверхностью \tilde{S} , воспользуемся формулой Остроградского

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tilde{V}} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{\tilde{S}} (\cos \omega_1 P_1 + \cos \omega_2 P_2 + \cos \omega_3 P_3) d\tilde{s}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – направляющие косинусы нормали к поверхности.

Предположим, что объём \tilde{V} ограничен замкнутой регулярной поверхностью, определяемой уравнениями

$$x = x(\theta, \lambda), \quad y = y(\theta, \lambda), \quad z = z(\theta, \lambda), \quad (\theta, \lambda) \in \Omega. \quad (22)$$

Положим в (21) $P_1 = x$, $P_2 = y$, $P_3 = z$, тогда (с точностью до знака) получим ([2])

$$\tilde{V} = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\lambda & y'_\lambda & z'_\lambda \end{vmatrix} d\theta d\lambda. \quad (23)$$

Используя уравнения (9) поверхности \tilde{S} , находим

$$\tilde{V} = \frac{\pi}{3} \int_0^\pi \Phi_2(\theta, w, w', v, v') d\theta, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_2(\theta, w, w', v, v') = & (w^3 + w^2(3R - v') + w(vw' - 2Rv' + v^2 + 3R^2) + \\ & + R(v^2 + vw') + R^3) \sin \theta + (wv' - w^2v - 2Rwv - v^2w' - v^3 + Rvv') \cos \theta - \\ & - R^2(v' \sin \theta + v \cos \theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Подчеркнутое слагаемое в (25) можно опустить, т.к.

$$\int_0^\pi R^2(v' \sin \theta + v \cos \theta) d\theta = R^2 \int_0^\pi dv \sin \theta = R^2 v \sin \theta \Big|_0^\pi = 0.$$

Обозначим

$$\tilde{F}(\theta, w, w', w'', v, v', v'') = \Phi_1(\theta, w, w', w'', v, v', v'') - \Phi_2(\theta, w, w', v, v')$$

В устойчивом положении равновесия полная энергия принимает минимальное значение. Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$\int_0^{\pi} \tilde{F}(0, w, w', w'', v, v, v'') d\theta \rightarrow \min_{w, v}, \quad (26)$$

при этом функции $w(\theta)$, $v(\theta)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{cases} w'(0) = 0, & w'''(0) = 0, & v(0) = 0, \\ w(\pi) = w_0, & w'(\pi) = 0, & v(\pi) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

где константа w_0 определена ниже (см. формулу (30)).

Введем обозначения $p = w'$, $r = w''$, $q = v'$, $s = v''$ и разложим функцию $\tilde{F}(\theta, \xi) = \tilde{F}(\theta, w, p, r, v, q, s)$ в ряд Маклорена по совокупности переменных $\xi = (w, p, r, v, q, s)$ с точностью до квадратичных слагаемых (θ рассматривается как параметр)

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\theta, \xi) &\approx \tilde{F}(\theta, 0) + \left(\frac{\partial \tilde{F}(\theta, 0)}{\partial \xi}, \xi \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}(\theta, 0)}{\partial \xi^2} \xi, \xi \right) = \\ &= F(\theta, w, p, r, v, q, s). \end{aligned}$$

Вычисляя выражение для функции F , получаем, что F не зависит от s , т.е. $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} = 0$ при $w = v = p = q = r = s = 0$, (хотя слагаемые в ряде Маклорена более высокого порядка переменную s уже содержат).

Вместо (26) рассмотрим вариационную задачу

$$U = \int_0^{\beta} F(\theta, w, w', w'', v, v') d\theta \rightarrow \min_{w, v}. \quad (28)$$

Потеря устойчивости сферической оболочки сопровождается появлением небольшой вмятины (выпучивание конечной области небольших размеров [3]), поэтому в (28) интегрирование производится в пределах от 0 до некоторого угла β , характеризующего размеры области выпучивания. Выбор угла β производится на основании численных экспериментов.

Анализ последней задачи позволяет получить значение, так называемой, верхней критической нагрузки ([4]), т.е. точку бифуркации для решений уравнений Эйлера функционала (26). Уравнения Эйлера для функционала имеют вид

$$\begin{cases} F_w - \frac{d}{d\theta} F_{w'} + \frac{d^2}{d\theta^2} F_{w''} = 0, \\ F_v - \frac{d}{d\theta} F_{v'} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Системе (29) удовлетворяет тривиальное решение $w = w_0 = \text{const}$, $v \equiv 0$, которое легко найти из уравнения

$$F_w(\theta, w, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

Решая его, находим

$$w_0 = \frac{-6pR^4(1 - \nu^2)}{Eh^3(1 - \nu) + 48EhR^2(1 + \nu) + 24pR^3(1 - \nu^2)}. \quad (30)$$

Второе из уравнений системы (29) запишем в виде

$$L_1(w, w', w'', w''', v', v'') = 0, \quad (31)$$

где

$$L_1 = F_v - F_{v\theta} - F_{v'w}w' - F_{v'w''}w'' - F_{v'w'''}w''' - \\ - F_{v'v'}v' - F_{v'v''}v''.$$

Дифференцируя (31) по θ , получаем

$$F_{v\theta} + F_{v'w}w' + F_{v'w''}w'' + F_{v'w'''}w''' + F_{v'v'}v' + F_{v'v''}v'' - \\ - F_{v'\theta\theta} - F_{v'\theta w}w' - F_{v'\theta w''}w'' - F_{v'\theta w'''}w''' - F_{v'\theta v'}v' - \\ - F_{v'\theta v''}v'' - F_{v'w\theta}w' - F_{v'w''\theta}w'' - F_{v'w'''\theta}w''' - F_{v'w'''\theta}w'''' - \\ - F_{v'v'\theta}v' - F_{v'v''\theta}v'' - F_{v'v'''\theta}v''' - F_{v'v'''\theta}v'''' = 0. \quad (32)$$

Более подробно выпишем первое уравнение системы (29)

$$F_w - F_{w'\theta} - F_{w''w}w' - F_{w''w''}w'' - F_{w''w'''}w''' - F_{w''v'}v' - F_{w''v''}v'' + F_{w''\theta\theta} + \\ + 2F_{w''w\theta}w' + F_{w''w''\theta}w'' + 2F_{w''w'''\theta}w''' + F_{w''w''''\theta}w'''' + 2F_{w''w'''\theta}w'''' + F_{w''w''''\theta}w'''' + \\ + 2F_{w''v'\theta}v' + F_{w''v''\theta}v'' + 2F_{w''v'''\theta}v''' + F_{w''v'''\theta}v'''' = 0. \quad (33)$$

Выразим из (32) v'''' и подставим в уравнение (33), тогда придем к линейному дифференциальному уравнению вида

$$L_2(w, w', w'', w''', w'''' , v', v'') = 0. \quad (34)$$

В уравнениях (31) – (34) сделаем замену переменных $w = \tilde{w} + w_0$, после чего получим систему линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} \tilde{L}_1(\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{w}'', \tilde{w}''', v', v'') = 0, \\ \tilde{L}_2(\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{w}'', \tilde{w}''', v', v'') = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Уравнения (35) представляют собой систему однородных дифференциальных уравнений 6-го порядка относительно функций \tilde{w} и v , которой удовлетворяет тривиальное решение $\tilde{w} \equiv 0, v \equiv 0$.

Таким образом, решение задачи на устойчивость сводится к определению нагрузки p , при которой система уравнений (35) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\begin{cases} \tilde{w}'(\alpha) = 0, \tilde{w}'''(\alpha) = 0, v(\alpha) = 0, \\ \tilde{w}(\beta) = w_0, \tilde{w}'(\beta) = 0, v(\beta) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Эти уравнения, по-видимому, можно проинтегрировать только численно.

Подробнее опишем алгоритм расчета на устойчивость.

Пусть $\tilde{w}_1(\theta)$ и $v_1(\theta)$ решения задачи Коши для уравнений (35) с начальными условиями

$$\begin{cases} \tilde{w}(\alpha) = d_0, \tilde{w}'(\alpha) = 0, \tilde{w}''(\alpha) = 0, \tilde{w}'''(\alpha) = 0, \\ v(\alpha) = 0, v'(\alpha) = 0, \end{cases} \quad (37)$$

а $\tilde{w}_2(\theta)$ и $v_2(\theta)$ решения задачи Коши для задачи (35) с начальными условиями

$$\begin{cases} \tilde{w}(\alpha) = 0, \tilde{w}'(\alpha) = 0, \tilde{w}''(\alpha) = d_0, \tilde{w}'''(\alpha) = 0, \\ v(\alpha) = 0, v'(\alpha) = 0, \end{cases} \quad (38)$$

и, наконец, $\tilde{w}_3(\theta)$ и $v_3(\theta)$ решения задачи Коши для задачи (35) с начальными условиями

$$\begin{cases} \tilde{w}(\alpha) = 0, \tilde{w}'(\alpha) = 0, \tilde{w}''(\alpha) = 0, \tilde{w}'''(\alpha) = 0, \\ v(\alpha) = 0, v'(\alpha) = d_0. \end{cases} \quad (39)$$

Очевидно, что трехпараметрическое семейство решений

$$\begin{cases} \tilde{w}(\theta) = c_1 \tilde{w}_1(\theta) + c_2 \tilde{w}_2(\theta) + c_3 \tilde{w}_3(\theta), \\ v(\theta) = c_1 v_1(\theta) + c_2 v_2(\theta) + c_3 v_3(\theta) \end{cases} \quad (40)$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям (35) с описанными выше граничными условиями.

Для того, чтобы краевая задача (35) — (36) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(\beta) & \tilde{w}_2(\beta) & \tilde{w}_3(\beta) \\ \tilde{w}'_1(\beta) & \tilde{w}'_2(\beta) & \tilde{w}'_3(\beta) \\ v_1(\beta) & v_2(\beta) & v_3(\beta) \end{pmatrix}$$

был равен нулю.

Ясно, что $\det(B) = f(p)$ – является функцией от параметра p .

Выражение для упругой энергии оболочки (8), а также формулы для деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и для характеристик изменения кривизн κ_1, κ_2 не совпадают с общепринятыми в механике упругих оболочек. Поэтому вместо (6) и (7) используем равенства ([5]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R}(v' + w), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R}(w + v \operatorname{ctg} \theta), \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{R^2}(w'' - v'), \quad \kappa_2 = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{R^2}(w' - v). \end{aligned} \quad (41)$$

Применяя формулы (41) для вычисления упругой энергии, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left(\frac{Eh^3}{24R^2(1-\nu^2)} \left((w'' - v')^2 + (w' - v)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + 2\nu(w'' - v')(w' - v) \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ &\left. + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left((w + v')^2 + (w + v \operatorname{ctg} \theta)^2 + 2\nu(w + v')(w + v \operatorname{ctg} \theta) \right) \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Остальные вычисления производятся по той же самой схеме, что описана выше. В этом случае w_0 определяется формулой

$$w_0 = \frac{1}{2} \frac{pR^2(1-\nu)}{pR(\nu-1) - Eh}.$$

Наряду с граничными условиями (36) рассмотрим граничные условия

$$\begin{cases} \tilde{w}'(\alpha) = 0, \quad \tilde{w}'''(\alpha) = 0, \quad v(\alpha) = 0, \\ \tilde{w}'(\pi/2) = 0, \quad \tilde{w}'''(\pi/2) = 0, \quad v(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \tilde{w}'(\alpha) = 0, \quad \tilde{w}'''(\alpha) = 0, \quad v(\alpha) = 0, \\ \tilde{w}(\pi/2) = 0, \quad \tilde{w}''(\pi/2) = 0, \quad v(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

которые могут быть поставлены только на экваторе сферы. Равенства (42) характеризуют условия симметрии перемещений $w(\theta)$ и $v(\theta)$ относительно точки $\theta = \pi/2$, (43) – условия "антисимметрии", то есть

$$w(\pi/2 - \theta) = -w(\pi/2 + \theta), \quad v(\pi/2 - \theta) = -v(\pi/2 + \theta).$$

Значения минимального критического параметра p/E в зависимости от безразмерной величины h/R приведены в таблице 2, при этом деформации и изменения кривизн определялись формулами (41).

В последней строке таблицы приведено теоретическое значение безразмерного параметра $P/E = 1.21(h/R)^2$, полученного на основании теории пологих оболочек [4]. Заметим, что в этом случае работа внешних сил вычислялась с использованием приближенной формулы.

Таблица 2.

Гран. усл.	h/R	1/10	1/20	1/30
I	$\beta = \pi/2$	-0.6	-0.2	-0.16
	$\beta = \pi/3$	-0.62	-0.27	-0.187
	$\beta = \pi/4$	-0.64	-0.38	-0.19
II	$\beta = \pi/2$	-0.58	-0.265	-0.175
III	$\beta = \pi/2$	-0.58	-0.27	-0.175
Теор.знач.		-0.012	-0.003	-0.001

В таблице в графе I выписаны результаты вычислений с использованием граничных условий (36), в графе II – граничных условий (42), в графе III – граничных условий (43).

Заметим, что формула $p = 1.21E(h/R)^2$ получена с использованием уравнений теории пологих оболочек, и работа внешних сил определялась по приближенным формулам. Судя по результатам, приведенным в таблице, пренебрежение малыми слагаемыми в уравнениях равновесия сферической оболочки может существенно повлиять на величину критического давления.

Аналитические выкладки приведены с использованием системы "MAPLE 5" [6].

Литература

1. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. М.: Наука, 1970. 800 с.
3. Погорелов А.В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, 1966. 296 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
6. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE 5. М.: Солон, 1998. 400 с.

Summary

Andryukova V.Yu., Tarasov V.N. Some problems of stability of elastic system

In the first part of work the stability of the supercritical form of an equilibrium of elastic rods is investigated. In particular, the behaviour of a flexible rod loaded with a longitudinal contracting force and a transversal load is considered. The outcomes of calculations of full energy and maximum sag of a rod for specific values of external forces are indicated. In the second part of work the problem of a spherical shell stability experiencing an axisymmetrical strain is considered. As distinct from traditional methods of account in the present work the exact equations of shell equilibrium are integrated. The comparative analysis of obtained outcomes with outcomes which are known in a mechanics of elastic systems is carried out.

Сыктывкарский университет

Поступила 11.11.2002